УДК 517.984

КОНСТРУКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ

М. Ю. Игнатьев[1]

Рассматривается обратная задача рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью. Показано, что задача может быть сведена к решению некоторого линейного уравнения, установлена его разрешимость. Получена формула восстановления коэффициентов системы.

Ключевые слова: обратные задачи, задача рассеяния, особенность.

Inverse scattering problem for differential systems with a singularity is considered. The problem is reduced to a certain linear equation, the solvability of the equation is proved. A reconstruction formula for coefficients of the system is obtained.

Key words: inverse problems, scattering problem, singularity.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-3

1. Введение. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \tag{1}$$

со спектральным параметром ρ, где A и B — постоянные $(n\times n)$-матрицы, $n > 2$, $B = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n)$, ненулевые комплексные числа $(b_1, \dots, b_n)$ не лежат на одной прямой.

Обратным задачам для систем вида (1) при $n = 2$ и для близких к ним скалярных уравнений

$$-y'' + \left(q(x) + \frac{\nu_0}{x^2}\right) y = \lambda y$$

посвящено большое количество работ [1–4]. Близкие к системе (1) при $n > 2$ скалярные уравнения высших порядков

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} \left(q_k(x) + \frac{\nu_k}{x^{n-k}}\right) y^{(k)} = \lambda y$$

исследовались в работах [5–8] и др., однако используемый в указанных публикациях метод налагает существенные ограничения на поведение коэффициентов при $x \to 0$. В настоящей работе применяется подход, предложенный ранее в [9] для уравнений с регулярными коэффициентами на оси и обобщенный на случай систем вида (1) в работах [10, 11]. Дальнейшее развитие упомянутого подхода позволяет исследовать обратную задачу в более общем случае, не предполагающем специального поведения коэффициента (будем называть его *потенциалом*) $q(x)$ при $x \to 0$. Отметим, что непрерывность потенциала также не предполагается.

2. Предварительные замечания. Всюду далее будем считать, что выполнены следующие условия на матрицы A и B.

Условие 1. Матрица A внедиагональна. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и удовлетворяют условию $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ при $j \neq k$, кроме того, $\mathrm{Re}\mu_1 < \mathrm{Re}\mu_2 < \ldots < \mathrm{Re}\mu_n$, $\mathrm{Re}\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.

Условие 2. $B = \mathrm{diag}(b_1, \dots, b_n)$, элементы $b_1, \dots, b_n$ — различные ненулевые комплексные числа, такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой, и $\sum\limits_{j=1}^n b_j = 0$.

Относительно матрицы-функции $q(\cdot)$ будем предполагать принадлежность ее некоторому классу суммируемости, более точно: $q_{kj}(\cdot) \in X_p := L_1(0,\infty) \cap L_p(0,\infty)$, $q_{kk} = 0$, $k = 1, \dots, n$. В дальнейшем класс внедиагональных матриц-функций с элементами из X_p обозначается $\mathcal{X}_p$.

[1] *Игнатьев Михаил Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математической физики и вычислительной математики мех.-мат. ф-та Саратов. гос. ун-та, e-mail: ignatievmu@sgu.ru, mikkieram@gmail.com.

Ignatiev Mikhail Yur'evich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Saratov State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Department of Mathematical Physics and Computational Mathematics.

Обозначим через Σ объединение прямых следующего вида:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}.$$

При выполнении условия 2 для любого $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$ существует перестановка $R_1,\dots,R_n$ $(R_k = R_k(\rho))$ чисел $b_1,\dots,b_n$, такая, что $\mathrm{Re}(\rho R_1) < \mathrm{Re}(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n)$. В дальнейшем будет удобно рассматривать $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ как объединение непересекающихся открытых секторов $\bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \mathcal{S}_\nu$. Будем считать, что секторы занумерованы в положительном направлении, $\mathcal{S}_{N+1} := \mathcal{S}_1$.

Определение 1. Зафиксируем произвольные $k \in \{1,\dots,n\}$ и $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$. Решение $y(x)$, $x \in (0,\infty)$, системы (1) назовем *k-м решением типа Вейля*, если для него имеют место асимптотики

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0,\ \ y(x) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty. \tag{2}$$

Здесь и далее $\mathfrak{f}_1,\dots,\mathfrak{f}_n$ — столбцы матрицы перестановок $\mathfrak{f}$, такой, что $(R_1,\dots,R_n) = (b_1,\dots,b_n)\mathfrak{f}$.

В простейшем случае $q = 0$ существование всех решений типа Вейля для всех $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$ гарантируется условием R_0 [10], которое в дальнейшем называется *условием информативности* и предполагается выполненным. В общем случае существование k-го решения типа Вейля зависит от значений соответствующей *характеристической функции* $\Delta_k(\cdot)$[10], а именно k-е решение типа Вейля $\Psi_k(\cdot,\rho)$ существует и единственно при условии $\Delta_k(\rho) \neq 0$. В настоящей работе мы рассматриваем такие $q(\cdot) \in \mathcal{X}_p$, что условие

$$\prod_{k=1}^{n} \Delta_k(\rho) \neq 0,\ \ \rho \in \overline{\mathcal{S}}_\nu,$$

выполнено для всех $\nu = 1,\dots,N$. Класс таких $q(\cdot)$ в дальнейшем обозначается G_0^p. Если $q(\cdot) \in G_0^p$, то $\Psi_k(x,\cdot)$ допускают непрерывные продолжения в $\overline{\mathcal{S}}_\nu \setminus \{0\}$ для всех $\nu = 1,\dots,N$ и $k = 1,\dots,n$.

3. Свойства данных рассеяния. Постановка обратной задачи. Обозначим через Σ_ν открытый луч, разделяющий секторы $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{S}_{\nu+1}$, $\bar{\Sigma}_\nu := \Sigma_\nu \cup \{0\}$, $\Sigma' := \bigcup\limits_{\nu=1}^{N} \Sigma_\nu = \Sigma\setminus\{0\}$. Для (произвольной) функции $f = f(\rho)$, определенной на $\mathbb{C}\setminus\Sigma$, договоримся при $\rho \in \Sigma'$ через $f^{\pm}(\rho)$ обозначать следующие пределы:

$$f^{\pm}(\rho) = \lim_{\varepsilon\to+0} f(\rho \pm i\varepsilon\rho).$$

Иногда при описанных условиях будем опускать знак "минус", т.е. писать $f(\rho)$ вместо $f^-(\rho)$ (где $\rho \in \Sigma'$).

