Математика

УДК 517.518.36

СРАВНЕНИЕ ЧИСТО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА И ЧИСТО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ПО ПАРЕ СЛОВАРЕЙ

А. С. Орлова[1]

В работе сравнивается стандартный чисто жадный алгоритм с его модификацией — чисто жадным алгоритмом по паре словарей. Доказано, что в некоторых случаях чисто жадный алгоритм по паре словарей может сходиться за конечное число шагов, в то время как стандартный алгоритм по каждому словарю в отдельности на каждом шаге имеет ненулевой остаток. Установлено, что возможна и обратная ситуация. При сравнении чисто жадного алгоритма по паре словарей и чисто жадного алгоритма по их объединению также реализуемы обе вышеописанные ситуации. Для скорости сходимости показано, что чисто жадный алгоритм по паре словарей в некоторых случаях быстрее, а в некоторых случаях медленнее чисто жадного алгоритма по каждому словарю в отдельности.

Ключевые слова: чисто жадный алгоритм, чисто жадный алгоритм по паре словарей, сходимость, скорость сходимости.

In this paper, we compare the standard Pure Greedy Algorithm (PGA) with its modification — PGA in a pair of dictionaries. We show that PGA in a pair of dictionaries converges in certain cases in a finite number of steps, while the standard PGA for each individual dictionary has non-zero remainders at each step; at the same time, in certain cases the opposite holds true. Similarly, for the comparison of PGA in a pair of dictionaries vs standard PGA in a union of these dictionaries both situations are possible. For the convergence rate, we also prove that in certain cases PGA in a pair of dictionaries can be faster, and in certain cases can be slower than the standard PGA in individual dictionaries.

Key words: pure greedy algorithm, pure greedy algorithm in a pair of dictionaries, convergence, convergence rate.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-1

1. Введение. Переупорядочение классического разложения вектора в ряд Фурье (определение ряда Фурье можно найти в [1, гл. 3, § 4, п. 4]) по убыванию норм слагаемых эквивалентно чисто жадному разложению данного вектора [2, п. 1.2] по ортогональному словарю. В случае произвольного словаря чисто жадные разложения совпадают с орторекурсивными разложениями [3], если векторы словаря дополнительно выбираются на каждом шаге локально оптимальным образом. Напомним строгое определение чисто жадного алгоритма в гильбертовом пространстве H по нормированному словарю D (*нормированным словарем* D называется множество векторов единичной нормы, замыкание линейной оболочки которого совпадает со всем пространством H). Для вектора $x \in H$ индуктивно определяются *последовательность остатков* $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *последовательность коэффициентов* $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и *последовательность элементов словаря* $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0(x) = x;$$

$$e_n(x) \in D: \quad |(r_{n-1}(x), e_n(x))| = \sup_{d \in D} |(r_{n-1}(x), d)|,$$

$$\hat{x}_n = (r_{n-1}(x), e_n(x)), \quad r_n(x) = r_{n-1}(x) - \hat{x}_n e_n(x), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Чисто жадным разложением вектора x по словарю D называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n(x)$.

Для остатка разложения $r_N(x)$ верно соотношение $r_N(x) = x - \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{x}_n e_n(x)$.

[1] *Орлова Анастасия Сергеевна* — асп. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: anastasia-orlova1@ya.ru.

Orlova Anastasiia Sergeevna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Analysis.

Заметим, что, с одной стороны, разложение не всегда возможно, с другой стороны, когда разложение вектора по словарю возможно, оно не всегда определено однозначно.

Чисто жадные алгоритмы по паре словарей [4, п. 3] в свою очередь являются одним из многих обобщений [5, гл. 2] чисто жадных алгоритмов. Чисто жадное разложение вектора по паре словарей D_1 и D_2 определяется аналогично чисто жадному разложению по одному словарю, но на нечетных шагах в качестве словаря берется словарь D_1, а на четных шагах — словарь D_2. Более точно, для вектора $x \in H$ определим *чисто жадное разложение по паре нормированных словарей* D_1 *и* D_2 следующим образом. Индуктивно определим *последовательность остатков* $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *последовательность коэффициентов* $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и *последовательность элементов словарей* $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0(x) = x;$$

$$e_{2n+i}(x) \in D_i: \ \ |(r_{2n+i-1}(x), e_{2n+i}(x))| = \sup_{d \in D_i} |(r_{2n+i-1}(x), d)|,$$

$$\hat{x}_{2n+i} = (r_{2n+i-1}(x), e_{2n+i}(x)),$$

$$r_{2n+i}(x) = r_{2n+i-1}(x) - \hat{x}_{2n+i} e_{2n+i}(x), \quad i = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Чисто жадным разложением вектора x *по паре словарей* D_1 *и* D_2 называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n(x)$.

