Автор приносит благодарность В. В. Галатенко за постановку задачи и ценные консультации, а также Т. П. Лукашенко за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
2. *DeVore R.A., Temlyakov V.N.* Some remarks on greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. **5**, N 1. 173–187.
3. *Лукашенко Т.П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2001. № 1. 6–10.
4. *Borodin P.A., Kopecka E.* Weak limits of consecutive projections and of greedy steps // arXiv:2112.05094 [math.FA].
5. *Temlyakov V.* Greedy Approximation (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

Поступила в редакцию
18.03.2022

УДК 517.5

УТОЧНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ

М. К. Потапов[1], Б. В. Симонов[2]

В работе получены уточнения некоторых соотношений между модулями гладкости функций одного переменного. Показана их точность.

Ключевые слова: неравенство, пространство, дробный модуль гладкости.

Improvements of some interrelations between mixed fractional moduli of smoothness of functions of one variable are obtained. Their sharpness is proved.

Key words: inequality, space, fractional moduli of smoothness.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-2

1. Обозначения и формулировка основных результатов. Введем обозначения:

$L_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$ — пространство измеримых 2π-периодических функций $f(x)$ одного переменного, для которых $\|f\|_p < \infty$, где $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, если $1 \leqslant p < \infty$, и $\|f\|_p = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \mathrm{vrai}\, |f(x)|$, если $p = \infty$;

L_p^0 — множество функций $f \in L_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$, таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0$;

$\sigma(f)$ — ряд Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$\sigma(f) \equiv \sigma(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x),$$

где через a_k и b_k обозначены коэффициенты Фурье функции f :

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,\ k \in \mathbb{N},\ b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx,\ k \in \mathbb{N};$

---

[0] *Потапов Михаил Константинович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ.

Potapov Mikhail Konstantinovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

[2] *Симонов Борис Витальевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент Волгоград. гос. техн. ун-та, e-mail: simonov-b2002@yandex.ru.

Simonov Boris Vital'evich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Volgograd State Technical University.

$f^{(\rho)}(x)$ — производная в смысле Вейля порядка ρ ($\rho > 0$) функции $f(x)$ (см. [1, т. 2, с. 201]);

$T_n(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \big(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x\big)$ — тригонометрический полином порядка не выше n;

$E_n(f)_p = \inf\limits_{T_n(x)} ||f(x) - T_n(x)||_p$ — наилучшее приближение функции $f(x) \in L_p$ при помощи тригонометрических полиномов порядка не выше n в метрике L_p;

$S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$;

$V_0(f) = S_0(f), V_n(f) = \frac{S_n(f)+\ldots+S_{2n-1}(f)}{n} (n = 1, 2, \ldots)$ — сумма Валле-Пуссена функции $f(x)$;

$\omega_\alpha(f, t)_p$ — модуль гладкости функции $f(x) \in L_p$ порядка $\alpha(\alpha > 0)$ в метрике L_p, т.е.

$$\omega_\alpha(f,t)_p = \sup_{|h|\leqslant t} \Big\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \tbinom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu)h) \Big\|_p,$$

где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \geqslant 2$;

$[a]$ — целая часть числа a.

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta)$ и $G(f, \delta)$ будем писать $F(f, \delta) \ll G(f, \delta)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f и δ, такая, что $F(f, \delta) \leqslant CG(f, \delta)$. Если одновременно $F(f, \delta) \ll G(f, \delta)$ и $G(f, \delta) \ll F(f, \delta)$, то будем писать $F(f, \delta) \asymp G(f, \delta)$.

Известны [2–4] следующие соотношения между модулями гладкости. Пусть $f \in L^0_p, \alpha > 0, \delta \in (0, 1)$. Тогда

а) при $1 < p < q < \infty$

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \Big(\int_0^\delta \big(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,t)_p\big)^q \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}};$$

б) при $1 = p < q = \infty$

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \int_0^\delta t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,t)_p \frac{dt}{t};$$

в) при $1 = p < q < \infty$

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \Big(\int_0^\delta \big(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,t)_p\big)^q \log_2 \frac{2}{t} \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}};$$

г) при $1 < p < q = \infty$

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \int_0^\delta t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f,t)_p (\log_2 \frac{2}{t})^{1-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t}.$$

В работе [5] утверждения *в* и *г* были уточнены при помощи интерполяционного метода.

В настоящей работе приведено доказательство этих уточнений другим методом, показана их точность, доказано, что они действительно уточняют утверждения *в* и *г*. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^0_p$, $1 = p < q < \infty$, $\alpha > 0$, $\delta \in (0, 1)$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Справедливо неравенство*

$$\omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \Big(\int_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}} \big(t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\big)^q \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{1}$$

В соотношении (1), *вообще говоря, нельзя заменить знак* $\ll$ *на знак* $\asymp$.

