УДК 539.3+531.53+532.23

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ЛАГРАНЖА МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ

А. В. Романов[1]

В рамках теории микрополярного континуума с использованием вариационного принципа Лагранжа, метода Ритца и кусочно-полиномиальных базисных функций серендипова семейства получены компоненты тензорно-блочной матрицы жесткости и составлена система линейных алгебраических уравнений для ортотропного материала с центром симметрии.

Ключевые слова: микрополярная среда, континуум Коссера, несимметричная теория упругости, вариационный принцип, тензор изгиба-кручения, тензор моментных напряжений, метод конечных элементов, матрица жесткости.

In this paper, a variational principle of Lagrange, the Ritz method and piecewise polynomial serendipity shape functions are used to obtain the stiffness matrix and a system of linear algebraic equations in the micropolar theory of elasticity for orthotropic and centrally symmetric material.

Key words: micropolar continuum, Cosserat continuum, theory of asymmetric elasticity, variational principle, rotation gradient tensor, couple stress tensor, finite element method, stiffness matrix.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-68-72

1. Вариационный принцип Лагранжа. Обобщим задачу минимизации функционала Лагранжа классической теории упругости [1, 2] на микрополярную среду:

$$L(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi})\leqslant L(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}),\quad L(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})=\frac{1}{2}\,a(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})-l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}),\quad \forall\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}\colon\ \mathbf{w},\boldsymbol{\psi}\,|_{\Sigma_1}=0 \tag{1}$$

и запишем условия стационарности

$$DL(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})=0, \tag{2}$$

которые в силу симметрии функционала a приводят к интегральным тождествам

$$a(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})=l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi}),$$
$$a(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi};\,\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})=\int\limits_V[\,\underset{\sim}{\mathbf{P}}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi})\overset{2}{\otimes}(\nabla\mathbf{w}-\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\boldsymbol{\psi})+\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\varphi})\overset{2}{\otimes}\nabla\boldsymbol{\psi}\,]\,dV,$$
$$l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})=\int\limits_V\rho(\mathbf{F}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\psi})\,dV+\int\limits_{\Sigma_2}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\psi})\,d\Sigma,$$

где D — дифференциал Гато; V — объем тела; Σ — поверхность тела ($\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma$, $\Sigma_1\cap\Sigma_2=\emptyset$); $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — действительная кинематическая система независимых векторов перемещений и микровращений (далее вращений) соответственно; $\mathbf{w}$, $\boldsymbol{\psi}$ — кинематически допустимая система векторов, т.е. возможные перемещения и вращения из того же пространства, что и $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$. Если приняты тождества $\mathbf{w}=\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\varphi}$, то $a(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})$ есть энергия упругих деформаций и изгиба-кручения; $l(\mathbf{w},\boldsymbol{\psi})$ — работа внешних сил на соответствующих перемещениях и вращениях; $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ — тензор напряжений второго ранга; $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$ — тензор моментных напряжений второго ранга; $\underset{\approx}{\mathbf{C}}$ — дискриминантный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чивиты); $\mathbf{F}$ — вектор массовой силы; $\mathbf{m}$ — вектор массовых пар; ρ —

[1] *Романов Александр Вячеславович* — науч. сотр. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: atomicra@ya.ru.

Romanov Aleksandr Vyacheslavovich — Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Composite Mechanics.

плотность среды; $\overset{2}{\otimes}$ — знак внутреннего 2-произведения; $\mathbf{S}$ — вектор поверхностной силы; $\mathbf{R}$ — вектор поверхностных пар. При формулировке вариационного принципа Лагранжа (1), (2) аналогично классической теории [1, 2] потребуем выполнения кинематических соотношений и кинематических граничных условий [3–9]:

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla\mathbf{u} - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla\boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{u}\,|_{\Sigma_1} = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}\,|_{\Sigma_1} = \boldsymbol{\varphi}_0,$$