Пусть $\Psi = \Psi(x,\rho)$, $x \in (0,\infty)$, $\rho \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$, — матрица, построенная из решений типа Вейля в каждом из секторов $\mathcal{S}_\nu$, $\nu = \overline{1,N}$. Для каждого $\rho \in \Sigma_\nu$ существуют пределы $\Psi^{\pm}(x,\rho)$ и определена не зависящая от x матрица $v = v(\rho)$, такая, что

$$\Psi^+(x,\rho) = \Psi^-(x,\rho)v(\rho). \tag{3}$$

Определение 2. Матрица-функция $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$, из (3) называется данными рассеяния.

Задача 1. Найти потенциал $q(\cdot) \in G_0^p$, $p > 2$, по известным данным рассеяния $v(\rho)$, $\rho \in \Sigma'$.

Лемма 1. *При $j < k$ имеем $v_{jk}(\rho) \equiv 0$. При $j > k$ имеем $v_{jk}(\rho) \equiv 0$, если $\mathrm{Re}(\rho R_j) > \mathrm{Re}(\rho R_k)$.*

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4.2 [10], можно убедиться, что для $\rho \in \Sigma_\nu$ справедлив следующий (более слабый) аналог асимптотик (2):

$$\Psi_k(x,\rho) = O(x^{\mu_k}), x \to 0,\ \ \Psi_k(x,\rho) = O(\exp(\rho R_k x)), x \to \infty.$$

Для доказательства леммы достаточно, пользуясь данными оценками, выполнить предельные переходы при $x \to 0$ и $x \to \infty$ в представлении

$$v_{jk} \det \mathfrak{f} = \det\left(\Psi_1,\dots,\Psi_{j-1},\Psi_k^+,\Psi_{j+1},\dots,\Psi_n\right). \tag{4}$$

Введем при $\rho \in \Sigma'$ матрицу перестановок $\Pi(\rho)$, такую, что $R^+(\rho) = \Pi^{-1}(\rho)R^-(\rho)\Pi(\rho)$, где, как и всюду далее, $R := \mathrm{diag}(R_1,\dots,R_n)$, если иное не оговорено явно. Ясно, что $\Pi(\rho)$ представляет собой блочно-диагональную матрицу, постоянную на каждом из лучей Σ_ν. Из леммы 1 вытекает, что матрица $v(\rho)$ имеет такую же блочную структуру, как и матрица $\Pi(\rho)$. В дальнейшем блочно-диагональные матрицы с такой блочной структурой будем называть Π -*диагональными.* С учетом условия 2 блочная структура матрицы $\Pi(\rho)$ и соответственно $v(\rho)$ может быть описана более явным образом. Заметим прежде всего, что в двойном неравенстве $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) \leqslant \mathrm{Re}(\rho R_k) \leqslant \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ знак равенства возможен не более чем в одной позиции. Индексам k, для которых $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) < \mathrm{Re}(\rho R_k) < \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ ($\mathrm{Re}(\rho R_k) < \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ в случае $k = 1$), в матрице $\Pi(\rho)$ соответствуют тривиальные диагональные блоки1×1, причем $\Pi_{kk}(\rho) = 1$. Определим I_- как множество k, таких, что $\mathrm{Re}(\rho R_k) = \mathrm{Re}(\rho R_{k+1})$ (при этом $\mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) < \mathrm{Re}(\rho R_k)$, если $k > 1$). Отметим, что для $k \in I_-$ имеем $R_k^+ = R_{k+1}$, $R_{k+1}^+ = R_k$, иначе говоря, таким k в матрице $\Pi(\rho)$ соответствует блок 2×2 вида

$$\begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix},$$

расположенный в строках и столбцах с номерами k и $k+1$.

Теорема 1. *При каждом $\rho \in \Sigma'$ $v(\rho)$ — нижнетреугольная Π-диагональная матрица. Кроме того, для каждого индекса $k \in I_-$ имеем $v_{k+1,k}(\rho) \equiv 1$.*

Доказательство. Представление (4) при $j = k$ дает

$$v_{k+1,k} \cdot \det \mathfrak{f} = \det \left(\Psi_1, \ldots, \Psi_k, \Psi_k^+, \Psi_{k+2}, \ldots, \Psi_n \right).$$

Если $k \in I_-$, то $\mathrm{Re}(\rho R_k^+) = \mathrm{Re}(\rho R_{k+1}) > \mathrm{Re}(\rho R_{k-1}) = \mathrm{Re}(\rho R_{k-1}^+)$. В этом случае имеем (здесь также следует повторить рассуждения из доказательства теоремы 4.2 [10])

$$\Psi_k^+(x, \rho) = \exp(\rho x R_k^+)(\mathfrak{f}_k^+ + o(1)) = \exp(\rho x R_{k+1})(\mathfrak{f}_{k+1} + o(1))$$

при $x \to \infty$. Пользуясь асимптотикой фундаментальных тензоров [10, теорема 3.1], заключаем, что

$$v_{k+1,k} \cdot \det \mathfrak{f} = |F_k \wedge (\exp(\rho x R_{k+1})(\mathfrak{f}_{k+1} + o(1))) \wedge \Psi_{k+2} \wedge \ldots \wedge \Psi_n| =$$

$$= |\exp(\rho x \mathbf{R}_k)(\mathfrak{f}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{f}_k + o(1)) \wedge (\exp(\rho x R_{k+1})(\mathfrak{f}_{k+1} + o(1))) \wedge \Psi_{k+2} \wedge \ldots \wedge \Psi_n| =$$

$$= |(F_{k+1} + o(\exp(\rho x \mathbf{R}_{k+1}))) \wedge \Psi_{k+2} \wedge \ldots \wedge \Psi_n| = \det \Psi + o(1) = \det \mathfrak{f} + o(1).$$

В вышеприведенных равенствах используются следующие обозначения: для произвольного элемента $h \in \wedge^n \mathbb{C}^n$ через $|h|$ обозначается число, такое, что $h = |h| \mathfrak{e}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{e}_n$, где $\{\mathfrak{e}_k\}_{k=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{R}_k := R_1 + \ldots + R_k$.

С учетом того, что $v_{k+1,k}$ не зависит от x, из полученной асимптотики следует, что $v_{k+1,k} = 1$.