2. *Неравенство* (1) *точно в том смысле, что для любого* $\alpha_1 > \alpha$ *существует функция* $f_1 \in L_p^0$, *такая, что*

$$A_1(f_1,\delta) = \frac{\omega_\alpha(f_1,\delta)_q}{\left(\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}} \left[t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}}(f_1,t)_1\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}} \to \infty \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

3. *Неравенство* (1) *точно также в следующем смысле:*

для любой функции $\zeta(t)$, *положительной, слабо колеблющейся на* $(0,1)$ *и такой, что* $\zeta(t) = \bar{\bar{o}}\big(\log_2\frac{2}{t}\big)$ *при* $t \to 0$, *существует функция* $f_2(x)$, *такая, что*

$$A_2(f_2,\delta) = \frac{\omega_\alpha(f_2,\delta)_q}{\left(\int\limits_0^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha q}}} \left[t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_2,t)_1\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}} \to \infty \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

4, *а. Справедливо неравенство*

$$\left(\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}} \big(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\big)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\int\limits_0^{\delta} \big(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\big)^q \log_2\frac{2}{t}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2}$$

при этом в соотношении (2), *вообще говоря, нельзя заменить знак* $\ll$ *на знак* $\asymp$.

4, *б. Из неравенства* (1) *следует утверждение в.*

Замечание 1. Подчеркнем, что неравенство (1) и утверждение 4, б теоремы 1 доказаны ранее в работе [5].

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_p^0$, $1 < p < q = \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > 0$, $\delta \in (0,1)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Имеет место неравенство*

$$\omega_\alpha(f,\delta)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t}. \tag{3}$$

В соотношении (3), *вообще говоря, нельзя заменить знак* $\ll$ *на знак* $\asymp$.

2. *Неравенство* (3) *точно в том смысле, что для любого* $\alpha_1 > \alpha$ *существует функция* $f_3 \in L_p^0$, *такая, что*

$$A_3(f_3,\delta) = \frac{\omega_\alpha(f_3,\delta)_\infty}{\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p}}(f_3,t)_p\frac{dt}{t}} \to \infty \text{ при } \delta \to 0.$$

3. *Неравенство* (3) *точно также в следующем смысле:*

для любой функции $\zeta(t)$, *положительной, слабо колеблющейся на* $(0,1)$ *и такой, что* $\zeta(t) = \bar{\bar{o}}\big(\log_2\frac{2}{t}\big)^{\frac{1}{p'}}$ *при* $t \to 0$, *существует функция* $f_4(x)$, *такая, что*

$$A_4(f_4,\delta) = \frac{\omega_\alpha(f_4,\delta)_\infty}{\int\limits_0^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha}}} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f_4,t)_p\frac{dt}{t}} \to \infty \text{ при } \delta \to 0.$$

4, *а. Справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t} \ll \int\limits_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\Big(\log_2\frac{2}{t}\Big)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt}{t}, \tag{4}$$

при этом в соотношении (4), *вообще говоря, нельзя заменить знак* $\ll$ *на знак* $\asymp$.

4, *б. Из неравенства* (3) *следует утверждение г.*

Замечание 2. Подчеркнем, что неравенство (3) и утверждение 4, б теоремы 2 доказаны ранее в работе [5].

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 [6, 7]. *Пусть* $f \in L_p^0, 1 \leqslant p \leqslant \infty, \alpha > 0, n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\omega_\alpha\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_p \asymp n^{-\alpha}\|V_n^{(\alpha)}(f)\|_p + \|f - V_n(f)\|_p.$$

Лемма 2 [8]. *Пусть* $f \in L_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тогда*

$$\text{(а) } \|V_n(f)\|_p \ll \|f\|_p;$$

$$\text{(б) } \|f - V_n(f)\|_p \ll E_n(f)_p.$$

Лемма 3 [9] (неравенство Юнга). *Пусть* p, q, r *— вещественные числа, удовлетворяющие условиям*

$$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty,\ 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Пусть $f(x)$ *и* $K(x)$ *— функции одной переменной, заданные на* E^1, *причем* $f \in L_p(E^1)$, $K \in L_r(E^1)$,

$$J(x) = \int\limits_{E^1} f(y)K(y-x)dy.$$

Тогда

$$\|J\|_q \leqslant \|K\|_r\|f\|_p.$$

Лемма 4 [8] (неравенство Гёльдера). *Пусть* $p \in [1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *где* $p' = \infty$, *если* $p = 1$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \bigg(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\bigg)^{\frac{1}{p}}\bigg(\int\limits_a^b |g(x)|^{p'} dx\bigg)^{\frac{1}{p'}}.$$