Как и в случае стандартного чисто жадного алгоритма, разложение не всегда реализуемо и не всегда определено однозначно, для остатка разложения $r_N(x)$ также верно равенство

$$r_N(x) = x - \sum_{n=1}^{N} \hat{x}_n e_n(x).$$

Будем говорить, что чисто жадный алгоритм на векторе x (гарантированно) сходится за конечное число шагов, если каждая реализация данного алгоритма сходится за конечное число шагов. Будем говорить, что чисто жадный алгоритм на векторе x (заведомо) не сходится за конечное число шагов, если каждая реализация данного алгоритма не сходится за конечное число шагов. Если на векторе x один алгоритм сходится за конечное число шагов, а другой не сходится за конечное число шагов, то будем считать, что на векторе x первый алгоритм быстрее, чем второй (соответственно второй алгоритм медленнее, чем первый).

Ортогональный нормированный словарь будем называть *ортонормированным словарем.*

Определим *множество* $\mathcal{A}_1(D)$ *приближаемых словарем* D *векторов из гильбертова пространства* H [2, п. 1.1] следующим образом:

$$\mathcal{A}_1(D) = \left\{ x \in H \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i d_i, \ \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < +\infty, \ d_i \in D \ \forall i \in \mathbb{N} \right\}.$$

В настоящей работе будут рассматриваться бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства, поэтому можно считать $H = \ell_2$. В этом случае если F — стандартный базис в ℓ_2, то множеством приближаемых векторов $\mathcal{A}_1(F)$ является подпространство ℓ_1.

2. Основные результаты. Если $D_1 \not\subseteq D_2$ и $D_2 \not\subseteq D_1$, то при разложении по паре словарей множество векторов, по которому происходит приближение, больше, чем при разложении по каждому из словарей в отдельности. Этот факт позволяет установить следующую теорему.

Теорема 1. *Существуют два ортонормированных словаря* D_1 *и* D_2 *и вектор* $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$, *такие, что*

1) *чисто жадный алгоритм по словарю* D_1 *и чисто жадный алгоритм по словарю* D_2 *не сходятся за конечное число шагов;*

2) *чисто жадный алгоритм по паре словарей* D_1 *и* D_2 *сходится за конечное число шагов.*

Однако, несмотря на то что аппарат приближения в алгоритме по одному словарю оказывается у́же, чем в алгоритме по паре словарей, справедливой является и обратная теорема.

Теорема 2. *Существуют два ортонормированных словаря* D_1 *и* D_2 *и вектор* $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$, *такие, что*

1) *чисто жадный алгоритм по словарю* D_1 *и чисто жадный алгоритм по словарю* D_2 *сходятся за конечное число шагов;*

2) *чисто жадный алгоритм по паре словарей* D_1 *и* D_2 *не сходится за конечное число шагов.*

Сходимость алгоритма по словарю D (по паре словарей D_1 и D_2) за конечное число шагов возможна лишь для векторов из линейной оболочки словаря $< D >$ (линейной оболочки объединения словарей $< D_1 \cup D_2 >$). Когда норма остатка на каждом шаге положительна, скорость сходимости для конкретного вектора x можно охарактеризовать последовательностью

$$c_n(x) = \frac{\|r_n(x)\|_2}{\|x\|_2}, \quad \text{где} \quad \|a\|_2 = \sqrt{(a,a)}.$$

Для вектора x и вектора αx ($\alpha \neq 0$) такие последовательности будут совпадать, поскольку эти векторы имеют эквивалентные разложения, а нормы остатков отличаются на коэффициент $|\alpha|$.

В случае отсутствия сходимости за конечное число шагов будем говорить, что первый алгоритм быстрее, чем второй (соответственно второй алгоритм медленнее, чем первый), на векторе x, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n(x)}{\tilde{c}_n(x)} = 0,$$

где последовательность $c_n(x)$ соответствует первому алгоритму, а последовательность $\tilde{c}_n(x)$ — второму.

Для скорости сходимости имеются результаты, аналогичные теореме 1 и теореме 2.

Как и в теореме 1, за счет большего множества приближающих векторов алгоритм по паре словарей может оказываться быстрее стандартного алгоритма по каждому словарю в отдельности.

