

## Механика

УДК 534–16

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

С. Д. Алгазин<sup>1</sup>, А. А. Синицын<sup>2</sup>

Рассматриваются свободные колебания конической оболочки конечной длины. Данная задача была сформулирована в 1960-х годах. В работе приведен современный алгоритм без насыщения, рассмотрены конкретные расчеты, которые показывают его высокую эффективность.

*Ключевые слова:* коническая оболочка, задачи на собственные значения, численный алгоритм без насыщения.

Free fluctuations of a conical shell of finite length are considered. This problem was formulated in the 1960s. A modern algorithm without saturation is given in this paper and specific calculations which show its high efficiency are discussed.

*Key words:* conical shell, problems on eigenvalues, numerical algorithm without saturation.

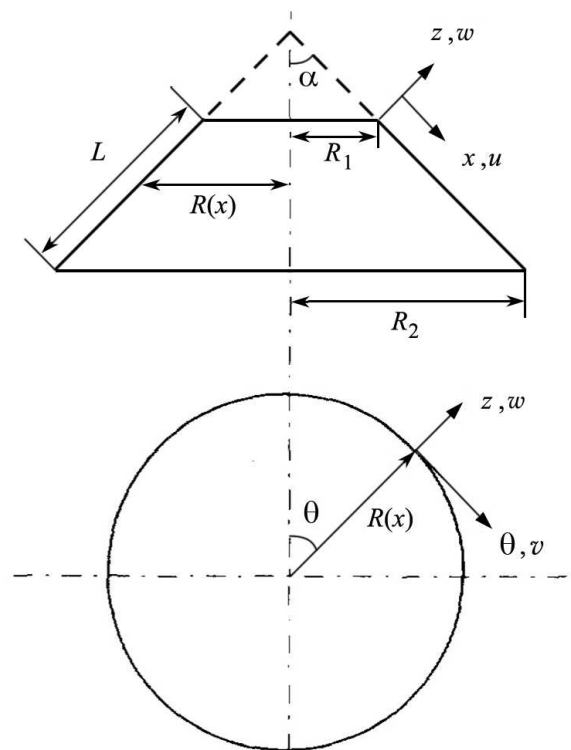
DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-4

**Введение.** Конические оболочки нашли широкое применение в качестве компонентов инженерных конструкций, и анализ колебаний таких компонентов имеет важное значение для обеспечения безопасности и устойчивости. В [1] приводится обзор исследований по этой теме.

В настоящей работе на примере задачи о свободных колебаниях конической оболочки рассматривается новый подход к конструированию алгоритмов математической физики.

Классический подход, основанный на использовании методов конечных разностей и конечных элементов, обладает существенным недостатком — он не реагирует на гладкость отыскиваемого решения. Для разностной схемы  $p$ -го порядка независимо от гладкости отыскиваемого решения погрешность метода составляет  $O(\xi^p)$ , где  $\xi$  — шаг сетки. Гладкость решения определяется входными данными задачи. Предлагаемый алгоритм свободен от этих недостатков. Он автоматически настраивается на гладкость отыскиваемого решения, и его точность тем выше, чем большим условиям гладкости отвечает решение. Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи на собственные значения можно экспериментально показать, что убывание погрешности экспоненциально. Этого невозможно добиться методами конечных разностей и конечных элементов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим коническую оболочку, представленную на рисунке, где  $R_1$  и  $R_2$  являются радиусами конуса на его малых и больших



Геометрия конической оболочки

<sup>1</sup> Алгазин Сергей Дмитриевич — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. лаб. механики и оптимизации конструкций Ин-та проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, e-mail: algazinsd@mail.ru.

Algazin Sergey Dmitrievich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Laboratory of Mechanics and Optimization of Structures, Ishlinsky Institute for Problems of Mechanics of the Russian Academy of Sciences.

<sup>2</sup> Синицын Артемий Александрович — студ. каф. автоматизации систем вычислительных комплексов ф-та ВМК МГУ, e-mail: art@sinityn.info.

Sinityn Artemiy Alexandrovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of Computer Systems and Automation.

краях,  $\alpha$  — угол конуса и  $L$  — длина конуса вдоль его образующей. Коническая оболочка задается системой координат  $(x, \theta, z)$ , как показано на рисунке. Компоненты смещения оболочки в этой системе координат обозначаются через  $u, v, w$  в направлениях  $x, \theta$  и  $z$  соответственно.