Лемма 5 [8]. (а). *Пусть* $f \in L_p^0,\ 1 \leqslant p < q \leqslant \infty,\ n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$E_{n-1}(f)_q \ll E_{n-1}(f)_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} + \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} E_\nu(f)_p.$$

(б). *Пусть* $f \in L_p^0,\ 1 \leqslant p < q < \infty,\ n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$E_{n-1}(f)_q \ll E_{n-1}(f)_p n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} + \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})q-1} E_\nu^q(f)_p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Будем писать $f \in M_p$, если $f \in L_p^0$; $\sigma(f) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \psi(kx)$, где $\psi(x) = \cos x$ или $\psi(x) = \sin x$ и коэффициенты a_k удовлетворяют условиям $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $a_k \geqslant a_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что из этих условий следует, что $a_k \geqslant 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 6 [8]. *Пусть* $f \in M_p, f^{(r)} \in L_p^0, 1 < p < \infty, r \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\|f^{(r)}\|_p \asymp \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p k^{(r+1)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 7 [8]. *Пусть* $f \in L_p^0, 1 < p < \infty$. *Пусть* $\widetilde{f}(x)$ *— функция, сопряженная с функцией* $f(x)$. *Тогда* $\sigma(\widetilde{f}) \equiv \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x)$, $\widetilde{f} \in L_p^0$ *и*

$$\|\widetilde{f}\|_p \ll \|f\|_p.$$

Лемма 8 [8]. *Пусть* $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ *— тригонометрический полином порядка не выше* n $(n \in \mathbb{N}), 1 \leqslant p \leqslant \infty, \alpha > 0$. *Тогда*

$$\|T_n^{(\alpha)}\|_p \ll n^\alpha \|T_n\|_p.$$

Лемма 9. *Пусть* $\alpha > 0, 1 \leqslant r < \infty, \beta > 0$. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\alpha}} \cos 2^\nu x.$$

Тогда

$$\omega_{\alpha+\beta}(f, \delta)_r \asymp \delta^\alpha.$$

Доказательство. Для каждого $\delta \in (0,1)$ существует целое неотрицательное число n, такое, что $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \delta < \frac{1}{2^n}$. Тогда имеем $\omega_{\alpha+\beta}(f,\delta)_r \asymp \omega_{\alpha+\beta}\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_r$.

Так как $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\alpha}} \cos 2^\nu x \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\alpha}} < \infty$, то ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\alpha}} \cos 2^\nu x$ сходится равномерно и, применяя лемму 1.2.21 из [8], получаем, что этот ряд есть $\sigma(f)$. В силу леммы 1 будем иметь

$$\omega_{\alpha+\beta}(f,\delta)_r \asymp \frac{1}{2^{n(\alpha+\beta)}} \|V_{2^n}^{(\alpha+\beta)}(f)\|_r + \|f - V_{2^n}(f)\|_r.$$

Функции $V_{2^n}^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}(f)$ и $f - V_{2^n}(f)$ удовлетворяют условиям леммы 1.2.22 из [8]. Используя лемму 1.2.22 из [8], получаем

$$\omega_{\alpha+\beta}(f,\delta)_r \asymp \frac{1}{2^{n(\alpha+\beta)}} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{2^{2(\alpha+\beta)\nu}}{2^{2\alpha\nu}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\alpha\nu}} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp \frac{1}{2^{n\alpha}} \asymp \delta^\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 10. *Пусть* $\alpha > 0, 1 < p < \infty, \beta > 0$. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha+1}}, \textit{если } \alpha \neq 2l+1,\ l \in \mathbb{N},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha+1}}, \textit{если } \alpha = 2l+1,\ l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,\delta)_p \ll \delta^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\log_2 \frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{p}},\ \omega_\alpha(f,\delta)_\infty \gg \delta^\alpha \log_2 \frac{2}{\delta}.$$

Доказательство. Применяя теорему 3.4.2 из [8], заключаем, что

$$\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \asymp \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{p}}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^{(\alpha+\frac{1}{p}+1)p-2}}{k^{(\alpha+1)p}} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^{p-2}}{k^{(\alpha+1)p}} \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{p}}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha p+2}} \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{p}}} \left(\log_2(n+1)\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{p}}} \ll n^{-(\alpha+\frac{1}{p})} \left(\log_2(n+1)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для любого $\delta \in (0,1)$ существует натуральное число n, такое, что $\frac{1}{n+1} \leqslant \delta < \frac{1}{n}$, поэтому

$$\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,\delta)_p \ll \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \ll n^{-(\alpha+\frac{1}{p})} \left(\log_2(n+1)\right)^{\frac{1}{p}} \ll \delta^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\log_2 \frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как

$$\sigma(f^{(\alpha)}(x)) = \cos\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(kx)}{k} - \sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\psi}(kx)}{k},$$