Теорема 3. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$, такие, что для некоторой монотонно убывающей к нулю положительной последовательности $\{s_n\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$*

1) *для чисто жадного алгоритма по словарю D_1 верно $c_{2^n-1}(x) \geqslant s_n$;*
2) *для чисто жадного алгоритма по словарю D_2 верно $c_{2^n-1}(x) \geqslant s_n$;*
3) *для чисто жадного алгоритма по паре словарей D_1 и D_2 верно $c_{2n+2}(x) = s_n$.*

Замечание. В данной теореме можно выбрать, например, $s_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

С другой стороны, результат теоремы 2 также переносится на скорость сходимости.

Теорема 4. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$, такие, что для некоторой монотонно убывающей к нулю положительной последовательности $\{s_n\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$*

1) *для чисто жадного алгоритма по словарю D_1 верно $c_{6n}(x) = s_n$;*
2) *для чисто жадного алгоритма по словарю D_2 верно $c_{3n}(x) = s_n$;*
3) *для чисто жадного алгоритма по паре словарей D_1 и D_2 верно $c_{2^{n+2}}(x) \geqslant s_n$.*

Дополнительно к рассмотрению разложений по словарям D_1 и D_2 по отдельности сравним чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 с чисто жадным алгоритмом по их объединению $D = D_1 \cup D_2$. В этом случае аппарат приближения стандартного алгоритма будет шире, чем аппарат приближения алгоритма по паре словарей. Здесь, конечно, верен аналог теоремы 2, а именно справедлива

Теорема 5. *Существуют два ортонормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$, такие, что*

1) *чисто жадный алгоритм по словарю $D = D_1 \cup D_2$ сходится за конечное число шагов;*
2) *чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 не сходится за конечное число шагов.*

Однако разделение словаря $D = D_1 \cup D_2$ на два и проведение алгоритма по паре словарей накладывает определенное ограничение, благодаря чему чисто жадный алгоритм по паре словарей также может оказываться быстрее стандартного алгоритма.

Теорема 6. *Существуют два нормированных словаря D_1 и D_2 и вектор $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$, такие, что*

1) *чисто жадный алгоритм по словарю $D = D_1 \cup D_2$ не сходится за конечное число шагов;*
2) *чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 сходится за конечное число шагов.*

3. Доказательство утверждений. Далее будем использовать следующие обозначения. Стандартный базис в ℓ_2 будем обозначать через $F = \{f_n\}_n$, т.е. f_n — это последовательность, у которой на n-м месте единица, а на остальных — нули.

Также произвольному вектору $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ будем сопоставлять два *разреженных* вектора:

$$x_o = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, x_4, 0, \dots) \ \text{ и } \ x_e = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, x_4, \dots).$$

В этом случае пространство оказывается “поделенным” на два подпространства. Так, рассматривая вектор $a = b_o + c_e$, можно считать, что у нас два вектора b и c, которые составлены из нечетных и четных координат вектора a соответственно.

Доказательство теоремы 1. Сначала кратко опишем схему доказательства.

Выберем ортонормированный базис $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$, такой, что $d_1 \in \ell_1$ является нефинитным вектором относительно стандартного базиса F (т.е. не является конечной линейной комбинацией элементов F).

В качестве словарей выберем $D_1 = \{(d_i)_o\}_{i=1}^{\infty} \cup \{f_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ и $D_2 = \{(d_i)_e\}_{i=1}^{\infty} \cup \{f_{2i-1}\}_{i=1}^{\infty}$. В случае чисто жадного алгоритма по словарю D_1 изменения нечетных координат векторов последовательности $r_n(x)$ происходят в результате вычитания умноженных на $\hat{x}_n$ разреженных векторов словаря D, а четных — в результате вычитания умноженных на $\hat{x}_n$ разреженных векторов словаря F. Для словаря D_2 — наоборот.

Рассмотрим вектор $x = (d_1)_o + (d_1)_e$. Для него при разложении по одному словарю, например по D_1, нечетные координаты вектора за один шаг занулятся разреженным словарем D, а четные будут зануляться разреженным словарем F, при этом все четные координаты не занулятся ни за какое конечное число шагов. При разложении данного вектора по паре словарей алгоритм сойдется за два шага.

Теперь рассмотрим каждый алгоритм подробнее.

1) Чисто жадное разложение по паре словарей D_1 и D_2.

Шаг 1. Разложение проводится по словарю D_1:

$$\sup_{d\in D_1} |(r_0(x), d)| = \max\left(\sup_i |(r_0(x), (d_i)_o)|, \sup_i |(r_0(x), f_{2i})|\right) = \max(\|d_1\|_2^2, \|d_1\|_\infty) = 1 = |(r_0(x), (d_1)_o)|,$$

где $\|(a_1, a_2, a_3, \dots)\|_\infty = \sup\limits_i |a_i|$. Супремум достигается на единственном векторе $(d_1)_o$. Отсюда получаем, что разложение на данном шаге определено однозначно: $e_1(x) = (d_1)_o$ и $\hat{x}_1 = 1$. Следовательно, остаток равен $r_1(x) = r_0(x) - \hat{x}_1 e_1(x) = (d_1)_e$.