Из теоремы 1 вытекает, что каждому нетривиальному диагональному блоку матрицы $\Pi(\rho)$, расположенному в строках и столбцах с номерами k и $k+1$ (где $k \in I_-$), соответствует диагональный блок вида

$$\begin{pmatrix} v_{kk} & 0 \\ 1 & v_{k+1,k+1} \end{pmatrix}$$

матрицы $v(\rho)$.

Определим пространство $\mathcal{H}(\Sigma)$ как пространство, состоящее из функций $\varphi \in L_2(\Sigma)$, таких, что для каждого $\nu = \overline{1, N}$ ограничение $\varphi(\rho)\big|_{\rho \in \Sigma_\nu}$ непрерывно и существуют $\lim\limits_{\rho \to 0, \rho \in \Sigma_\nu} \varphi(\rho)$ и $\lim\limits_{\rho \to \infty, \rho \in \Sigma_\nu} \varphi(\rho)$, причем

$$\lim_{\rho \to \infty, \rho \in \Sigma_\nu} \varphi(\rho) = 0.$$

Для $\varphi \in \mathcal{H}(\Sigma)$ положим $\|\varphi\| := \|\varphi\|_{L_2(\Sigma)} + \sup_{\rho \in \Sigma'} \|\varphi(\rho)\|$.

Обозначим через $L_2^+(\Sigma)$ пространство Π-верхнетреугольных (т.е. блочно-верхнетреугольных для каждого ρ с такой же, как у $\Pi(\rho)$, структурой блоков) матриц-функций с элементами из $L_2(\Sigma)$, $\mathcal{H}^+(\Sigma) := \mathcal{H}(\Sigma) \cap L_2^+(\Sigma)$. Через $\mathcal{H}^\Pi(\Sigma)$ будем обозначать пространство нижнетреугольных Π-диагональных матриц-функций с элементами из $\mathcal{H}(\Sigma)$.

В дальнейшем через $\Psi_0(x, \rho)$ будем обозначать матрицу, составленную из решений типа Вейля для простейшей системы (1) при $q = 0$. Из представления $\Psi_0(x, \rho) = \tilde{\Psi}_0(x, \rho) W(\rho x)$, где

$$W(\xi) := \mathrm{diag}(W_1(\xi), \ldots, W_n(\xi)),$$

$$W_k(\xi) := \begin{cases} W_0(\xi^{\mu_k})\exp(R_k\xi), & |\xi| \leqslant 1; \\ \exp(R_k\xi), & |\xi| > 1, \end{cases},\ k = 1, \ldots, n,\ W_0(\xi) := \begin{cases} (1 - |\xi|)\xi + |\xi|^2, & |\xi| \leqslant 1; \\ (W_0(\xi^{-1}))^{-1}, & |\xi| > 1, \end{cases}$$

а матрица-функция $\tilde{\Psi}_0(x, \rho)$ равномерно ограничена и непрерывна на $[0, \infty) \times \overline{\mathcal{S}}_\nu$, непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Для произвольной нижнетреугольной* Π*-диагональной матрицы и при* $\rho \in \Sigma'$ *справедлива оценка*

$$\|\Psi_0(x, \rho) u \Psi_0^{-1}(x, \rho)\| \leqslant M\|u\|$$

с некоторой константой M*, зависящей только от матриц* A *и* B.

Далее мы будем использовать один и тот же символ M для обозначения (различных, вообще говоря) констант в неравенствах, перечень аргументов указывает, от чего может зависеть данная константа. Исключение составляет зависимость от матриц A и B, которая не будет указываться явно, т.е. символ M без аргументов обозначает константу, зависящую только от матриц A и B.

В дальнейшем данные рассеяния рассматриваются как величина, зависящая не только от спектрального параметра ρ, но и от потенциала $q(\cdot)$. В связи с этим используются (там, где это необходимо) обозначения $v(q, \rho)$, $v_0(\rho) := v(0, \rho)$, т.е. матрица v_0 соответствует “простейшему” случаю $q = 0$. Напомним, что функция $v_0(\cdot)$ постоянна на каждом из лучей Σ_ν.

Теорема 2. *Имеем* $v(\cdot, \cdot) - v_0(\cdot) \in C(G_0^p, \mathcal{H}^\Pi(\Sigma))$.

Доказательство. Поскольку матрица $v(q, \rho) - v_0(\rho)$ диагональна для любых q, ρ, достаточно рассмотреть диагональные элементы. Воспользовавшись теоремами 3, 4 из [11], получим

$$\det \mathfrak{f} \cdot v_{kk} = \det \Big(\Psi_{01} + W_1\hat{\Psi}_1, \ldots, \Psi_{0,k-1} + W_{k-1}\hat{\Psi}_{k-1}, \Psi_{0k}^+ + W_k^+\hat{\Psi}_k^+,$$

$$\Psi_{0,k+1} + W_{k+1}\hat{\Psi}_{k+1}, \ldots, \Psi_{0n} + W_n\hat{\Psi}_n\Big),$$

где (как и ниже в настоящем доказательстве) $W^\pm := W^\pm(\rho x)$, причем для каждого $\nu = \overline{1, N}$ и произвольного фиксированного x имеем $\hat{\Psi}_k^\pm(\cdot, x, \cdot) \in C\left(G_0^p(\Sigma), \mathcal{H}(\Sigma_\nu)\right)$. Указанное выше представление может быть преобразовано к виду

$$v_{kk} = v_{0,kk} + \prod_{j=1}^{n} W_j(\rho x) \frac{W_k^+(\rho x)}{W_k(\rho x)}(v_{1,kk} + v_{2,kk}), \tag{5}$$

где

$$v_{1,kk} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k'} \chi_\alpha' \left|\hat{\Psi}_k^+ \wedge \tilde{\Psi}_{0\alpha} \wedge \hat{\Psi}_\beta\right|,\ v_{2,kk} = \sum_{\beta \in \mathcal{A}_k''} \chi_\alpha'' \left|\tilde{\Psi}_{0k}^+ \wedge \tilde{\Psi}_{0\alpha} \wedge \hat{\Psi}_\beta\right|. \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{A}_k'$ — множество всех мультииндексов (включая пустой мультииндекс), не содержащих k, $\mathcal{A}_k''$ — множество непустых мультииндексов из $\mathcal{A}_k'$; $\chi_\alpha', \chi_\alpha'' \in \{-1, 1\}$; в обеих суммах в каждом слагаемом мультииндексы α и β связаны условием $\alpha \cup \beta = (1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$; для мультииндекса $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ и семейства векторов $\{f_j\}$ запись f_γ означает $f_{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge f_{\gamma_m}$. С учетом непрерывности и ограниченности $\tilde{\Psi}_0(x, \rho)$ по $(x, \rho) \in [0, \infty) \times \bar{\Sigma}_\nu$ из (5), (6) вытекает требуемое.