а из условий стационарности (2) следуют уравнения равновесия и статические граничные условия:

$$\nabla\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{F} = 0, \quad \nabla\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}}\,|_{\Sigma_2} = \mathbf{S}, \quad \mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\,|_{\Sigma_2} = \mathbf{R}.$$

Здесь $\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}$ — тензор деформации микрополярной теории упругости; $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}$ — тензор изгиба-кручения; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности тела. Также отметим, что в силу существования оператора (потенциала) деформаций и изгибов-кручений немедленно возникают определяющие соотношения для материалов с центром симметрии при изотермических процессах [6–9]:

$$\check{W}(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}) = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}\right), \quad \underset{\sim}{\mathbf{P}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}} \quad (\underset{\approx}{\mathbf{A}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}}^T, \quad \underset{\approx}{\mathbf{D}} = \underset{\approx}{\mathbf{D}}^T),$$

где $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ — материальные тензоры четвертого ранга.

2. Ортотропные тензоры четвертого ранга. В этом случае каждый тензор микрополярного материала с центром симметрии имеет 15 независимых компонент. Например, компоненты тензора $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ представляются в виде [10]

$$\begin{aligned} A^{ijkl} = {} & A^{1111}\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{11} + A^{2222}\gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{22} + A^{3333}\gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{33} + A^{1122}\left(\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{22} + \gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{11}\right) + A^{1133}\left(\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{33} + \gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{11}\right) + \\ & + A^{2233}\left(\gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{33} + \gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{22}\right) + A^{1212}\gamma^{ik}_{11}\gamma^{jl}_{22} + A^{1221}\left(\gamma^{il}_{11}\gamma^{jk}_{22} + \gamma^{il}_{22}\gamma^{jk}_{11}\right) + A^{2121}\gamma^{ik}_{22}\gamma^{jl}_{11} + A^{1313}\gamma^{ik}_{11}\gamma^{jl}_{33} + \\ & + A^{1331}\left(\gamma^{il}_{11}\gamma^{jk}_{33} + \gamma^{il}_{33}\gamma^{jk}_{11}\right) + A^{3131}\gamma^{ik}_{33}\gamma^{jl}_{11} + A^{2323}\gamma^{ik}_{22}\gamma^{jl}_{33} + A^{2332}\left(\gamma^{il}_{22}\gamma^{jk}_{33} + \gamma^{il}_{33}\gamma^{jk}_{22}\right) + A^{3232}\gamma^{ik}_{33}\gamma^{jl}_{22}\,, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\gamma^{ij}_{\alpha\alpha} = g^i_\alpha\, g^j_\alpha\ \langle\alpha = 1, 2, 3\rangle$ (по α суммирования нет) — произведения смешанных компонент единичного тензора второго ранга [1, 6, 10]. А если учесть симметрию относительно первых двух индексов $A^{ijkl} = A^{jikl}$, то из выражения (3) получим

$$\begin{aligned} A^{ijkl} = {} & A^{1111}\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{11} + A^{2222}\gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{22} + A^{3333}\gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{33} + A^{1122}\left(\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{22} + \gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{11}\right) + A^{1133}\left(\gamma^{ij}_{11}\gamma^{kl}_{33} + \gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{11}\right) + \\ & + A^{2233}\left(\gamma^{ij}_{22}\gamma^{kl}_{33} + \gamma^{ij}_{33}\gamma^{kl}_{22}\right) + A^{1212}\left(\gamma^{ik}_{11}\gamma^{jl}_{22} + \gamma^{il}_{11}\gamma^{jk}_{22} + \gamma^{il}_{22}\gamma^{jk}_{11} + \gamma^{ik}_{22}\gamma^{jl}_{11}\right) + \\ & + A^{1313}\left(\gamma^{ik}_{11}\gamma^{jl}_{33} + \gamma^{il}_{11}\gamma^{jk}_{33} + \gamma^{il}_{33}\gamma^{jk}_{11} + \gamma^{ik}_{33}\gamma^{jl}_{11}\right) + \\ & + A^{2323}\left(\gamma^{ik}_{22}\gamma^{jl}_{33} + \gamma^{il}_{22}\gamma^{jk}_{33} + \gamma^{il}_{33}\gamma^{jk}_{22} + \gamma^{ik}_{33}\gamma^{jl}_{22}\right)\,, \end{aligned}$$

где $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ содержит уже 9 независимых компонент, что соответствует ортотропному материалу классической теории упругости [3, 6, 10]. Если в (3) A заменим на D, то получим соответствующие выражения для компонент материального тензора $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$.