Шаг 2. Разложение по словарю D_2:

$$\sup_{d\in D_2} |(r_1(x), d)| = \max\left(\sup_i |(r_1(x), (d_i)_e)|, \sup_i |(r_1(x), f_{2i-1})|\right) = \max\left(\|d_1\|_2^2, 0\right) = 1 = |(r_1(x), (d_1)_e)|,$$

здесь алгоритм также определен однозначно: $e_2(x) = (d_1)_e$, $\hat{x}_2 = 1$ и $r_2(x) = r_1(x) - \hat{x}_2 e_2(x) = 0$.

Таким образом, чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 для вектора x сходится за два шага.

2) Первый шаг чисто жадного разложения по словарю D_1 совпадает с первым шагом алгоритма по паре словарей. Далее алгоритм будет эквивалентен чисто жадному алгоритму по стандартному словарю F для нефинитного вектора d_1. Значит, алгоритм не будет сходиться за конечное число шагов.

3) Аналогично чисто жадное разложение по словарю D_2 не будет сходиться за конечное число шагов.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 и теоремы 5. Определим словари следующим образом: $D_1 = F$ и $D_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2)\right\} \cup \{f_i\}_{i=3}^{\infty}$. Рассмотрим для вектора $x = f_1 + f_2$ чисто жадное разложение по паре словарей D_1 и D_2, чисто жадные разложения по словарям D_1 и D_2 в отдельности, а также чисто жадное разложение по словарю $D = D_1 \cup D_2$.

Очевидно, что любая реализация чисто жадного алгоритма по словарю D_1 сходится за два шага, а реализация чисто жадного алгоритма по словарю D_2 определяется однозначно и сходится за один шаг. Чисто жадный алгоритм по словарю $D = D_1 \cup D_2$ также имеет единственную реализацию и сходится за один шаг.

Для чисто жадного алгоритма по паре словарей D_1 и D_2 докажем, что в случае $r_{2n}(x) = c(f_1 \pm f_2)$ верно $r_{2n+2}(x) = \pm\frac{c}{2}(f_1 \pm f_2)$, где знаки $\pm$ не зависят друг от друга. Тогда, учитывая, что $r_0(x) = f_1 + f_2$, получим $r_{2n}(x) = \pm\frac{1}{2^n}(f_1 \pm f_2)$, а значит, чисто жадный алгоритм по паре словарей D_1 и D_2 для вектора x не будет сходиться за конечное число шагов.

Итак, пусть $r_{2n}(x) = c(f_1 \pm f_2)$, тогда на шаге $2n+1$ точная верхняя грань $\sup\limits_{d\in D_1} |(r_{2n}(x), d)| = |c|$ будет достигаться на векторах f_1 и f_2. Выбрав $e_{2n+1}(x) = f_1$, получим $\hat{x}_1 = c$ и $r_{2n+1}(x) = c(f_1 \pm f_2) - cf_1 = \pm cf_2$. Если $e_{2n+1}(x) = f_2$, то аналогично $\hat{x}_{2n+1} = \pm c$ и остаток $r_{2n+1}(x) = c(f_1 \pm f_2) - (\pm c)f_2 = cf_1$.

На шаге $2n+2$ рассмотрим оба случая. Если $r_{2n+1}(x) = cf_1$, то $\sup\limits_{d\in D_2} |(r_{2n+1}(x), d)| = \frac{|c|}{\sqrt{2}}$ достигается на $e_{2n+2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \pm f_2)$, тогда $\hat{x}_{2n+2} = \frac{c}{\sqrt{2}}$ и $r_{2n+2}(x) = cf_1 - \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \pm f_2) = \frac{c}{2}(f_1 \mp f_2)$. В случае $r_{2n+1}(x) = \pm cf_2 = Cf_2$ получаем, что $\sup\limits_{d\in D_2} |(r_{2n+1}(x), d)| = \frac{|C|}{\sqrt{2}}$ и, как и в предыдущем случае, вектор $e_{2n+2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \pm f_2)$, отсюда $\hat{x}_{2n+2} = \pm\frac{C}{\sqrt{2}}$ и $r_{2n+2}(x) = Cf_2 - \left(\pm\frac{C}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 \pm f_2) = \frac{C}{2}f_1 \mp \frac{C}{2}f_2 = \pm\frac{c}{2}(f_1 \mp f_2)$.