Радиус конуса в любой точке по его длине задается формулой  $R(x) = R_1 + x \cdot \sin \alpha$ . Уравнения движения с точки зрения сил и моментов могут быть записаны как

$$\begin{aligned} L_x(u, v, w) - \rho_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ L_\theta(u, v, w) - \rho_t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ L_z(u, v, w) - \rho_t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\sin \alpha}{R} (N_x - N_\theta) + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta}, \\ L_\theta &= \frac{\partial N_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \alpha}{R} N_{x\theta} + \frac{\cos \alpha}{R} Q_\theta, \\ L_z &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{R} Q_x - \frac{\cos \alpha}{R} N_\theta, \\ \rho_t &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz. \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$  и  $\rho_t$  — плотность и плотность на единицу длины соответственно;  $N_j, M_j$  являются силами и моментами, которые определены соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} N &= (N_x, N_\theta, N_{x\theta})^T = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta})^T dz, \\ M &= (M_x, M_\theta, M_{x\theta})^T = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta})^T z dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Поперечные сдвигающие силы  $Q_x$  и  $Q_\theta$  могут быть выражены через моменты  $M_x, M_\theta$  и  $M_{x\theta}$ :

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} [R(x) M_x] - \frac{M_\theta \sin \alpha}{R(x)} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta}, \\ Q_\theta &= \frac{1}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} [R(x) M_{x\theta}] - \frac{M_{x\theta} \sin \alpha}{R(x)} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Для тонкой конической оболочки напряжения в уравнениях (2) определяются двумерным законом Гука как

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_\theta \\ e_{x\theta} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $e_x, e_\theta$  и  $e_{x\theta}$  — соответственно растяжения в аксиальном и окружном направлениях и сдвиг на плоскости  $x - \theta$ . Жесткости  $Q_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E}{1 - \nu^2}, & Q_{12} &= \frac{E\nu}{1 - \nu^2}, \\ Q_{22} &= \frac{E}{1 - \nu^2}, & Q_{66} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала. Следуя первой теории приближения Лява (Love's), эти компоненты деформации можно определить как линейные функции координат толщины  $z$ :

$$\begin{aligned} e_x &= e_1 + zk_1, \\ e_\theta &= e_2 + zk_2, \\ e_{x\theta} &= \gamma + z\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $e_1$ ,  $e_2$  и  $\gamma$  — деформации срединной поверхности;  $k_1$ ,  $k_2$  и  $\tau$  — кривизны и кручение срединной поверхности. Деформации и кривизны срединной поверхности задаются следующим образом:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R(x)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u \sin \alpha}{R(x)} + \frac{w \cos \alpha}{R(x)} \\ \frac{1}{R(x)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v \sin \alpha}{R(x)} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 2\tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \alpha}{R^2(x)} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin \alpha \partial w}{R(x) \partial x} \\ 2\left(-\frac{1}{R(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{R^2(x)} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{R(x)} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{R^2(x)}\right) \end{bmatrix}.$$

Подставив (3)–(6) в (2), получим результирующие силы и моменты

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ k \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Здесь  $A_{ij}$ ,  $D_{ij}$  — жесткости растяжения и изгиба, которые определены соответственно как

$$\begin{aligned} A_{ij} &= Q_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 6; \\ D_{ij} &= \frac{1}{12} Q_{ij} h^3, \quad i, j = 1, 2, 6. \end{aligned}$$