3. Система линейных алгебраических уравнений. Применив метод Ритца и записав критерий стационарности для дискретного лагранжиана, а также воспользовавшись ранее принятыми обозначениями в работе [11], придем к системе линейных алгебраических уравнений для произвольного материала с центром симметрии:

$$DL(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}) = 0, \quad \begin{cases} +\underset{(1)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\widehat{w}^p_l - \underset{(2)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\widehat{\psi}^p_l = \underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^j_q \\ -\underset{(3)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\widehat{w}^p_l + \underset{(4)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}\widehat{\psi}^p_l = \underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^j_q, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \underset{(1)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} & -\underset{(2)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} \\ -\underset{(3)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} & \underset{(4)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{w}^p_l \\ \widehat{\psi}^p_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^j_q \\ \underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^j_q \end{Bmatrix}, \qquad (4)$$

где компоненты тензорно-блочных матриц жесткости имеют вид

$$\begin{aligned}
&\underset{(1)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t}\, B^s_k B^t_i J\, dV_\xi, \quad \underset{(2)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{ijkm} C^{\cdot\cdot l}_{km\cdot} N_p N_{q,t} B^t_i J\, dV_\xi,\\
&\underset{(3)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq} = \int\limits_{V_e} A^{inkl} N_{p,s} C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot} N_q B^s_k J\, dV_\xi, \quad \underset{(1)}{\mathbb{F}}{}^{j}_{q} = \int\limits_{V_e} F^j N_q J \rho\, dV_\xi + \int\limits_{\Sigma_2} S^j N_q J_\Sigma\, d\Sigma_\xi,\\
&\underset{(2)}{\mathbb{F}}{}^{j}_{q} = \int\limits_{V_e} m^j N_q J \rho\, dV_\xi + \int\limits_{\Sigma_2} R^j N_q J_\Sigma\, d\Sigma_\xi,\\
&\int\limits_{V_e} \left[A^{inkm} N_p N_q C^{\cdot\cdot l}_{km\cdot} C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot} + D^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} B^s_k B^t_i \right] J\, dV_\xi = \underset{(4)}{\mathbb{K}}{}^{lj}_{pq}.
\end{aligned} \tag{5}$$

4. Компоненты тензорно-блочной матрицы жесткости. Учитывая (3) и соответствующие выражения компонент ортотропных материальных тензоров $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$, а также запись производных функций форм по декартовым координатам [11], из (5) для компонент первого блока тензора $\underset{(1)}{K}{}^{lj}_{pq}$ будем иметь