Таким образом, доказано, что $r_{2n+2}(x) = \pm\frac{c}{2}(f_1 \pm f_2)$, что завершает доказательство.

Доказательство теоремы 3. Выберем ортонормированный базис $D = \{d_i\}_{i=1}^{\infty}$, такой, что d_{2k} является линейной комбинацией с равными коэффициентами очередных 2^k элементов стандартного базиса F, т.е. $d_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \sum\limits_{n=1}^{2^k} f_{2^k-1+n}$, и рассмотрим вектор $x' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot d_{2k}$.

Далее аналогично доказательству теоремы 1 выберем приближаемый вектор $x = x'_o + x'_e$, а также словари $D_1 = \{(d_i)_o\}_{i=1}^{\infty} \cup \{f_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ и $D_2 = \{(d_i)_e\}_{i=1}^{\infty} \cup \{f_{2i-1}\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда в случае разложения по словарю D_1 можно считать, что для нечетных координат рассматривается “разреженный” словарь D, а для четных — “разреженный” словарь F. Аналогично для словаря D_2.

Заметим дополнительно, что так как вектор x' принадлежит $\mathcal{A}_1(F)$ и $\mathcal{A}_1(D)$, то $x \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$.

Перейдем к рассмотрению чисто жадного алгоритма для вектора x по паре словарей D_1 и D_2, а также по каждому словарю отдельно.

1) Для чисто жадного разложения по паре словарей D_1 и D_2 по индукции докажем, что

$$r_{2(N-1)}(x) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot ((d_{2k})_o + (d_{2k})_e).$$

Очевидно, это верно для $N = 1$. Пусть данное соотношение верно на шаге $2(N-1)$, тогда на шаге $2N-1$ получаем

$$\sup_{d\in D_1} \left|\left(r_{2(N-1)}(x), d\right)\right| = \max\left(\sup_i \left|\left(r_{2(N-1)}(x), (d_i)_o\right)\right|, \sup_i \left|\left(r_{2(N-1)}(x), f_{2i}\right)\right|\right) =$$

$$= \max\left(\frac{1}{2^N} \cdot \|d_{2N}\|_2^2, \frac{1}{2^N} \cdot \|d_{2N}\|_\infty\right) = \frac{1}{2^N} = \left|\left(r_{2(N-1)}(x), (d_{2N})_o\right)\right|.$$

Значит, на данном шаге разложение определено однозначно: $e_{2N-1}(x) = (d_{2N})_o$, $\hat{x}_{2N-1} = \frac{1}{2^N}$ и остаток $r_{2N-1}(x) = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot ((d_{2k})_o + (d_{2k})_e) + \frac{1}{2^N} \cdot (d_{2N})_e$.

Шаг $2N$:

$$\sup_{d\in D_2} |(r_{2N-1}(x), d)| = \max\left(\sup_i |(r_{2N-1}(x), (d_i)_e)|, \sup_i |(r_{2N-1}(x), f_{2i-1})|\right) =$$

$$= \max\left(\frac{1}{2^N} \cdot \|d_{2N}\|_2^2, \frac{1}{2^N} \cdot \|d_{2N}\|_\infty\right) = \frac{1}{2^N} = |(r_{2N-1}(x), (d_{2N})_e)|,$$

здесь также алгоритм будет определен однозначно: $e_{2N}(x) = (d_{2N})_e$ и $\hat{x}_{2N} = \frac{1}{2^N}$, в итоге остаток на данном шаге $r_{2N}(x) = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot ((d_{2k})_o + (d_{2k})_e)$.

Таким образом, при всех $N \in \mathbb{N}$ верно $\|r_{2N}(x)\|_2^2 = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{2k}} = 2 \cdot \frac{1}{2^{2(N+1)}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{2N}}$ и $\|r_{2N}(x)\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2^N}$. Поскольку $\|x\|_2 = \|r_0(x)\|_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, то $c_{2n+2}(x) = \frac{\|r_{2(n+1)}(x)\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2^{n+1}}$, поэтому определим $s_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

2) Рассмотрим чисто жадный алгоритм по словарю D_1. Сравнивая данный алгоритм с чисто жадным алгоритмом по стандартному словарю F для вектора x', получаем

$$\|r_{2^n-1}(x)\|_2^2 \geqslant \|r'_{2^n-1}(x')\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n}},$$

где под $r'_{2^n-1}(x')$ подразумевается остаток на шаге 2^n-1 чисто жадного алгоритма по словарю F для вектора x'. Следовательно, $c_{2^n-1}(x) = \frac{\|r_{2^n-1}(x)\|_2}{\|x\|_2} \geqslant \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2^n}}{\|x\|_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2^n}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} > s_n$.