где $\psi(x) = \cos x$ и $\widetilde{\psi}(x) = \sin x$ при $\alpha \neq 2l+1$ и $\psi(x) = \sin x$ и $\widetilde{\psi}(x) = -\cos x$ при $\alpha = 2l+1$, то, применяя теорему 3.4.2 из [6], имеем

$$\omega_\alpha(f,\delta)_\infty \gg \omega_\alpha\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty \gg \frac{1}{n^\alpha}\|V_n^{(\alpha)}(f)\|_\infty \gg \frac{1}{n^\alpha}\|V_n(f^{(\alpha)})\|_\infty \gg \frac{1}{n^\alpha}|V_n(f^{(\alpha)},0)| \gg$$

$$\gg \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\lambda_k}{k} \gg \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \gg \frac{\log_2(n+1)}{n^\alpha} \gg \delta^\alpha \log_2\frac{2}{\delta}.$$

Лемма 10 доказана.

3. Доказательство пункта 1 теоремы 1. Для любого $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ существует натуральное число n, такое, что $\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \delta < \frac{1}{2^n}$. Тогда в силу свойства модуля гладкости имеем $J = \omega_\alpha(f,\delta)_q \ll \omega_\alpha\left(f, \frac{1}{2^{n+1}}\right)_q$. Применяя лемму 1, находим

$$J \ll 2^{-\alpha(n+1)}\|V_{2^{n+1}}^{(\alpha)}(f)\|_q + \|f - V_{2^{n+1}}(f)\|_q \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\alpha(n+1)}\|V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_q + 2^{-\alpha(n+1)}\|V_{2^{n+1}}^{(\alpha)}(f) - V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_q + \|f - V_{2^{n+1}}(f)\|_q.$$

Согласно лемме 8 будем иметь

$$J \ll 2^{-\alpha(n+1)}\|V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_q + 2^{-\alpha(n+1)}2^{(n+1)\alpha}\|V_{2^{n+1}}(f) - V_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}\|_q + \|f - V_{2^{n+1}}(f)\|_q \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\alpha(n+1)}\|V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_q + \|f - V_{2^{n+1}}(f)\|_q + \|f - V_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}\|_q + \|f - V_{2^{n+1}}(f)\|_q \ll$$

$$\ll 2^{-\alpha(n+1)}\|V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_q + \|f - V_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}\|_q = J_1 + J_2.$$

Используя леммы 2; 5, (б) и лемму 1, получаем

$$J_2 \ll E_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)_q \ll \left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right] E_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)_1 + \Bigg(\sum_{\nu=\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]+1}^{\infty} \nu^{(1-\frac{1}{q})q-1}E_\nu^q(f)_1\Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\int_0^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}} \left(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\int_0^{\delta\left(\log_2\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha q}}} \left(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теперь оценим J_1. Так как $f \in L_q^0$, то $V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f) = \sum\limits_{\nu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]-1} c_\nu(x)$, где $c_\nu(x) = \lambda_\nu A_\nu(f)$ и

$$\lambda_\nu = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leqslant \nu \leqslant \left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]; \\ 2 - \frac{\nu}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}, & \text{если } \left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right] + 1 \leqslant \nu \leqslant 2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right] - 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$(V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f))^{*(1-\frac{1}{q})} = \sum_{\nu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]-1} c_\nu(x)\nu^{1-\frac{1}{q}}.$$

Из определения дробной производной имеем

$$V^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f) = \cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}(V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f))^{*(1-\frac{1}{q})} - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\left(\widetilde{V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)}\right)^{*(1-\frac{1}{q})},$$

где $\widetilde{V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}}(f)$ есть функция, сопряженная с функцией $V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)$.

Можно проверить, что

$$\int_0^{2\pi} V^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f,t)\overline{K}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(x-t)dt = \cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}(\widetilde{V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}}(f)),$$

где

$$\overline{K}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(t) = \sum_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]-1} \mu^{-1+\frac{1}{q}}\cos\mu t.$$

Так как

$$V^{(\alpha)}_n(f) = \cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\Big(\cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)}\Big)+$$
$$+\sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\Big(\sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) + \cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)}\Big),$$

то, применяя лемму 7, будем иметь

$$\|V^{(\alpha)}_n(f)\|_q \ll \|\cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)}\|_q+$$

$$+\|\sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) + \cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)}\|_q \ll \|\cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n}(f)\|_q+$$
$$+\|\sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)} + \cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{\widetilde{V^{(\alpha)}_n}}(f)\|_q = \|\cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)}\|_q+$$
$$+\|\sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)} - \cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f)\|_q \ll \|\cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)}\|_q.$$