$$\begin{aligned}
&\underset{(1)}{K}{}^{lj}_{pq} = A^{ijkl} N_{p,k} N_{q,i} = A^{1111} N_{p,1} N_{q,1} \gamma^{lj}_{11} + A^{2222} N_{p,2} N_{q,2} \gamma^{lj}_{22} +\\
&+ A^{3333} N_{p,3} N_{q,3} \gamma^{lj}_{33} + A^{1122} \left(N_{p,2} N_{q,1} \gamma^{lj}_{21} + \right.\\
&\left. + N_{p,1} N_{q,2} \gamma^{lj}_{12} \right) + A^{1133} \left(N_{p,3} N_{q,1} \gamma^{lj}_{31} + N_{p,1} N_{q,3} \gamma^{lj}_{13} \right) + A^{2233} \left(N_{p,3} N_{q,2} \gamma^{lj}_{32} + N_{p,2} N_{q,3} \gamma^{lj}_{23} \right) +\\
&+ A^{1212} N_{p,1} N_{q,1} \gamma^{lj}_{22} + A^{1221} \left(N_{p,2} N_{q,1} \gamma^{lj}_{12} + N_{p,1} N_{q,2} \gamma^{lj}_{21} \right) + A^{2121} N_{p,2} N_{q,2} \gamma^{lj}_{11} +\\
&+ A^{1313} N_{p,1} N_{q,1} \gamma^{lj}_{33} + A^{1331} \left(N_{p,3} N_{q,1} \gamma^{lj}_{13} + N_{p,1} N_{q,3} \gamma^{lj}_{31} \right) + A^{3131} N_{p,3} N_{q,3} \gamma^{lj}_{11} +\\
&+ A^{2323} N_{p,2} N_{q,2} \gamma^{lj}_{33} + A^{2332} \left(N_{p,3} N_{q,2} \gamma^{lj}_{23} + N_{p,2} N_{q,3} \gamma^{lj}_{32} \right) + A^{3232} N_{p,3} N_{q,3} \gamma^{lj}_{22}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Придавая значения индексам l и j из формулы (6), получим

$$\begin{aligned}
&\underset{(1)}{K}{}^{11}_{pq} = A^{1111} N_{p,1} N_{q,1} + A^{2121} N_{p,2} N_{q,2} + A^{3131} N_{p,3} N_{q,3}, \quad \underset{(1)}{K}{}^{12}_{pq} = A^{1122} N_{p,1} N_{q,2} + A^{1221} N_{p,2} N_{q,1},\\
&\underset{(1)}{K}{}^{22}_{pq} = A^{2222} N_{p,2} N_{q,2} + A^{3232} N_{p,3} N_{q,3} + A^{1212} N_{p,1} N_{q,1}, \quad \underset{(1)}{K}{}^{21}_{pq} = A^{1122} N_{p,2} N_{q,1} + A^{1221} N_{p,1} N_{q,2},\\
&\underset{(1)}{K}{}^{33}_{pq} = A^{3333} N_{p,3} N_{q,3} + A^{1313} N_{p,1} N_{q,1} + A^{2323} N_{p,2} N_{q,2},\\
&\underset{(1)}{K}{}^{13}_{pq} = A^{1133} N_{p,1} N_{q,3} + A^{1331} N_{p,3} N_{q,1}, \quad \underset{(1)}{K}{}^{23}_{pq} = A^{2233} N_{p,2} N_{q,3} + A^{2332} N_{p,3} N_{q,2},\\
&\underset{(1)}{K}{}^{31}_{pq} = A^{1133} N_{p,3} N_{q,1} + A^{1331} N_{p,1} N_{q,3}, \quad \underset{(1)}{K}{}^{32}_{pq} = A^{2233} N_{p,3} N_{q,2} + A^{2332} N_{p,2} N_{q,3}.
\end{aligned}$$