Подстановка (7) в (1) приводит к системе

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ L_{33}u + L_{32}v + L_{33}w &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{11} \cdot \sin \alpha}{R(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{A_{22} \cdot \sin^2 \alpha}{R^2(x)} + \frac{A_{66}}{R^2(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \\ L_{12} &= \frac{(A_{12} + A_{66})}{R(x)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} - \frac{(A_{22} + A_{66}) \cdot \sin \alpha}{R^2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ L_{13} &= \frac{A_{12} \cdot \cos \alpha}{R(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{A_{22} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{R^2(x)}, \\ L_{21} &= \frac{(A_{12} + A_{66})}{R(x)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \frac{(A_{22} + A_{66}) \cdot \sin \alpha}{R^2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ L_{22} &= A_{66} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\sin \alpha}{R(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sin^2 \alpha}{R^2(x)} \right] + \left( \frac{A_{22}}{R^2(x)} + \frac{D_{22} \cos^2 \alpha}{R^4(x)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \\ &+ \frac{2D_{66} \cos^2 \alpha}{R^2(x)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2 \sin \alpha}{R(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{R^2(x)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{23} &= \left( \frac{A_{22} \cdot \cos \alpha}{R^2(x)} - \frac{4D_{66} \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{R^4(x)} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{D_{22} \cdot \cos \alpha}{R^4(x)} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - \\
&\quad - \frac{(D_{22} - 4D_{66}) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{R^3(x)} \frac{\theta^2}{\partial x \partial \theta} - \frac{(D_{12} + 2D_{66}) \cos \alpha}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta}, \\
L_{31} &= -\frac{A_{12} \cdot \cos \alpha}{R(x)} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{A_{22} \cdot \sin \alpha \cos \alpha}{R^2(x)}, \\
L_{32} &= -\left( \frac{A_{22} \cdot \cos \alpha}{R^2(x)} - \frac{(2D_{12} + 2D_{22} + 8D_{66}) \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{R^4(x)} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{D_{22} \cos \alpha}{R^4(x)} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \\
&\quad + \frac{(D_{12} + 4D_{66}) \cos \alpha}{R^2(x)} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{(D_{22} + 2D_{12} + 8D_{66}) \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{R^3(x)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}, \\
L_{33} &= -\frac{A_{22} \cdot \cos^2 \alpha}{R^2(x)} - D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{R^2(x)} \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} - \frac{D_{22}}{R^4(x)} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \frac{2D_{11} \sin \alpha}{R(x)} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \\
&\quad + \frac{2(D_{12} + 4D_{66}) \sin \alpha}{R^3(x)} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{D_{22} \sin^2 \alpha}{R^2(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2(D_{12} + D_{22} + 4D_{66}) \sin^2 \alpha}{R^4(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{D_{22} \sin^3 \alpha}{R^3(x)} \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Выражение для полей смещения тонкой конической оболочки с общими граничными условиями имеет вид

$$\begin{aligned}
u &= U(x) \cdot \cos(n\theta) \cdot \cos(\omega t), \\
v &= V(x) \cdot \sin(n\theta) \cdot \cos(\omega t), \\
w &= W(x) \cdot \cos(n\theta) \cdot \cos(\omega t).
\end{aligned} \tag{9}$$

Подстановка (9) в (8) дает итоговые уравнения, которые могут быть переписаны так:

$$\begin{aligned}
S_{110}U + S_{111}U^{(1)} + S_{112}U^{(2)} + S_{120}V + S_{121}V^{(1)} + S_{130}W + S_{131}W^{(1)} &= -\rho h \omega^2 U, \\
S_{210}U + S_{211}U^{(1)} + S_{220}V + S_{221}V^{(1)} + S_{222}V^{(2)} + S_{230}W + S_{231}W^{(1)} + S_{232}W^{(2)} &= -\rho h \omega^2 V, \\
S_{310}U + S_{311}U^{(1)} + S_{320}V + S_{321}V^{(1)} + S_{322}V^{(2)} + S_{330}W + S_{331}W^{(1)} + S_{332}W^{(2)} + S_{333}W^{(3)} + \\
&\quad + S_{334}W^{(4)} = -\rho h \omega^2 W,
\end{aligned} \tag{10}$$

где  $U^{(i)}$ ,  $V^{(i)}$ ,  $W^{(i)}$  обозначают  $i$ -е производные по  $U$ ,  $V$  и  $W$ ;  $S_{ijk}$  — постоянные коэффициенты, определенные в приложении к статье [2]. Эта форма записи итоговых уравнений идеально подходит для применения метода без насыщения. Ниже рассматриваются следующие два типа граничных условий.