4. Основное уравнение обратной задачи. Покажем, что решение задачи 1 может быть сведено к решению некоторого линейного уравнения. С этой целью рассмотрим *матрицу спектральных отображений* $P(x, \rho) := \Psi(x, \rho)\Psi_0^{-1}(x, \rho)$, где $\Psi(x, \rho) = \Psi(q, x, \rho)$ для некоторого $q(\cdot) \in G_0^p$. Условимся, что для каждого $\nu = \overline{1, N}$ открытые лучи Σ_ν ориентированы в направлении от 0 к ∞. Под Σ_ν^+ и Σ_ν^- понимаются берега (проведенного по Σ_ν) разреза, принадлежащие границе сектора $\mathcal{S}_{\nu+1}$ и сектора $\mathcal{S}_\nu$ соответственно. Условимся считать, что Σ_ν^+ ориентированы от 0 к ∞, а Σ_ν^- — от ∞ к 0. Обозначим через γ контур, составленный из всех Σ_ν^+ и Σ_ν^-, $\nu = \overline{1, N}$. Положим $\gamma_r := \gamma \cap \{\rho : |\rho| \leqslant r\}$ и $\Gamma_r := \gamma_r \cup C_r$, где контур C_r представляет собой окружность радиуса r, ориентированную в положительном направлении.

Применяя интегральную формулу Коши, запишем для произвольного $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, $|\rho| < r$:

$$P(x, \rho) - I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho}(P(x, \zeta) - I). \tag{7}$$

В силу теоремы 3 [11] имеем $P(x,\zeta)-I\to 0$ при $\zeta\to\infty$, следовательно, переходя в (7) к пределу при $r\to\infty$, получим

$$P(x,\rho)-I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}(P(x,\zeta)-I). \tag{8}$$

Заметив, что для каждого $\nu=\overline{1,N}$ в силу выбранной ориентации контуров Σ_ν, Σ_ν^+ и Σ_ν^-

$$\int\limits_{\Sigma_\nu^-\cup\Sigma_\nu^+}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}(P(x,\zeta)-I)=\int\limits_{\Sigma_\nu}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}(P^+(x,\zeta)-P^-(x,\zeta)),$$

преобразуем (8) к виду

$$P(x,\rho)-I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}(P^+(x,\zeta)-P^-(x,\zeta)),\ \ \rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma. \tag{9}$$

Обозначим через $Cf(\rho)$ интегральный оператор Коши:

$$Cf(\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma}\frac{d\zeta}{\zeta-\rho}f(\zeta),\ \ \rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma,$$

через $C^\pm f(\rho)$, $\rho\in\Sigma'$, обозначим предельные значения $C^\pm f(\rho):=(Cf)^\pm(\rho)$.

Во введенных обозначениях представление (9) для $P(x,\rho)$ перепишется в виде

$$P(x,\rho)=I+C\hat{P}(x,\rho),\ \ \rho\in\mathbb{C}\setminus\Sigma, \tag{10}$$

где $\hat{P}(x,\rho):=P^+(x,\rho)-P^-(x,\rho)$.

Заметим, что из равенства $\Psi^+(x,\rho)=\Psi^-(x,\rho)v(\rho)$ следует, что $P^+(x,\rho)=P^-(x,\rho)V(x,\rho)$, где

$$V(x,\rho):=\Psi_0(x,\rho)v(\rho)v_0^{-1}(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho). \tag{11}$$

Взяв в (10) соответствующие предельные значения, с учетом (11) будем иметь

$$\left(C^+\hat{P}(x,\cdot)\right)(\rho)-\left(C^-\hat{P}(x,\cdot)\right)(\rho)V(x,\rho)=V(x,\rho)-I,\ \ \rho\in\Sigma'. \tag{12}$$

В контексте решения обратной задачи рассеяния мы будем рассматривать полученное соотношение как линейное уравнение относительно функции $\hat{P}(x,\cdot)$ (для каждого фиксированного $x>0$, выступающего как параметр); величина $V(x,\rho)$, также входящая в соотношение (12), может быть найдена по явной формуле (11) исходя из известных данных рассеяния $v(\rho)$. Для построения и обоснования конструктивной процедуры решения обратной задачи рассмотрим (12) как уравнение в $L_2(\Sigma)$ и установим его корректную разрешимость для каждого фиксированного $x>0$. Уравнение (12) называется *основным уравнением обратной задачи.*

Теорема 3. *Для каждого фиксированного* $x>0$

1) $\hat{P}(x,\cdot)$ *является единственным в пространстве* $L_2(\Sigma)$ *решением уравнения* $\mathbf{A}(x)\varphi=\hat{V}(x,\cdot)$, *где* $\hat{V}(x,\rho):=V(x,\rho)-I$, $\mathbf{A}(x)$ *— линейный оператор, действующий в* $L_2(\Sigma)$ *по формуле*

$$\mathbf{A}(x)\varphi(\rho):=\left(C^+\varphi\right)(\rho)-\left(C^-\varphi\right)(\rho)V(x,\rho);$$

2) *оператор* $\mathbf{A}(x)$ *обратим.*

Доказательство. 1. Достаточно убедиться, что для любого $q(\cdot)\in G_0^p$ соответствующие функции $\hat{P}(x,\cdot)$, $\hat{V}(x,\cdot)$ принадлежат $L_2(\Sigma)$, а оператор $\mathbf{A}(x)$ действует в этом же пространстве. Единственность решения рассматриваемого уравнения следует из устанавливаемой в п. 2 обратимости оператора $\mathbf{A}(x)$.

В силу теоремы 4 [11] при каждом фиксированном $x>0$ имеем $P^\pm(x,\cdot)-I\in L_2(\Sigma)$, откуда $\hat{P}(x,\cdot)\in L_2(\Sigma)$. Рассмотрим $\hat{V}(x,\rho):=\Psi_0(x,\rho)\hat{v}(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)$, где $\hat{v}(\rho):=(v(\rho)-v_0(\rho))v_0^{-1}(\rho)$. Из теорем 1, 2 следует, что $\hat{v}(\cdot)\in\mathcal{H}^{\Pi}(\Sigma)$, из леммы 3 следует, что $\hat{V}(x,\cdot)\in L_2(\Sigma)$, более того, функция

$\hat{V}(x,\rho)$ ограничена по $\rho \in \Sigma'$ и стремится к нулю при $\rho \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что функция $V(x,\rho)$ ограничена по $\rho \in \Sigma$ и, значит, оператор умножения на эту функцию непрерывен в $L_2(\Sigma)$. Поскольку операторы $C^{\pm}$ непрерывны в $L_2(\Sigma)$, заключаем, что оператор $\mathbf{A}(x)$ непрерывен в $L_2(\Sigma)$. Рассматриваемое в теореме уравнение есть записанное в операторной форме основное уравнение (12).