Компоненты второго $\underset{(2)}{K}{}^{lj}_{pq}$ и третьего $\underset{(3)}{K}{}^{lj}_{pq}$ блоков тензора в общем виде представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\underset{(2)}{K}{}^{lj}_{pq} = A^{ijkm} C^{\cdot\cdot l}_{km\cdot} N_p N_{q,i} = N_p \left(A^{1212} N_{q,1}\, C^{\cdot\cdot l}_{12\cdot}\, g^j_2 + A^{1221} \left(N_{q,1}\, C^{\cdot\cdot l}_{21\cdot}\, g^j_2 + N_{q,2}\, C^{\cdot\cdot l}_{12\cdot}\, g^j_1 \right) + A^{2121} N_{q,2}\, C^{\cdot\cdot l}_{21\cdot}\, g^j_1 + \right.\\
&+ A^{1313} N_{q,1}\, C^{\cdot\cdot l}_{13\cdot}\, g^j_3 + A^{1331} \left(N_{q,1}\, C^{\cdot\cdot l}_{31\cdot} g^j_3 + N_{q,3}\, C^{\cdot\cdot l}_{13\cdot} g^j_1 \right) + A^{3131} N_{q,3}\, C^{\cdot\cdot l}_{31\cdot}\, g^j_1 + A^{2323} N_{q,2}\, C^{\cdot\cdot l}_{23\cdot}\, g^j_3 +\\
&\left. + A^{2332} \left(N_{q,2}\, C^{\cdot\cdot l}_{32\cdot}\, g^j_3 + N_{q,3}\, C^{\cdot\cdot l}_{23\cdot}\, g^j_2 \right) + A^{3232} N_{q,3}\, C^{\cdot\cdot l}_{32\cdot}\, g^j_2 \right),\\
&\underset{(3)}{K}{}^{lj}_{pq} = A^{inkl} N_{p,k} N_q C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot} = N_q \left(A^{1212} N_{p,1}\, g^l_2\, C^{\cdot\cdot j}_{12\cdot} + A^{1221} \left(N_{p,2}\, g^l_1\, C^{\cdot\cdot j}_{12\cdot} + N_{p,1}\, g^l_2\, C^{\cdot\cdot j}_{21\cdot} \right) + A^{2121} N_{p,2}\, g^l_1\, C^{\cdot\cdot j}_{21\cdot} + \right.\\
&+ A^{1313} N_{p,1}\, g^l_3\, C^{\cdot\cdot j}_{13\cdot} + A^{1331} \left(N_{p,3}\, g^l_1\, C^{\cdot\cdot j}_{13\cdot} + N_{p,1}\, g^l_3\, C^{\cdot\cdot j}_{31\cdot} \right) + A^{3131} N_{p,3}\, g^l_1\, C^{\cdot\cdot j}_{31\cdot} + A^{2323} N_{p,2}\, g^l_3\, C^{\cdot\cdot j}_{23\cdot} +\\
&\left. + A^{2332} \left(N_{p,3}\, g^l_2\, C^{\cdot\cdot j}_{23\cdot} + N_{p,2}\, g^l_3\, C^{\cdot\cdot j}_{32\cdot} \right) + A^{3232} N_{p,3}\, g^l_2\, C^{\cdot\cdot j}_{32\cdot} \right).
\end{aligned}$$

Запишем их выражения поэлементно:

$$\begin{aligned}
&\underset{(2)}{K}{}^{11}_{pq} = \underset{(2)}{K}{}^{22}_{pq} = \underset{(2)}{K}{}^{33}_{pq} = 0,\\
&\underset{(2)}{K}{}^{12}_{pq} = N_p N_{q,3} (A^{2332} - A^{3232}), \quad \underset{(2)}{K}{}^{13}_{pq} = N_p N_{q,2} (A^{2323} - A^{2332}), \quad \underset{(2)}{K}{}^{23}_{pq} = N_p N_{q,1} (A^{1331} - A^{1313}),\\
&\underset{(2)}{K}{}^{21}_{pq} = N_p N_{q,3} (A^{3131} - A^{1331}), \quad \underset{(2)}{K}{}^{31}_{pq} = N_p N_{q,2} (A^{1221} - A^{2121}), \quad \underset{(2)}{K}{}^{32}_{pq} = N_p N_{q,1} (A^{1212} - A^{1221}),\\
&\underset{(3)}{K}{}^{11}_{pq} = \underset{(3)}{K}{}^{22}_{pq} = \underset{(3)}{K}{}^{33}_{pq} = 0,
\end{aligned}$$

$$\underset{(3)}{K}{}^{12}_{pq} = N_{p,3}N_q(A^{3131} - A^{1331}),\ \underset{(3)}{K}{}^{13}_{pq} = N_{p,2}N_q(A^{1221} - A^{2121}),\ \underset{(3)}{K}{}^{23}_{pq} = N_{p,1}N_q(A^{1212} - A^{1221}),$$
$$\underset{(3)}{K}{}^{21}_{pq} = N_{p,3}N_q(A^{2332} - A^{3223}),\ \underset{(3)}{K}{}^{31}_{pq} = N_{p,2}N_q(A^{2323} - A^{2332}),\ \underset{(3)}{K}{}^{32}_{pq} = N_{p,1}N_q(A^{1331} - A^{1313}).$$