Свободно опертый край (SS):

$$V = 0, \quad W = 0, \quad N_x = 0, \quad M_x = 0. \tag{11}$$

Используя уравнения (6) и (7), уравнение (11) можно упростить:

$$\begin{aligned}
V &= 0, \quad W = 0, \\
\frac{A_{12} \sin \alpha}{R} U + A_{11} U^{(1)} &= 0, \\
\frac{D_{12} \sin \alpha}{R} W^{(1)} + D_{11} W^{(2)} &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Зашемленный край (CC):

$$V = 0, \quad W = 0, \quad U = 0, \quad W^{(1)} = 0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) видно, что есть два граничных условия для  $W$  и одно условие для  $U$  и  $V$  на каждом краю.

Отметим, что конкретный вид коэффициентов  $S_{ijk}$  приведен в приложении к статье [2].

**2. Численный пример.** Рассмотрим простые собственные частоты ( $n = 0$ ). Тогда уравнение (10) выпадает и, если ввести безразмерные значения

$$\lambda = \frac{(1 - \nu^2)\rho}{E} R_2^2 \omega^2, \quad \hat{U} = \frac{U}{R_2}, \quad \hat{W} = \frac{W}{R_2}, \quad \hat{h} = \frac{h}{R_2}, \quad \hat{R} = \frac{R}{R_2}, \quad \hat{x} = \frac{x}{R_2}, \quad \hat{L} = \frac{L}{R_2},$$

получим задачу на собственные значения в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\hat{S}_{110}\hat{U} + \hat{S}_{111}U^{(1)} + U^{(2)} + \hat{S}_{130}\hat{W} + \hat{S}_{131}W^{(1)} = -\lambda\hat{U}, \tag{14}$$

$$\hat{S}_{310}\hat{U} + \hat{S}_{311}U^{(1)} + \hat{S}_{330}\hat{W} + \hat{S}_{331}\hat{W}^{(1)} + \hat{S}_{332}\hat{W}^{(2)} + \hat{S}_{333}\hat{W}^{(3)} + \hat{S}_{334}\hat{W}^{(4)} = -\lambda\hat{W}, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{S}_{110} &= -\frac{\sin^2 \alpha}{\hat{R}^2}, & \hat{S}_{111} &= \frac{\sin \alpha}{\hat{R}}, & \hat{S}_{130} &= -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\hat{R}^2}, & \hat{S}_{131} &= v \frac{\cos \alpha}{\hat{R}}, \\ \hat{S}_{310} &= -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\hat{R}^2}, & \hat{S}_{311} &= -v \frac{\cos \alpha}{\hat{R}}, & \hat{S}_{330} &= -\frac{\cos^2 \alpha}{\hat{R}^2}, & \hat{S}_{331} &= -\frac{1}{12} \hat{h}^2 \frac{\sin^3 \alpha}{\hat{R}^3}, \\ \hat{S}_{332} &= \frac{1}{12} \hat{h}^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\hat{R}^2}, & \hat{S}_{333} &= -\frac{1}{6} \hat{h}^2 \frac{\sin \alpha}{\hat{R}}, & \hat{S}_{334} &= -\frac{1}{12} \hat{h}^2. \end{aligned}$$

Результаты работы [2] приведены там в табл. 1 и 2. В настоящей работе получены следующие собственные значения при  $n = 0$ , где  $M$  — число узлов,  $\hat{L}$  — длина образующей оболочки конуса.

При  $M = 5$ ,  $\hat{L} = 0.71$  имеем собственные значения  $0.70455744576E + 00$ ;  $0.76972078476E + 00$ ;  $0.87046790728E + 00$ ;  $0.10391854512E + 01$ ;  $0.13483075620E + 01$ .

При  $M = 10$ ,  $\hat{L} = 0.71$  имеем собственные значения  $0.70528674601E + 00$ ;  $0.73642209176E + 00$ ;  $0.78866932025E + 00$ ;  $0.84250942330E + 00$ ;  $0.91815312031E + 00$ .

**3. Описание алгоритма.** Для дискретизации уравнений (14), (15) применим интерполяцию многочленами. Если  $u(x)$  — интерполируемая функция, то полагаем

$$u(x) = \sum_{j=1}^M l_j(x) u_j, \quad u_j = u(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, M, \tag{16}$$

где  $l_j(x)$  — фундаментальные функции интерполяции;  $l_j(x_i) = \delta_{ij}$ ,  $l_j(x)$  удовлетворяют рассматриваемым краевым условиям;  $x_j$  — узлы интерполяции по  $x$ . Заметим, что с целью минимизации константы Лебега интерполяции используется неравномерная сетка по  $x$  (см. [3]). Применяемая дискретизация многочленами по пространственной переменной реагирует на гладкость отыскиваемого решения, и ее точность тем выше, чем бóльшим условиям гладкости удовлетворяет решение (по  $x$ ), причем априори эту гладкость знать не нужно, метод сам настроится на нее [4, с. 235].