3) Для чисто жадного алгоритма по словарю D_2 аналогично доказывается, что $c_{2^n-1}(x) > s_n$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. В качестве словарей D_1 и D_2 выберем соответственно словари F и $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+1} \pm f_{2n+2})\right\}_{n=0}^{\infty}$, а вектор x определим как $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1}+f_{2k+2}) \in \mathcal{A}_1(D_1) \cap \mathcal{A}_1(D_2)$.

1) Для чисто жадного алгоритма по словарю D_1, очевидно, справедливо $r_{2n}(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1}+f_{2k+2})$ и $\|r_{2n}(x)\|_2^2 = \sum\limits_{k=n}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{2^{k+1}}}$. В этом случае $c_{6n}(x) = \frac{\|r_{6n}(x)\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1}{\|x\|_2}\sqrt{\sum\limits_{k=3n}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{2^{k+1}}}}$. Определим s_n следующим образом: $s_n = \frac{1}{\|x\|_2}\sqrt{\sum\limits_{k=3n}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{2^{k+1}}}}$. Тогда верно $c_{6n}(x) = s_n$.

2) Аналогично для чисто жадного алгоритма по словарю D_2 получаем $r_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1}+f_{2k+2})$ и $\|r_n(x)\|_2^2 = \sum\limits_{k=n}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{2^{k+1}}}$. Значит, верно $c_{3n}(x) = \frac{\|r_{3n}(x)\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1}{\|x\|_2}\sqrt{\sum\limits_{k=3n}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{2^{k+1}}}} = s_n$.

3) Перейдем к чисто жадному алгоритму по паре словарей D_1 и D_2.

Без ограничения общности ниже будет рассмотрена только часть возможных реализаций алгоритма, остальные его реализации будут отличаться лишь знаками координат векторов $r_n(x)$.

Докажем, что на то, чтобы “занулить” очередные 6 координат (в стандартном базисе F), требуется $2^{n+1}+2$ или $2^{n+1}+4$ шагов, при этом остальные координаты остаются неизменными. В этом случае, поскольку верно соотношение $\sum\limits_{k=0}^{n}(2^{k+1}+2) = 2^{n+2}+2n \geqslant 2^{n+2}$, на шаге 2^{n+2} все координаты вектора x и остатка $r_{2^{n+2}}(x)$, кроме первых $6n$ координат, будут совпадать. Следовательно, приходим к неравенству $\|r_{2^{n+2}}(x)\|_2^2 \geqslant \left\|\sum\limits_{k=3n}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1}+f_{2k+2})\right\|_2^2 = \sum\limits_{k=3n}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{2^{k+1}}}$, из которого сразу получаем

$$c_{2^{n+2}}(x) = \frac{\|r_{2^{n+2}}(x)\|_2}{\|x\|_2} \geqslant \frac{1}{\|x\|_2}\sqrt{\sum_{k=3n}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^{2^{k+1}}}} = s_n.$$

Итак, пусть на некотором четном шаге $2N$ верно $r_{2N}(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1}+f_{2k+2})$, тогда покажем, что при $0 \leqslant m \leqslant 2^n-1$

$$r_{2N+2m}(x) = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}(f_{2n+1}+f_{2n+2}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1}+f_{2k+2}).$$

При $m=0$ получаем шаг $2N$ и по предположению данное утверждение верно. Предположив, что для некоторого $0 \leqslant m < 2^n-1$ остаток $r_{2N+2m}(x)$ имеет требуемый вид, докажем, что

$$r_{2N+2(m+1)}(x) = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}(f_{2n+1}+f_{2n+2}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1}+f_{2k+2}).$$

Рассмотрим шаг $2N+2m+1$. Поскольку $m < 2^n-1$, то $\frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^{2^n}} > \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$. Значит, супремум $\sup\limits_{d \in D_1} |(r_{2N+2m}(x), d)|$ равен $\frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}$ и достигается на векторах f_{2n+1} и f_{2n+2}. Выберем $e_{2N+2m+1}(x) =$

f_{2n+1} (второй случай аналогичен), тогда $\hat{x}_{2N+2m+1} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}$ и

$$r_{2N+2m+1}(x) = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^{2^n}} \cdot f_{2n+2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1} + f_{2k+2}).$$

Шаг $2N+2m+2$. Учитывая, что $m < 2^n - 1$, получаем $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^{2^n}} > 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$. Следовательно, $\sup\limits_{d \in D_2} |(r_{2N+2m+1}(x), d)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}$ достигается на векторах $\frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+1} \pm f_{2n+2})$. Например, будем считать, что $e_{2N+2k+2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+1} - f_{2n+2})$ (второй случай аналогичен). Здесь верно $\hat{x}_{2N+2k+2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}$ и

$$r_{2N+2m+2}(x) = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}(f_{2n+1} + f_{2n+2}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1} + f_{2k+2}).$$