2. Для удобства обозначений в последующем рассуждении мы не указываем параметр $x \in (0,\infty)$ в списках аргументов. Обозначим $\tilde{P}(\rho) := P^{-1}(\rho)$. Введем в рассмотрение оператор

$$\tilde{\mathbf{A}} f = C^+(f\tilde{P}^+)P^+ - C^-(f\tilde{P}^+)P^-.$$

Убедимся, что $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathrm{Id}$. Пусть функция $f(\cdot) \in L_2(\Sigma)$ произвольна, $g = \tilde{\mathbf{A}} f = f + C^-\big(f\tilde{P}^+\big)(P^+ - P^-)$.

Пользуясь свойством

$$\int\limits_{\Sigma} d\zeta \left(C^{\pm} f_1\right)(\zeta) f_2(\zeta) = -\int\limits_{\Sigma} d\zeta f_1(\zeta)\left(C^{\mp} f_2\right)(\zeta),$$

где $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L_2(\Sigma)$ произвольны, запишем для произвольного фиксированного $\rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$

$$Cg(\rho) = Cf(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho}[C^-(f\tilde{P}^+)](\zeta)(P^+(\zeta) - P^-(\zeta)) =$$

$$= Cf(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\zeta (f\tilde{P}^+)(\zeta)[C^+ F_\rho](\zeta), \tag{13}$$

где

$$F_\rho(\xi) := \frac{1}{\rho - \xi}(P^+(\xi) - P^-(\xi)),\ \xi \in \Sigma.$$

Рассуждая, как при выводе (10), с учетом асимптотики $P(\xi) = I + o(1)$ при $\xi \to \infty$ приходим к соотношению

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} \frac{d\xi}{(\rho - \xi)(\xi - \zeta)}(P^+(\xi) - P^-(\xi)) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{d\xi}{(\rho - \xi)(\xi - \zeta)}(P^+(\xi) - P^-(\xi)) = \frac{1}{\rho - \zeta}P(\zeta) - \frac{1}{\rho - \zeta}P(\rho),\ \rho, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Sigma,$$

что эквивалентно представлению

$$\left(CF_\rho\right)(\zeta) = \frac{1}{\rho - \zeta}P(\zeta) - \frac{1}{\rho - \zeta}P(\rho),\ \rho, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Sigma.$$

Переходя к соответствующим предельным значениям, получим

$$\left(C^+ F_\rho\right)(\zeta) = \frac{1}{\rho - \zeta}P^+(\zeta) - \frac{1}{\rho - \zeta}P(\rho),\ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma,\ \zeta \in \Sigma.$$

Подставляя последнее представление в (13), приходим к равенствам

$$Cg(\rho) = \Big(C(f\tilde{P}^+)\Big)(\rho)P(\rho),\ \rho \in \mathbb{C} \setminus \Sigma,\ (C^{\pm} g)(\rho) = \Big(C^{\pm}(f\tilde{P}^+)\Big)(\rho)P^{\pm}(\rho),\ \rho \in \Sigma.$$

Отсюда, учитывая, что $P^- V = P^+$, получаем

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} f = \mathbf{A} g = C^+ g - (C^- g)V = \Big\{(C^+ - C^-)(f\tilde{P}^+)\Big\} P^+ = f.$$

Таким образом, доказано, что $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathrm{Id}$. Рассуждая аналогично, можно показать, что $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathrm{Id}$, и, таким образом, теорема доказана.

5. Формула восстановления. Предположим, что для каждого $x > 0$ из основного уравнения обратной задачи найдена функция $\hat{P}(x, \cdot)$. Завершающий шаг теперь состоит в восстановлении непосредственно искомого потенциала $q(\cdot)$. Покажем, что данный шаг можно свести к подсчету по некоторой явной формуле, такие формулы в теории обратных задач часто называют *формулами восстановления.* Ранее [12] формула восстановления была получена для случая гладких потенциалов с "хорошим" поведением при $x \to 0$, $x \to \infty$. В общем случае требуемый результат может быть получен с помощью предельного перехода.

Для дальнейшего удобно переписать основное уравнение обратной задачи в следующем виде:

$$\hat{P} = \left(C^{-}\hat{P}\right)\hat{V} - \hat{V}. \tag{14}$$

Пространство непрерывных функций $C[0, \infty)$ всюду далее рассматривается с топологией, порожденной системой полунорм $\|\cdot\|_{C[0,T]}$, $T \in (0, \infty)$.

Лемма 3. *Определим билинейный оператор*

$$\mathbf{\Phi}(u, \varphi)(x) := \frac{1}{2\pi i}\left[B, \int\limits_{\Sigma} d\rho \left(C^{-}\varphi(x, \cdot)\right)(\rho)\hat{V}(u, x, \rho)\right],$$

где (как и всюду далее) квадратные скобки обозначают коммутатор матриц,

$$\hat{V}(u, x, \rho) := \Psi_0(x, \rho)u(\rho)\Psi_0^{-1}(x, \rho),$$

Тогда

1) *оператор* $\mathbf{\Phi} : \mathcal{H}^{\Pi}(\Sigma) \times C([0, \infty), L_2(\Sigma)) \to C[0, \infty)$ *непрерывен;*

2) *для любых* $u \in \mathcal{H}^{\Pi}(\Sigma)$, $\varphi \in C([0, \infty), L_2(\Sigma))$ *при* $r \to \infty$ *имеем* $\mathbf{\Phi}_r(u, \varphi) \to \mathbf{\Phi}(u, \varphi)$ *в* $C[0, \infty)$, *где*

$$\mathbf{\Phi}_r(u, \varphi)(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{-}(|\rho| - r)\left[B, \left(C^{-}\varphi(x, \cdot)\right)(\rho)\hat{V}(u, x, \rho)\right].$$

Здесь и далее $\theta^{-}(\cdot)$ — *характеристическая функция луча* $(-\infty, 0]$, $\theta^{+}(\xi) := 1 - \theta^{-}(\xi)$.