С другой стороны, вновь применяя лемму 7, получим

$$\|\cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)}\|_q \ll \|V^{(\alpha)}_n(f)\|_q + \|\widetilde{V^{(\alpha)}_n(f)}\|_q \ll \|V^{(\alpha)}_n\|_q.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\|V^{(\alpha)}_n(f)\|_q \asymp \|\cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_n(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V_n(f)}^{(\alpha)}(f)\|_q.$$

Используя неравенство Юнга (лемма 3), заключаем, что

$$\|V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_q \ll \|\cos\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f) - \sin\frac{(1-\frac{1}{q})\pi}{2}\widetilde{V}^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_q =$$

$$= \| \int_0^{2\pi} V^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f,t)\overline{K}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(x-t)dt\|_q \leqslant \|V^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_1 \cdot \|\overline{K}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}\|_q. \tag{5}$$

В силу леммы 6 будем иметь

$$\|K_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}\|_q \ll \left(\sum_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]-1} (\mu^{-1+\frac{1}{q}})^q \mu^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]-1} \mu^{-1} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\log_2 \left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]\right)^{\frac{1}{q}} \ll n^{\frac{1}{q}}.$$

Подставляя эти оценки в неравенство (5), получаем

$$J_1 \ll 2^{-\alpha(n+1)} n^{\frac{1}{q}} \|V^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_1.$$

Далее, учитывая лемму 1, находим

$$J_1 \ll 2^{-\alpha(n+1)} n^{\frac{1}{q}} \|V^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_1 \ll \|V^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}(f)\|_1 \left(\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}} t^{\alpha q} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]^{\alpha+1-\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}\Big(f, \frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}\Big)_1 \left(\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}} t^{\alpha q} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

На основании свойств дробного модуля гладкости заключаем, что

$$J_1 \ll \left(\int_0^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha q}}}\right]}} \left(t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \ll \left(\int_0^{\delta\left(\log_2\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha q}}} \left(t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя оценки для J_1 и J_2, получаем тем самым, что неравенство (1) доказано.

Рассмотрим функцию $f_1(x) = \sin x$. Как показано в § 4.1 (см. соотношение (4.1.8)) работы [8], $\omega_\alpha(f_1,\delta)_q \asymp \delta^\alpha, \omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_1,\delta)_1 \asymp \delta^{\alpha+1-\frac{1}{q}}$. Но тогда

$$\left(\int_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}} \left(t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_1,t)_1\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \left(\int_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}} \left(t^{-1+\frac{1}{q}} t^{\alpha+1-\frac{1}{q}}\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \asymp \delta^\alpha (\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, для функции $f_1(x)$ правая и левая части соотношения (1) имеют разные порядки как функции переменной δ, что и означает, что в соотношении (1), вообще говоря, нельзя знак $\ll$ заменить знаком $\asymp$.

4. Доказательство пункта 2 теоремы 1. Рассмотрим функцию $f_1(x) = \sin x$. Тогда

$$A_1(f_1,\delta) = \frac{\omega_\alpha(f_1,\delta)_q}{\left(\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}} \left[t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha_1+1-\frac{1}{q}}(f_1,t)_1\right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}} \asymp \frac{\delta^\alpha}{\delta^{\alpha_1}(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{\alpha_1}{\alpha q}}} \to \infty \text{ при } \delta \to 0.$$

Таким образом, для функции $f_1(x)$ в соотношении (1), вообще говоря, нельзя заменить α на $\alpha_1 > \alpha$.

5. Доказательство пункта 3 теоремы 1. Рассмотрим функцию $f_2(x)$, такую, что $f_2^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx$, где последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет условиям леммы 1.2.23 из [8] для $c_k = \left(\frac{\zeta(\frac{1}{k})}{\log_2(k+1)}\right)^{\frac{1}{2q}}$. Применяя лемму 1.2.19 из [8], получим $f_2^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}\in L_1$. На основании леммы 2.3.4 из [8] заключаем, что

$$\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_2,\delta)_1 \ll \delta^{\alpha+1-\frac{1}{q}}\|f_2^{(\alpha+1-\frac{1}{q})}\|_1.$$

Но тогда

$$\left(\int\limits_0^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha q}}}\left[t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_2,t)_1\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\ll$$

$$\ll\left(\int\limits_\delta^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha q}}} t^{\alpha q}\left[t^{-(\alpha+1-\frac{1}{q})}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_2,t)_1\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int\limits_0^{\delta}\left[t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_2,t)_1\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\ll$$

$$\ll\delta^{-(\alpha+1-\frac{1}{q})}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_2,\delta)_1\left(\int\limits_\delta^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha q}}} t^{\alpha q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int\limits_0^{\delta}\left[t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f_2,t)_1\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\ll$$

$$\ll\delta^{\alpha}\big(\zeta(\delta)\big)^{\frac{1}{q}}+\left(\int\limits_0^{\delta}\left[t^{\alpha}\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\ll\delta^{\alpha}\big(\zeta(\delta)\big)^{\frac{1}{q}}+\delta^{\alpha}\ll\delta^{\alpha}\big(\zeta(\delta)\big)^{\frac{1}{q}}.$$