Таким образом, при $m = 2^n - 1$ имеем

$$r_{2N+2^{n+1}-2}(x) = \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}(f_{2n+1} + f_{2n+2}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1} + f_{2k+2}).$$

На следующем шаге $2N + 2^{n+1} - 1$ все еще верно $e_{2N+2^{n+1}-1}(x) = f_{2n+1}$ или $e_{2N+2^{n+1}-1}(x) = f_{2n+2}$, и, например, выбрав первый вариант (второй аналогичен), получим

$$r_{2N+2^{n+1}-1}(x) = \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}} \cdot f_{2n+2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1} + f_{2k+2}).$$

Шаг $2N+2^{n+1}$. Супремум $\sup\limits_{d \in D_2} |(r_{2N+2^{n+1}-1}(x), d)| = \max\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}, 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$ достигается на трех векторах: $\frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+1} \pm f_{2n+2})$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+3} + f_{2n+4})$.

Выберем, например, $e_{2N+2^{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+1} - f_{2n+2})$ (случай $e_{2N+2^{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+1} + f_{2n+2})$ аналогичен). Тогда $\hat{x}_{2N+2^{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}$ и, опуская выкладки, будем иметь

$$r_{2N+2^{n+1}}(x) = \frac{1}{2^{2^{n+1}}}(f_{2n+1} + f_{2n+2} + f_{2n+3} + f_{2n+4}) + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1} + f_{2k+2}).$$

Без ограничения общности можно считать, что $e_{2N+2^{n+1}+1}(x) = f_{2n+1}$, тогда на следующих 3 шагах алгоритм определен однозначно и элементы разложения будут равны $e_{2N+2^{n+1}+2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+3} + f_{2n+4})$, $e_{2N+2^{n+1}+3}(x) = f_{2n+2}$, $e_{2N+2^{n+1}+4}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+5} + f_{2n+6})$. В этом случае остаток на шаге $2N + 2^{n+1} + 4$ будет равен

$$r_{2N+2^{n+1}+4}(x) = \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1} + f_{2k+2}).$$

Остался случай $e_{2N+2^{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+3} + f_{2n+4})$. Здесь $\hat{x}_{2N+2^{n+1}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$ и

$$r_{2N+2^{n+1}}(x) = \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}} \cdot f_{2n+2} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1} + f_{2k+2}),$$

тогда далее однозначно $e_{2N+2^{n+1}+1}(x) = f_{2n+2}$, $e_{2N+2^{n+1}+2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{2n+5} + f_{2n+6})$ и

$$r_{2N+2^{n+1}+2}(x) = \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{1}{2^{2^k}}(f_{2k+1} + f_{2k+2}).$$

Таким образом, действительно, за очередные $2^{n+1}+2$ или $2^{n+1}+4$ шагов происходит только "зануление" очередных 6 координат вектора x и теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 6. Определим вектор $f = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}^k} f_{k+1}$, тогда

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1.$$

В качестве словарей выберем $D_1 = F$ и $D_2 = F \cup \{f\}$ и рассмотрим чисто жадные алгоритмы для вектора $x = \sqrt{2} \cdot f_1 - \sqrt{3} \cdot f_2$. Покажем, что алгоритм по паре словарей сходится за два шага. При разложении по объединению двух словарей сначала получим нефинитный остаток, а далее на каждом шаге будет зануляться наибольшая по модулю координата.

1) Чисто жадное разложение по словарю $D = D_1 \cup D_2$.

Шаг 1. Легко видеть, что $\sup\limits_{d \in D} |(r_0(x), d)| = \max\left(\sqrt{3}, 2\right) = 2 = |(r_0(x), f)|$. Таким образом, на первом шаге алгоритм определен однозначно: $e_1(x) = f$ и $\hat{x}_1 = 2$. Отсюда получаем, что для остатка верно $r_1(x) = \sqrt{2} \cdot f_1 - \sqrt{3} \cdot f_2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f_1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}^k} f_{k+1} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot f_2 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}^k} f_{k+1}$.

Шаг 2. Очевидно, что $\sup\limits_{d \in D} |(r_1(x), d)| = \frac{2}{\sqrt{3}^2} = |(r_1(x), f_3)|$ и разложение определено однозначно. Здесь $e_2(x) = f_3$, $\hat{x}_2 = \frac{2}{\sqrt{3}^2}$ и $r_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot f_2 + \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}^k} f_{k+1}$.