Доказательство следует непосредственно из леммы 2.

Обозначим через $L_{2,\mathrm{loc}}(0, \infty]$ пространство функций, принадлежащих $L_2(\delta, \infty)$ для любого $\delta > 0$, с топологией, определяемой системой полунорм $\|\cdot\|_{\delta} = \|\cdot\|_{L_2(\delta,\infty)}$.

Пусть $E(\cdot, \rho)$ — своя для каждого из секторов $\mathcal{S}_\nu$ фундаментальная матрица простейшей системы (1) с $q = 0$, такая, что $E(x, \rho) = e(\rho x)$, $e(z) = (\mathfrak{f} + O(1/z))\exp(zR)$, $|z| \geqslant 1$, $z \in \overline{\mathcal{S}}_\nu$ (см. [10, 12]).

Лемма 4. *Определим семейство линейных операторов:*

$$\mathbf{E}_r f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{+}(|\rho|x - 1)\theta^{-}(|\rho| - r)\left[B, E(x, \rho)f(\rho)E^{-1}(x, \rho)\right], \ r > 0.$$

Тогда

1) $\mathbf{E}_r \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^{+}(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0, \infty]\right)$ *для каждого* $r > 0$*;*

2) *существует сильный предел* $\mathbf{E} = s - \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{E}_r \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^{+}(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0, \infty]\right)$.

Доказательство. Представим оператор в виде суммы:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r^{(0)} + \mathbf{E}_r^{(1)} + \mathbf{E}_r^{(2)},$$

где

$$\mathbf{E}_r^{(0)} f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{-}(|\rho| - r)\left[B, \mathfrak{f}(\rho)\exp(\rho x R)f(\rho)\exp(-\rho x R)\mathfrak{f}^{-1}(\rho)\right],$$

$$\mathbf{E}_r^{(1)} f(x) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{-}(|\rho|x - 1)\theta^{-}(|\rho| - r)\left[B, \mathfrak{f}(\rho)\exp(\rho x R)f(\rho)\exp(-\rho x R)\mathfrak{f}^{-1}(\rho)\right].$$

С учетом свойств $E(x,\rho)$ оператор $\mathbf{E}_r^{(2)}$ можно записать следующим образом:

$$\mathbf{E}_r^{(2)} f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^+(|\rho|x-1)\theta^-(|\rho|-r)(\rho x)^{-1}\mathbf{M}(x,\rho)\left(\exp(\rho x R) f(\rho)\exp(-\rho x R)\right), \tag{15}$$

где при каждых фиксированных значениях x,ρ оператор $\mathbf{M}(x,\rho)$ есть некоторый линейный оператор в пространстве $(n\times n)$-матриц, причем операторно-значная функция $\|\mathbf{M}(x,\rho)\|$ равномерно ограничена при $|\rho x|>1$. Из П-верхнетреугольности $f(\rho)$ следует, что $\mathrm{Re}(\rho(R_j-R_k))\leqslant 0$ для всех ненулевых элементов $f_{jk}(\rho)$, откуда заключаем, что

$$\|\left(\exp(\rho x R) f(\rho)\exp(-\rho x R)\right)\| \leqslant \|f(\rho)\|. \tag{16}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\|\mathbf{E}_r^{(2)} f(x)\| \leqslant M \int\limits_{\Sigma} |d\rho|\, \theta^+(|\rho|x-1)\theta^-(|\rho|-r)|\rho x|^{-1}\|f(\rho)\|,$$

из которого вытекает оценка

$$\|\mathbf{E}_r^{(2)} f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \leqslant M \int\limits_{\Sigma} |d\rho||\rho|^{-1}\|f(\rho)\| \left\{ \int\limits_{\delta}^{\infty} \theta^+(|\rho|x-1)x^{-2}\,dx \right\}^{1/2} =$$

$$= M\int\limits_{\Sigma} \theta^-(|\rho\delta|-1)|\rho|^{-1/2}\|f(\rho)\|\,|d\rho| + M\int\limits_{\Sigma} \theta^+(|\rho\delta|-1)|\rho|^{-1}\|f(\rho)\|\,|d\rho| \leqslant M(\delta)\|f\|_{\mathcal{H}^+(\Sigma)}.$$

Рассуждая аналогично, для оператора

$$\mathbf{E}^{(2)} f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^+(|\rho|x-1)(\rho x)^{-1}\mathbf{M}(x,\rho)\left(\exp(\rho x R) f(\rho)\exp(-\rho x R)\right),$$

где оператор $\mathbf{M}(x,\rho)$ тот же, что и в (15), получаем оценку

$$\|\mathbf{E}^{(2)} f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \leqslant M(\delta)\|f\|_{\mathcal{H}_0^+(\Sigma)},$$

из которой следует, что $\mathbf{E}^{(2)}\in\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^+(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty]\right)$. Более того, имеем

$$\|\mathbf{E}^{(2)} f(x) - \mathbf{E}_r^{(2)} f(x)\| \leqslant M \int\limits_{\Sigma} |d\rho|\, \theta^+(|\rho|x-1)\theta^+(|\rho|-r)|\rho x|^{-1}\|f(\rho)\|.$$

В силу последнего неравенства для любой фиксированной $\delta>0$ при $x>\delta$ и достаточно больших $r>0$

$$\|\mathbf{E}^{(2)} f(x) - \mathbf{E}_r^{(2)} f(x)\| \leqslant M x^{-1}\|f\|_{L_2(\Sigma^+(r))}$$

и, следовательно,

$$\|\mathbf{E}^{(2)} f(\cdot) - \mathbf{E}_r^{(2)} f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \leqslant M\|x^{-1}\|_{L_2(\delta,\infty)}\|f\|_{L_2(\Sigma^+(r))},$$

что означает $\mathbf{E}^{(2)} = s-\lim\limits_{r\to\infty}\mathbf{E}_r^{(2)}$ в $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^+(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty]\right)$. Таким образом, полностью доказаны утверждения пп. 1, 2 для операторов $\mathbf{E}_r^{(2)}$.