Дифференцируя интерполяционную формулу (16)  $p$  раз по  $x$ , получим

$$u^{(p)}(x) = \sum_{j=1}^M l_j^{(p)}(x) u_j, \quad u_j = u(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

тогда

$$u^{(p)}(x) \approx \sum_{j=1}^M D_{ij}^{(p)} u_j, \quad D_{ij}^{(p)} = l_j^{(p)}(x_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, M. \tag{17}$$

В результате теоретического исследования численного дифференцирования (см. [5]) установлено, что эта задача некорректная. Авторами проведено экспериментальное исследование формулы (17) на бесконечно дифференцируемых функциях.

Получено, что для  $p = 1, 2, 3, 4$  при  $M \leq 50$  точность численного дифференцирования приемлема. Отметим, что для рассматриваемой задачи достаточно не более 20 узлов.

Дискретная задача на собственные значения получается из (14), (15) заменой производных по  $u$  и  $w$  соответствующей матрицей  $D^{(p)}$ , где  $p$  — порядок производной.

**4. Выводы.** Разработана методика численного расчета собственных колебаний изотропной конической оболочки с краевыми условиями защемления. Сходимость проверялась экспериментально

сравнением расчетов на двух сетках с числом узлов 5 и 10, в первом собственном значении расхождение — в четвертом знаке после запятой, что достигается применением современного метода без насыщения, идеи которого принадлежат К. И. Бабенко [4] и который разработан первым автором [3]. Таким образом, надежность применяемой методики не вызывает сомнений. Проводилось сравнение с известными результатами, вследствие чего было установлено, что в табл. 1 из [2] перепутаны граничные условия. В расчетах авторов настоящей работы на разных сетках наблюдается сходимость, совпадение с расчетами при граничных условиях SS–SS, а не C–C. В табл. 2 из [2] при  $n = 0$  определено не первое собственное значение, а третье или четвертое (на сетке при  $M = 5$  — третье, а при  $M = 10$  — четвертое, более достоверный расчет — при  $M = 10$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liew K.M., Ng T.Y., Zhao X. Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method // J. Sound Vibr. 2005. **281**. 627–645 (<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.01.005>).
2. Shu C. An efficient approach for free vibration analysis of conical shells // Int. J. Mech. Sci. 1996. **38**. 935–949 ([https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)00096-8](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00096-8)).
3. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. 4-е изд., перераб. М.: URSS, 2019.
4. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
5. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: URSS, 2016.

Поступила в редакцию  
16.03.2022

УДК 531.36

## НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ, ОГРАНИЧЕННОГО ПОВЕРХНОСТЬЮ ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ

М. М. Гаджиев<sup>1</sup>, А. С. Кулешов<sup>2</sup>

Рассматривается задача о движении в свободном молекулярном потоке частиц твердого тела с неподвижной точкой, ограниченного поверхностью эллипсоида вращения. Получены необходимые условия существования в этом случае дополнительного аналитического первого интеграла, независимого с интегралом энергии.

*Ключевые слова:* твердое тело с неподвижной точкой, свободный молекулярный поток, гамильтонова система, неинтегрируемость.

The problem of motion in a free molecular flow of particles of a rigid body with a fixed point bounded by the surface of an ellipsoid of revolution is considered. Necessary conditions for the existence of an additional analytic first integral independent of the energy integral are obtained in this problem.

*Key words:* rigid body with a fixed point, free molecular flow of particles, Hamiltonian system, nonintegrability.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-5

**1. Введение. Теорема об отсутствии аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем.** Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Гаджиев Максим Магомедович — асп. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: maxuta-jr@yandex.ru.

Gadzhiev Maxim Magomedovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

<sup>2</sup> Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kuleshov@mech.math.msu.su.

Kuleshov Alexander Sergeevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.