Компоненты четвертого блока тензора $\underset{(4)}{K}{}^{lj}_{pq}$ представим в общем виде:

$$\begin{aligned}
&\underset{(4)}{K}{}^{lj}_{pq} = A^{inkm}N_pN_qC^{\cdot\cdot l}_{km\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{in\cdot} + D^{ijkl}N_{p,k}N_{q,i} = \\
&= N_pN_q\left[A^{1212}\,C^{\cdot\cdot l}_{12\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{12\cdot} + A^{1221}\left(C^{\cdot\cdot l}_{21\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{12\cdot} + C^{\cdot\cdot l}_{12\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{21\cdot}\right) + \right.\\
&+A^{2121}\,C^{\cdot\cdot l}_{21\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{21\cdot} + A^{1313}\,C^{\cdot\cdot l}_{13\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{13\cdot} + A^{1331}\left(C^{\cdot\cdot l}_{31\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{13\cdot} + C^{\cdot\cdot l}_{13\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{31\cdot}\right) + A^{3131}\,C^{\cdot\cdot l}_{31\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{31\cdot} + A^{2323}\,C^{\cdot\cdot l}_{23\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{23\cdot} + \\
&\left.+A^{2332}\left(C^{\cdot\cdot l}_{32\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{23\cdot} + C^{\cdot\cdot l}_{23\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{32\cdot}\right) + A^{3232}\,C^{\cdot\cdot l}_{32\cdot}C^{\cdot\cdot j}_{32\cdot}\right] + D^{1111}N_{p,1}N_{q,1}\gamma^{lj}_{11} + D^{2222}N_{p,2}N_{q,2}\gamma^{lj}_{22} + \\
&+D^{3333}N_{p,3}N_{q,3}\gamma^{lj}_{33} + D^{1122}\left(N_{p,2}N_{q,1}\gamma^{lj}_{21} + N_{p,1}N_{q,2}\gamma^{lj}_{12}\right) + D^{1133}\left(N_{p,3}N_{q,1}\gamma^{lj}_{31} + N_{p,1}N_{q,3}\gamma^{lj}_{13}\right) + \\
&+D^{2233}\left(N_{p,3}N_{q,2}\gamma^{lj}_{32} + N_{p,2}N_{q,3}\gamma^{lj}_{23}\right) + \\
&+D^{1212}N_{p,1}N_{q,1}\gamma^{lj}_{22} + D^{1221}\left(N_{p,2}N_{q,1}\gamma^{lj}_{12} + N_{p,1}N_{q,2}\gamma^{lj}_{21}\right) + D^{2121}N_{p,2}N_{q,2}\gamma^{lj}_{11} + \\
&+D^{1313}N_{p,1}N_{q,1}\gamma^{lj}_{33} + D^{1331}\left(N_{p,3}N_{q,1}\gamma^{lj}_{13} + N_{p,1}N_{q,3}\gamma^{lj}_{31}\right) + D^{3131}N_{p,3}N_{q,3}\gamma^{lj}_{11} + \\
&+D^{2323}N_{p,2}N_{q,2}\gamma^{lj}_{33} + D^{2332}\left(N_{p,3}N_{q,2}\gamma^{lj}_{23} + N_{p,2}N_{q,3}\gamma^{lj}_{32}\right) + D^{3232}N_{p,3}N_{q,3}\gamma^{lj}_{22}.
\end{aligned}$$