Рассмотрим операторы $\mathbf{E}_r^{(1)}$. Используя оценку (16), получаем

$$\|\mathbf{E}_r^{(1)} f(x)\| \leqslant M \int\limits_{\Sigma} |d\rho|\, \theta^-(|\rho x|-1)\theta^-(|\rho|-r)\|f(\rho)\| \leqslant M x^{-1}\|f\|_{\mathcal{H}_0^+(\Sigma)}.$$

Аналогичная оценка, очевидно, имеет место и для оператора

$$\mathbf{E}^{(1)}f(x) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{-}(|\rho|x-1)\left[B, \mathfrak{f}(\rho)\exp(\rho x R) f(\rho)\exp(-\rho x R)\mathfrak{f}^{-1}(\rho)\right].$$

Далее, для произвольной фиксированной $\delta > 0$ при $x > \delta$, $r > \delta^{-1}$ имеем $\mathbf{E}^{(1)}f(x) = \mathbf{E}_r^{(1)}f(x)$. Таким образом, установлено, что $\mathbf{E}^{(1)} = s - \lim\limits_{r\to\infty}\mathbf{E}_r^{(1)}$ в $\mathcal{L}\left(\mathcal{H}_0^{+}(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty]\right)$. Тем самым полностью доказаны утверждения пп. 1, 2 для операторов $\mathbf{E}_r^{(1)}$. Наконец, записав оператор $\mathbf{E}_r^{(0)}$ в виде

$$\mathbf{E}_r^{(0)} = \sum_{\nu=1}^{N}\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)},$$

$$\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma_\nu} d\rho\, \theta^{-}(|\rho|-r)\left[B, \mathfrak{f}(\rho)\exp(\rho x R) f(\rho)\exp(-\rho x R)\mathfrak{f}^{-1}(\rho)\right],$$

заметим, что матрицы-функции $\mathfrak{f}(\rho)$ постоянны на каждом из лучей Σ_ν, и, следовательно, справедливы представления

$$\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\mathfrak{f}\int\limits_{\Sigma_\nu} d\rho\, \theta^{-}(|\rho|-r)\exp(\rho x R)\left[R, f(\rho)\right]\exp(-\rho x R)\mathfrak{f}^{-1},$$

или в покомпонентной записи

$$\left(\mathfrak{f}^{-1}\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)}f(x)\mathfrak{f}\right)_{jk} := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma_\nu} d\rho\, \theta^{-}(|\rho|-r)\exp(\rho x(R_j-R_k))(R_j-R_k)f_{jk}(\rho).$$

В силу П-верхнетреугольности матрицы $f(\rho)$ для всех таких j,k, для которых функция $(R_j - R_k)f_{jk}(\rho)$ не обращается тождественно в нуль, справедливо $\mathrm{Re}\rho(R_j-R_k) \leqslant 0$, $\rho\in\Sigma_\nu$. Требуемые утверждения для операторов $\mathbf{E}_{\nu,r}^{(0)}$ теперь следуют из классических результатов теории преобразования Фурье [13].

Лемма 5. *Определим семейство линейных операторов:*

$$\mathbf{F}_r f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{-}(|\rho|-r)\left[B, \Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\right],\ r>0.$$

Тогда

1) $\mathbf{F}_r \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^{\Pi}(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty]\right)$ *для каждого* $r>0$;

2) *существует сильный предел*

$$\mathbf{F} = s - \lim_{r\to\infty}\mathbf{F}_r \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^{\Pi}(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty]\right).$$

Доказательство. Представим оператор в виде $\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_r^{(0)} + \mathbf{F}_r^{(1)}$, где

$$\mathbf{F}_r^{(0)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{-}(|\rho|-r)\theta^{-}(|\rho x|-1)\left[B, \Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\right],$$

$$\mathbf{F}_r^{(1)}f(x) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Sigma} d\rho\, \theta^{-}(|\rho|-r)\theta^{+}(|\rho x|-1)\left[B, \Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\right].$$

Поскольку из $f(\cdot)\in\mathcal{H}^{\Pi}(\Sigma)$ следует оценка

$$\|\Psi_0(x,\rho)f(\rho)\Psi_0^{-1}(x,\rho)\| \leqslant M\|f(\rho)\|,$$

справедливы неравенства

$$\|\mathbf{F}_r^{(0)} f(x)\| \leqslant M \int_\Sigma |d\rho| \|f(\rho)\| \theta^-(|\rho x| - 1) \leqslant M x^{-1} \|f\|_{\mathcal{H}^\Pi(\Sigma)},$$

$$\|\mathbf{F}^{(0)} f(x)\| \leqslant M x^{-1} \|f\|_{\mathcal{H}^\Pi(\Sigma)},$$

$$\mathbf{F}^{(0)} f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Sigma d\rho\, \theta^-(|\rho x| - 1) \left[B, \Psi_0(x,\rho) f(\rho) \Psi_0^{-1}(x,\rho)\right],$$

откуда получаем

$$\|\mathbf{F}_r^{(0)} f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \leqslant M\delta^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{H}^\Pi(\Sigma)}, \; \|\mathbf{F}^{(0)} f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \leqslant M\delta^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{H}^\Pi(\Sigma)}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{F}_r^{(0)} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^\Pi(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty]\right), \; \mathbf{F}^{(0)} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^\Pi(\Sigma), L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty]\right).$$

Более того, аналогичное рассмотрение приводит к неравенству

$$\|(\mathbf{F}^{(0)} - \mathbf{F}_r^{(0)}) f(\cdot)\|_{L_2(\delta,\infty)} \leqslant M\delta^{-1/2} \sup_{\rho\in\Sigma, |\rho|>r} \|f(\rho)\|.$$

Поскольку из $f(\cdot) \in \mathcal{H}^\Pi(\Sigma)$ следует, в частности, что $\lim\limits_{\rho\to\infty} f(\rho) = 0$, из полученного неравенства имеем $\mathbf{F}_r^{(0)} f \to \mathbf{F}^{(0)} f$ при $r \to \infty$ для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}^\Pi(\Sigma)$. Таким образом, справедливость утверждений леммы для операторов $\mathbf{F}_r^{(0)}$ доказана. Далее, воспользовавшись тем, что $\Psi_0(x,\rho) = E(x,\rho)\gamma(\rho)$, где невырожденная верхнетреугольная матрица $\gamma(\rho)$ постоянна на каждом из лучей Σ_ν, запишем

$$\mathbf{F}_r^{(1)} f = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_r^{(1)} f_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{E}_r g_\nu = \mathbf{E}_r g.$$

Здесь

$$f_\nu(\rho) := \begin{cases} f(\rho), \rho \in \Sigma_\nu; \\ 0, \rho \in \Sigma \setminus \Sigma_\nu, \end{cases} \; g_\nu(\rho) := \gamma_\nu f_\nu(\rho) \gamma_\nu^{-1}, \; \gamma_\nu := \gamma(\rho)\big|_{\rho\in\Sigma_\nu}, \; g(\rho) := g_\nu(\rho), \rho \in \Sigma_\nu.$$

Ясно, что для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{H}^\Pi(\Sigma)$ имеем $g(\cdot) \in \mathcal{H}^+(\Sigma)$ и соответствие $\mathcal{H}^\Pi(\Sigma) \ni f(\cdot) \to g(\cdot) \in \mathcal{H}^+(\Sigma)$ есть линейный непрерывный оператор. Справедливость утверждений леммы для операторов $\mathbf{F}_r^{(1)}$ вытекает, таким образом, из леммы 4.