В [8, с. 105] показано, что $\omega_\alpha(f_2,\delta)_q\gg\delta^{\alpha}\left(\log_2\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{\zeta(\delta)}{\log_2\frac{2}{\delta}}\right)^{\frac{1}{2q}}$. Но тогда

$$A_2(f_2,\delta)\gg\left(\frac{\log_2\frac{2}{\delta}}{\zeta(\delta)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{\zeta(\delta)}{\log_2\frac{2}{\delta}}\right)^{\frac{1}{2q}}=\left(\frac{\log_2\frac{2}{\delta}}{\zeta(\delta)}\right)^{\frac{1}{2q}}.$$

Откуда следует, что $A_2(f_2,\delta)\to\infty$ при $\delta\to 0$.

6. Доказательство пункта 4 теоремы 1.

6, а. Применяя свойства модуля гладкости, будем иметь

$$\left(\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}}\left(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^{\delta}\left(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q\frac{dt}{t}+\int\limits_\delta^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}}\left(t^{\alpha}t^{-(\alpha+1-\frac{1}{q})}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\ll$$

$$\ll\left(\int\limits_0^{\delta}\left(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q\frac{dt}{t}+\delta^{-q(\alpha+1-\frac{1}{q})}\omega^q_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,\delta)_1\int\limits_\delta^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}}t^{\alpha q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\ll$$

$$\ll\left(\int\limits_0^{\delta}\left(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\right)^q\frac{dt}{t}+\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,\delta)_1\delta^{-q(1-\frac{1}{q})}\log_2\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{q}}\ll$$

$$\ll \Big(\int\limits_0^\delta \big(t^{-1+\frac{1}{q}}\big(\log_2\frac{2}{t}\big)^{\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f,t)_1\big)^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, верно неравенство (2).

Пусть $\alpha > 1-\frac{1}{q}$. Рассмотрим функцию $g_1(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu\alpha}}\cos 2^\nu x$. Применяя лемму 9, получим $\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(g_1,\delta)_1\asymp\delta^\alpha$. Но тогда для левого выражения в (2) будем иметь

$$\Big(\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}}\big(t^{-1+\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(g_1,t)_1\big)^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\asymp\Big(\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha q}}}\big(t^{-1+\frac{1}{q}}t^\alpha\big)^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\asymp$$

$$\asymp\delta^{\alpha-1+\frac{1}{q}}(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{q}}\frac{1}{(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{q-1}{\alpha q^2}}}.$$

Для правого выражения в (2) получим

$$\Big(\int\limits_0^\delta\big(t^{-1+\frac{1}{q}}\big(\log_2\frac{2}{t}\big)^{\frac{1}{q}}\omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(g_1,t)_1\big)^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\asymp\Big(\int\limits_0^\delta\big(t^{-1+\frac{1}{q}}\big(\log_2\frac{2}{t}\big)^{\frac{1}{q}}t^\alpha\big)^q\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{q}}\asymp\delta^{\alpha-1+\frac{1}{q}}(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, для функции $g_1(x)$ при $\alpha>1-\frac{1}{q}$ правая и левая части соотношения (2) имеют разные порядки как функции переменной δ, что и означает, что в соотношении (2), вообще говоря, нельзя знак $\ll$ заменить на $\asymp$.

6, б. Применяя к неравенству (1) неравенство (2), получим утверждение *в*.

7. Доказательство пункта 1 теоремы 2. Для любого $\delta\in(0,\frac{1}{2})$ существует натуральное число n, такое, что $\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant\delta<\frac{1}{2^n}$. Тогда на основании свойств модуля гладкости заключаем, что $J=\omega_\alpha(f,\delta)_\infty\ll\omega_\alpha\big(f,\frac{1}{2^{n+1}}\big)_\infty$. Согласно лемме 1 и лемме 8 имеем

$$J\ll 2^{-\alpha(n+1)}\|V^{(\alpha)}_{2^{n+1}}(f)\|_\infty+\|f-V_{2^{n+1}}(f)\|_\infty\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\alpha(n+1)}\|V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_\infty+2^{-\alpha(n+1)}\|V^{(\alpha)}_{2^{n+1}}(f)-V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_\infty+\|f-V_{2^{n+1}}(f)\|_\infty\ll$$

$$\ll 2^{-\alpha(n+1)}\|V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_\infty+\|f-V_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}\|_\infty=J_1+J_2.$$