Их выражения поэлементно:

$$\begin{aligned}
&\underset{(4)}{K}{}^{11}_{pq} = (A^{2323} - 2A^{2332} + A^{3232})N_pN_q + D^{1111}N_{p,1}N_{q,1} + D^{2121}N_{p,2}N_{q,2} + D^{3131}N_{p,3}N_{q,3},\\
&\underset{(4)}{K}{}^{22}_{pq} = (A^{1313} - 2A^{1331} + A^{3131})N_pN_q + D^{2222}N_{p,2}N_{q,2} + D^{1212}N_{p,1}N_{q,1} + D^{3232}N_{p,3}N_{q,3},\\
&\underset{(4)}{K}{}^{33}_{pq} = (A^{1212} - 2A^{1221} + A^{2121})N_pN_q + D^{3333}N_{p,3}N_{q,3} + D^{1313}N_{p,1}N_{q,1} + D^{2323}N_{p,2}N_{q,2},\\
&\underset{(4)}{K}{}^{12}_{pq} = D^{1122}N_{p,1}N_{q,2} + D^{1221}N_{p,2}N_{q,1}, \quad \underset{(4)}{K}{}^{21}_{pq} = D^{1122}N_{p,2}N_{q,1} + D^{1221}N_{p,1}N_{q,2},\\
&\underset{(4)}{K}{}^{13}_{pq} = D^{1133}N_{p,1}N_{q,3} + D^{1331}N_{p,3}N_{q,1}, \quad \underset{(4)}{K}{}^{23}_{pq} = D^{2233}N_{p,2}N_{q,3} + D^{2332}N_{p,3}N_{q,2},\\
&\underset{(4)}{K}{}^{31}_{pq} = D^{1133}N_{p,3}N_{q,1} + D^{1331}N_{p,1}N_{q,3}, \quad \underset{(4)}{K}{}^{32}_{pq} = D^{2233}N_{p,3}N_{q,2} + D^{2332}N_{p,2}N_{q,3}.
\end{aligned}$$

4. Выводы. С учетом выражений ортотропных тензоров $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ для материалов с центром симметрии микрополярной теории упругости получены компоненты тензорно-блочной матрицы жесткости, которые впоследствии используются для составления системы линейных алгебраических уравнений (4), (5) и нахождения неизвестных векторов макроперемещений и микровращений. Данные результаты могут быть актуальными для исследования задач наномеханики микрополярного континуума с целью изучения новых свойств материала методом конечных элементов с применением численных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
4. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories.1. Foundation and Solids. N.Y.: Springer-Verlag, 1999.
5. *Lakes R.* Cosserat micromechanics of structured media: Experimental methods // Proc. Amer. Soc. Composites. 3rd Technical Conf. Sept. 25–29. Seatle, 1988. 505–516.
6. *Никабадзе М.У.* Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ им. М.В. Ломоносова, 2014 (URL: https://istina.msu.ru/publications/book/6738800/).
7. *Nikabadze M., Ulukhanyan A.* Some variational principles in the three-dimensional micropolar theories of solids and thin solids // Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials. Vol. 175. Advanced Structured Materials. Switzerland, 2022. 193–251 (URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6_11).

8. *Nikabadze M., Ulukhanyan A.* On some variational principles in micropolar theories of single-layer thin bodies // Continuum Mechanics and Thermodynamics. Germany, 2022 (URL: https://doi.org/10.1007/s00161-022-01089-5).
9. *Nikabadze M., Ulukhanyan A.* Generalized Reissner-type variational principle in the micropolar theories of multilayer thin bodies with one small size // Continuum Mechanics and Thermodynamics. Germany. 2022. **34**, N 2 (URL: https://doi.org/10.1007/s00161-022-01091-x).
10. *Nikabadze M.U.* Topics on tensor calculus with applications to mechanics // J. Math. Sci. 2017. **225**. 1–194 (URL: https://doi.org/10.1007/s10958-017-3467-4).
11. *Романов А.В.* О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае трансверсально-изотропной среды // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 4. 35-39.

Поступила в редакцию
14.10.2022