Теорема 4. *Пусть $v(q,\cdot)$ — данные рассеяния для некоторого $q(\cdot) \in G_0^p$, $\hat v(\rho) = v(q,\rho) v_0^{-1}(\rho) - I$, $\hat P(x,\rho) = P^+(q,x,\rho) - P^-(q,x,\rho)$. Тогда справедлива формула восстановления*

$$q = \mathbf{\Phi}(\hat v, \hat P) + \mathbf{F}\hat v.$$

Доказательство. 1) Пусть потенциал $q \in G_0^p$ удовлетворяет условиям теоремы 1 работы [12] (например, является гладким, финитным, с носителем, не содержащим точки 0). Тогда в силу теоремы 1 [12] с учетом (14) имеем

$$q(x) = \lim_{r\to\infty} q_r(x) \tag{17}$$

при каждом $x \in (0,\infty)$, где

$$q_r(x) = (\mathbf{\Phi}_r(\hat v, \hat P))(x) + (\mathbf{F}_r \hat v)(x).$$

Согласно леммам 3, 5 существуют пределы $\mathbf{\Phi}(\hat v, \hat P) = \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{\Phi}_r(\hat v, \hat P)$, $\mathbf{F} = s - \lim\limits_{r\to\infty} \mathbf{F}_r$. Обозначим $q_*(x) = (\mathbf{\Phi}(\hat v, \hat P))(x) + (\mathbf{F}\hat v)(x)$. Тогда $q_r \to q_*$ при $r \to \infty$ в $L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty)$, но отсюда с учетом (17) вытекает, что $q(x) = q_*(x)$ п.в. на $(0,\infty)$. Таким образом, в рассматриваемом случае формула восстановления доказана.

2) Для произвольного потенциала $q(\cdot) \in G_0^p$ рассмотрим сходящуюся к q по норме $\mathcal{X}_p$ последовательность потенциалов $\{q_m(\cdot)\}_{m\geqslant 1}$, таких, что для каждого из $q_m(\cdot)$ выполнены условия теоремы 1 работы [12]. Из теоремы 1 [11] следует, что множество G_0^p открыто в $\mathcal{X}_p$, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что все $q_m(\cdot) \in G_0^p$. Тогда по доказанному в п. 1 имеем

$$q_m = \mathbf{\Phi}(\hat{v}_m, \hat{P}_m) + \mathbf{F}\hat{v}_m, \tag{18}$$

где $\hat{P}_m(x,\rho) = P^+(q_m,x,\rho) - P^-(q_m,x,\rho)$, $\hat{v}_m(\rho) = v(q_m,\rho)v_0^{-1}(\rho) - I$.

Ввиду теоремы 2 при $m \to \infty$ имеем $\hat{v}_m(\cdot) \to \hat{v}(\cdot)$ в $\mathcal{H}^{\Pi}(\Sigma)$. По лемме 5 это влечет $\mathbf{F}\hat{v}_m \to \mathbf{F}\hat{v}$ в $L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty]$. Далее, из теоремы 4 [11] следует, что $\hat{P}_m(\cdot,\cdot) \to \hat{P}(\cdot,\cdot)$ при $m \to \infty$ в $C\left([0,\infty), L_2(\Sigma)\right)$. В силу леммы 3 отсюда вытекает $\mathbf{\Phi}(\hat{v}_m, \hat{P}_m) \to \mathbf{\Phi}(\hat{v}, \hat{P})$ в $C[0,\infty)$.

Переходя в (18) к пределу при $m \to \infty$, получаем требуемую формулу восстановления (понимаемую в общем случае как равенство двух элементов $L_{2,\mathrm{loc}}(0,\infty)$).

Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 21–71–10001 (https://rscf.ru /project /21-71-10001/).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Reconstruction of radial Dirac operators // J. Math. Phys. 2007. **48** (DOI:10.1063/1.2709847).
2. *Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Reconstruction of radial Dirac and Schrödinger operators from two spectra // J. Math. Anal. and Appl. 2008. **339**. 45–57.
3. *Serier F.* Inverse spectral problem for singular Ablowitz-Kaup-Newell-Segur operators on [0; 1] // Inverse Problems. 2006. **22**. 1457–1484.
4. *Gorbunov O.B., Shieh C.-T., Yurko V.A.* Dirac system with a singularity in an interior point // Appl. Anal. 2015 (DOI:10.1080/00036811.2015.1091069).
5. *Yurko V.A.* On higher-order differential operators with a singular point // Inverse Problems. 1993. **9**. 495–502.
6. *Юрко В.А.* О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // Матем. сб. 1995. **186**, № 6. 133–160.
7. *Юрко В.А.* О дифференциальных операторах высших порядков с особенностью внутри интервала // Матем. заметки. 2002. **71**, № 1. 152–156.
8. *Fedoseev A.E.* Inverse problems for differential equations on the half-line having a singularity in an interior point // Tamkang J. Math. 2011. **42**. 343–354.
9. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line. Providence, RI. Amer. Math. Soc., 1988.
10. *Ignatyev M.* Spectral analysis for differential systems with a singularity // Results Math. 2017. **71**. 1531–1555.
11. *Ignatiev M.* On Weyl-type solutions of differential systems with a singularity. The case of discontinuous potential // Math. Notes. 2020. **108**, N 6. 814–826.
12. *Ignatiev M.Yu.* Reconstruction formula for differential systems with a singularity (*Игнатьев М.Ю.* Формула восстановления для систем дифференциальных уравнений с особенностью) // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Механ. Информ. 2021. **21**, вып. 3. 282–293.
13. *Седлецкий А.М.* Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации. М.: Физматлит, 2005.

Поступила в редакцию
21.12.2021