В силу лемм 2, 5 и 1

$$J_2\ll E_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)_\infty\ll\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]^{\frac{1}{p}}E_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)_p+\sum_{\nu=\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]+1}^{\infty}\nu^{\frac{1}{p}-1}E_\nu(f)_p\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}}t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t}\leqslant\int\limits_0^{\frac{2}{\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}}}t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t}\ll\int\limits_0^{\delta\left(\log_2\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha p'}}}t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t}.$$

Теперь оценим J_1. Так как $f\in L^0_p$, то $V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)=\sum\limits_{\nu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]-1}c_\nu(x)$, где $c_\nu(x)=\lambda_\nu A_\nu(f)$ и

$$\lambda_\nu=\begin{cases}1, & \text{если } 1\leqslant\nu\leqslant\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right];\\ 2-\frac{\nu}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}, & \text{если } \left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]+1\leqslant\nu\leqslant 2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]-1.\end{cases}$$

Обозначим

$$(V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(f) = \sum_{\nu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]-1} c_\nu(x)\nu^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда, используя определение дробной производной, получим

$$(V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(f) = (V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]})^{(\frac{1}{p})}(f)\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\right) + (\widetilde{V_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]})^{(\alpha)}}^{(\frac{1}{p})}(f)\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\right), \tag{6}$$

где $\widetilde{V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}}(f)$ есть функция, сопряженная с функцей $V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)$.

Легко проверить, что

$$V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f) = \int_0^{2\pi}(V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(f,t)\overline{K}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(x-t)dt,$$

где $\overline{K}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(t) = \sum_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]-1} \mu^{-\frac{1}{p}}\cos\mu t$. Применение неравенства Гёльдера (лемма 4) дает

$$\|V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_\infty \leqslant \|(V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(f)\|_p \cdot \|\overline{K}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}\|_{p'}, \tag{7}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Учитывая лемму 6, получим

$$\|K_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}\|_{p'} \ll \left(\sum_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]-1} \left(\mu^{-\frac{1}{p}}\right)^{p'}\mu^{p'-2}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]-1} \mu^{-1}\right)^{\frac{1}{p'}} \ll n^{\frac{1}{p'}}.$$

Используя соотношение (6), а затем лемму 7, имеем

$$\|(V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(f)\|_p \ll \|V^{(\alpha+\frac{1}{p})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_p + \|\widetilde{V^{(\alpha)}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}}^{(\frac{1}{p})}(f)\|_p \ll \|V^{(\alpha+\frac{1}{p})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_p.$$

Подставляя эти оценки в неравенство (7), приходим к оценке $J_1 \ll 2^{-\alpha(n+1)}n^{\frac{1}{p'}}\|V^{(\alpha+\frac{1}{p})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_p$.

Далее, применяя лемму 1 и свойства дробного модуля гладкости, будем иметь

$$J_1 \ll 2^{-\alpha(n+1)}n^{\frac{1}{p'}}\|V^{(\alpha+\frac{1}{p})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_p \ll \|V^{(\alpha+\frac{1}{p})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_p \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}} t^\alpha\frac{dt}{t} =$$

$$= \left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]^{\alpha+\frac{1}{p}}\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]^{\alpha+\frac{1}{p}}}\|V^{(\alpha+\frac{1}{p})}_{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}(f)\|_p \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}} t^\alpha\frac{dt}{t} \ll \left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]^{\alpha+\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]})_p \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}} t^\alpha\frac{dt}{t} \ll$$

$$\ll \int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n+1}}{n^{\frac{1}{\alpha p'}}}\right]}} t^{-\alpha-\frac{1}{p}} t^{\alpha} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p \frac{dt}{t} \ll \int\limits_0^{\delta\left(\log_2 \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p \frac{dt}{t}.$$

Используя оценки для J_1 и J_2, получаем тем самым, что неравенство (3) доказано.

Рассмотрим функцию $f_1(x) = \sin x$. Как показано в §4.1 (см. соотношение (4.1.8)) работы [8], $\omega_\alpha(f_1,\delta)_\infty \asymp \delta^\alpha, \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f_1,\delta)_p \asymp \delta^{\alpha+\frac{1}{p}}$. Но тогда

$$\int\limits_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f_1,t)_p \frac{dt}{t} \asymp \int\limits_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}} t^{\alpha+\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \asymp \delta^\alpha (\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{p'}}.$$

Таким образом, для функции $f_1(x)$ правая и левая части соотношения (3) имеют разные порядки как функции переменной δ, что и означает, что в соотношении (3), вообще говоря, нельзя знак $\ll$ заменить на $\asymp$.