Шаг 3. Поскольку $(r_2(x), f) = \frac{1}{3} - 2 \sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{9}$, то $\sup\limits_{d \in D} |(r_2(x), d)| = \frac{1}{\sqrt{3}} = |(r_2(x), f_2)|$. Отсюда следует, что разложение однозначно и $e_3(x) = f_2$, $\hat{x}_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Значит,

$$r_3(x) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}^k} f_{k+1}.$$

Докажем, что в случае $n \geqslant 3$ для остатка верно равенство $r_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}^k} f_{k+1}$.

При $n = 3$ данное соотношение выполнено.

При $n > 3$ предположим, что верно $r_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=n-1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}^k} f_{k+1}$. Тогда на шаге n имеет место равенство $(r_{n-1}(x), f) = 2 \sum\limits_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n-2}}$, следовательно, $\sup\limits_{d \in D} |(r_{n-1}(x), d)| = \frac{2}{\sqrt{3}^{n-1}} = |(r_{n-1}(x), f_n)|$ и алгоритм определяется однозначно. Здесь $e_n(x) = f_n$ и $\hat{x}_n = \frac{2}{\sqrt{3}^{n-1}}$ и, действительно,

$$r_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{3}^k} f_{k+1}.$$

Алгоритм за конечное число шагов не сходится.

2) Теперь рассмотрим чисто жадное разложение по паре словарей D_1 и D_2.

Шаг 1. Поскольку $\sup\limits_{d \in D_1} |(r_0(x), d)| = \sqrt{3} = |(r_0(x), f_2)|$, то на данном шаге алгоритм определен однозначно: $e_1(x) = f_2$ и $\hat{x}_1 = -\sqrt{3}$. Отсюда $r_1(x) = r_0(x) - \hat{x}_1 e_1(x) = \sqrt{2} \cdot f_1$.

Шаг 2. Верно $\sup\limits_{d \in D_2} |(r_1(x), d)| = \max\left(\sqrt{2}, \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} = |(r_1(x), f_1)|$. Здесь однозначно $e_2(x) = f_1$ и $\hat{x}_2 = \sqrt{2}$, тогда $r_2(x) = r_1(x) - \hat{x}_2 e_2(x) = 0$.

Итак, алгоритм сходится за 2 шага.

Теорема доказана.

Таким образом, сравнивая чисто жадный алгоритм и чисто жадный алгоритм по паре словарей, можно сделать вывод о том, что в зависимости от словарей и приближаемого вектора стандартный алгоритм может быть как быстрее, так и медленнее своей модификации.

Автор приносит благодарность В. В. Галатенко за постановку задачи и ценные консультации, а также Т. П. Лукашенко за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
2. *DeVore R.A., Temlyakov V.N.* Some remarks on greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. **5**, N 1. 173–187.
3. *Лукашенко Т.П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2001. № 1. 6–10.
4. *Borodin P.A., Kopecka E.* Weak limits of consecutive projections and of greedy steps // arXiv:2112.05094 [math.FA].
5. *Temlyakov V.* Greedy Approximation (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

Поступила в редакцию
18.03.2022

УДК 517.5

УТОЧНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ

М. К. Потапов[1], **Б. В. Симонов**[2]

В работе получены уточнения некоторых соотношений между модулями гладкости функций одного переменного. Показана их точность.

Ключевые слова: неравенство, пространство, дробный модуль гладкости.

Improvements of some interrelations between mixed fractional moduli of smoothness of functions of one variable are obtained. Their sharpness is proved.

Key words: inequality, space, fractional moduli of smoothness.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-2-2

1. Обозначения и формулировка основных результатов. Введем обозначения:

$L_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$ — пространство измеримых 2π-периодических функций $f(x)$ одного переменного, для которых $\|f\|_p < \infty$, где $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, если $1 \leqslant p < \infty$, и $\|f\|_p = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \mathrm{vrai}\, |f(x)|$, если $p = \infty$;

L_p^0 — множество функций $f \in L_p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$, таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0$;

$\sigma(f)$ — ряд Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$\sigma(f) \equiv \sigma(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x),$$

где через a_k и b_k обозначены коэффициенты Фурье функции f :

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,\ k \in \mathbb{N},\ b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx,\ k \in \mathbb{N};$

---

[0] *Потапов Михаил Константинович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ.

Potapov Mikhail Konstantinovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis.

[2] *Симонов Борис Витальевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент Волгоград. гос. техн. ун-та, e-mail: simonov-b2002@yandex.ru.

Simonov Boris Vital'evich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Volgograd State Technical University.