8. Доказательство пункта 2 теоремы 2. Рассмотрим функцию $f_3(x) = f_1(x) = \sin x$. Тогда

$$A_3(f_3,\delta) = \frac{\omega_\alpha(f_3,\delta)_\infty}{\int\limits_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_1+\frac{1}{p}}(f_3,t)_p \frac{dt}{t}} \asymp \frac{\delta^\alpha}{\delta^{\alpha_1} (\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{\alpha_1}{\alpha p'}}} \to \infty \text{ при } \delta \to 0.$$

Таким образом, для функции $f_3(x)$ правая и левая части соотношения (3) имеют разные порядки как функции переменной δ, что и означает, что в соотношении (3), вообще говоря, нельзя заменить α на $\alpha_1 > \alpha$.

9. Доказательство пункта 3 теоремы 2. Рассмотрим функцию

$$f_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha+1}}, \text{если } \alpha \neq 2l+1,\ l \in \mathbb{N},$$

$$f_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha+1}}, \text{если } \alpha = 2l+1,\ l \in \mathbb{N}.$$

Применяя лемму 10, имеем

$$\int\limits_0^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f_4,t)_p \frac{dt}{t} = \int\limits_\delta^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha t^{-(\alpha+\frac{1}{p})} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f_4,t)_p \frac{dt}{t} + \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f_4,t)_p \frac{dt}{t} \ll$$

$$\ll \delta^{-(\alpha+\frac{1}{p})} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f_4,\delta)_p \int\limits_\delta^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha}}} t^\alpha \frac{dt}{t} + \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f_4,t)_p \frac{dt}{t} \ll$$

$$\ll \delta^{-(\alpha+\frac{1}{p})} \delta^\alpha \zeta(\delta) \delta^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\log_2 \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}} + \int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p}} t^{\alpha+\frac{1}{p}} \left(\log_2 \frac{2}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \ll \delta^\alpha \zeta(\delta) \left(\log_2 \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из леммы 10 также следует, что $\omega_\alpha(f_4,\delta)_\infty \gg \delta^\alpha \log_2 \frac{2}{\delta}$. Но тогда

$$A_4(f_4,\delta) \gg \frac{\left(\log_2 \frac{2}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\zeta(\delta)}.$$

Откуда и получаем, что $A_4(f_4,\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$.

10. Доказательство пункта 4 теоремы 2.

10, а. Применяя свойства модуля гладкости, будем иметь

$$\int_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t} = \int_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t} + \int_{\delta}^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{\alpha}t^{-(\alpha+\frac{1}{p})}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t} \ll$$

$$\ll \int_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t} + \delta^{-(\alpha+\frac{1}{p})}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,\delta)_p \int_{\delta}^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{\alpha}\frac{dt}{t} \ll \int_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}}\Big(\log_2\frac{2}{t}\Big)^{\frac{1}{p'}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f,t)_p\frac{dt}{t}.$$

Таким образом, верно неравенство (4).

Пусть $\alpha > \frac{1}{p}$. Рассмотрим функцию $g_1(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu\alpha}}\cos 2^{\nu}x$. Используя лемму 9, заключаем, что $\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(g_1,\delta)_p \asymp \delta^{\alpha}$. Тогда для левого выражения в (4) получим

$$\int_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(g_1,t)_p\frac{dt}{t} \asymp \int_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}}t^{\alpha}\frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha-\frac{1}{p}}(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p p'}}}.$$

Для правого выражения в (4) будем иметь

$$\int_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}}\Big(\log_2\frac{2}{t}\Big)^{\frac{1}{p'}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(g_1,t)_p\frac{dt}{t} \asymp \int_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}}\Big(\log_2\frac{2}{t}\Big)^{\frac{1}{p'}}t^{\alpha}\frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha-\frac{1}{p}}\Big(\log_2\frac{2}{\delta}\Big)^{\frac{1}{p'}}.$$

Таким образом, для функции $g_1(x)$ при $\alpha > \frac{1}{p}$ правая и левая части соотношения (4) имеют разные порядки как функции переменной δ, что и означает, что в соотношении (4), вообще говоря, нельзя знак $\ll$ заменить знаком $\asymp$.

10, б. Применяя к неравенству (3) неравенство (4), получим утверждение *г*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
2. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 3. 17–25.
3. *Tikhonov S., Trebels W.* Ulyanov inequalities and generalized Liouville derivatives // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 2011. **141**, N 1. 205–224.
4. *Tikhonov S.* Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters // J. Fourier Anal. Appl. 2010. **16**, N 4. 590–608.
5. *Domingues O., Tikhonov S.* Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities // ArXiv: 1909.12818.
6. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Модули гладкости положительных порядков функций из пространств L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Современные проблемы математики и механики. Т. VII. Математика. Механика. Вып. 1 (к 190-летию П.Л. Чебышёва). М.: Изд-во МГУ, 2011. 100–109.
7. *Симонов Б.В.* Некоторые вопросы теории приближений и теоремы вложения: Канд. дис. М., 1985.
8. *Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.* Дробные модули гладкости. М.: Макс Пресс, 2016.
9. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
27.12.2020