СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
2. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд. М.: Изд-во МГУ, 2011.
3. *Голован А.А., Матасов А.И., Тарыгин И.Е.* Калибровка блока ньютонометров с асимметричными моделями показаний чувствительных элементов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 2. 107–119.
4. *Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В.* Алгоритмы калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. 13–27.
5. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующий подход и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
6. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космич. исследования. 1964. **2**, № 5. 713–718.
7. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
8. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
9. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.

Поступила в редакцию
29.06.2022

УДК 511

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ СКОРОСТИ САМОЛЕТА ПРИ ПОМОЩИ ИЗМЕРЕНИЙ ТРЕХЛУЧЕВОГО ЛИДАРА

В. М. Железнов[1]

Приводится исследование геометрических факторов в задаче оценивания скорости самолета при помощи измерений радиальных скоростей от трехлучевого доплеровского лидара. Подобные системы предлагается использовать в задачах авиационной гравиметрии как дополнение или как замену дифференциального скоростного решения спутниковой навигационной системы. Аналитическим способом получена оптимальная конфигурация направлений лучей лидара. Численным моделированием установлены конфигурации лучей, уменьшающие ковариацию ошибки оценивания вертикальной скорости самолета.

Ключевые слова: доплеровский лидар, авиационная гравиметрия, задача оценивания, геометрические факторы.

The paper presents our study on «dilution of precision» factors in the problem of estimating vehicle's velocity using a three-beam doppler lidar. Such a system has been proposed as an addition or replacement to the differential GNSS velocity solution in an airborne gravimetry system. We analytically derive optimal directions of lidar beams and use numerical simulation to obtain their attitude which minimizes the error covariance of estimated vertical velocity.

Key words: doppler lidar, airborne gravimetry, estimation problem, dilution of precision.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-64-67

Введение. Гравиметрия — наука об измерении силы тяжести на поверхности и вблизи поверхности Земли. Получаемые данные о силе тяжести могут использоваться для поиска полезных ископаемых, более точного прогнозирования орбит спутников, вычисления геоида Земли.

Для решения задач гравиметрии применяются платформенные инерциальные навигационные системы (ИНС) и бесплатформенные (БИНС). ИНС с помощью гиростабилизированной платформы физически моделирует поведение географического трехгранника. БИНС численным образом моделирует поведение географического трехгранника, и показания гравиметра формируются перепроектировкой показаний блока акселерометров, измеряющих удельную силу, на оси числового трехгранника.

---

[1] *Железнов Виктор Михайлович* — асп. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: victorzheleznov@ya.ru.

Zheleznov Viktor Mikhailovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

Одна из основных задач аэрогравиметрии — это определение скорости самолета для дальнейшей компенсации из показаний акселерометров ускорения, связанного с движением самолета. Без какой-либо дополнительной информации невозможно выделить вертикальное ускорение свободного падения из кажущегося ускорения, измеренного блоком акселерометров. В связи с этим используются решения спутниковой навигационной системы (СНС) в дифференциальном режиме.

А. Гэбелл в патенте [1] предложил использование трехлучевого лидара как альтернативу дифференциальным решениям СНС. Трехлучевой лидар крепится внизу на фюзеляже самолета, и каждый из лучей способен предоставлять информацию о радиальной скорости в направлении распространения луча. Имея три таких измерения и используя ориентационное решение БИНС, можно определить вектор скорости самолета в географической системе координат, в частности вертикальную компоненту скорости.

Согласно патенту [1], возможные заявленные плюсы по сравнению с классическими алгоритмами аэрогравиметрии — повышенная точность измерения вертикальной скорости и работа алгоритма в реальном времени, позволяющая повысить разрешение итоговых данных о скорости. В качестве минуса классических алгоритмов отмечается, что дифференциальная обработка спутниковых измерений зависит от места проведения съемок и изменения созвездия спутников во время полета, что может ограничить точность итогового решения.

Настоящая работа ставит своей целью исследовать варианты расположения лучей лидара относительно фюзеляжа самолета, их оптимальные направления и возможные способы повышения точности оценивания именно вертикальной компоненты скорости самолета. Подобные задачи оптимального планирования эксперимента встречаются, например, в области спутниковых навигационных систем [2].

Системы координат. Введем приборную систему координат Mz, связанную с корпусом самолета: ось Mz_1 направлена по продольной оси к носу объекта, ось Mz_2 расположена в плоскости симметрии объекта и направлена вверх, ось Mz_3 направлена в сторону правого крыла. Здесь и далее точка M обозначает приведенный центр БИНС, носителем которого служит приведенная масса блока акселерометров.

Определим географическую систему координат Mx: ось Mx_3 (Mx_U) совпадает с географической вертикалью места, оси Mx_1 (Mx_E) и Mx_2 (Mx_N) лежат в плоскости текущего горизонта и направлены на восток и север соответственно.

Ориентация приборного трехгранника Mz относительно географического трехгранника Mx определяется углами: истинного курса ψ — углом между осью Mx_2 и проекцией продольной оси Mz_1 на плоскость Mx_1x_2, отсчитываемым по часовой стрелке, крена γ — углом поворота плоскости симметрии вокруг оси Mz_1, тангажа ϑ — углом между плоскостью Mx_1x_2 и осью Mz_1, отсчитываемым от плоскости.

Постановка задачи оценивания. Искомый вектор относительной скорости самолета V_x записывается в географической системе координат Mx, а направляющие векторы лучей лидара n_z^i, $i = 1, 2, 3$, априори известны в приборной системе координат Mz. С использованием матрицы ориентации A_{xz} географического трехгранника относительно приборного, полученной из решения БИНС, возможно вычисление направляющих векторов лучей лидара $n_x^i = A_{xz} n_z^i$, $i = 1, 2, 3$, в географической системе координат Mx.

В рамках данной статьи будем предполагать, что ориентационное решение БИНС не содержит ошибок, и будем рассматривать движение, когда углы тангажа и крена БИНС равны нулю, а угол курса БИНС постоянен. Подобное движение эквивалентно прямолинейному горизонтальному движению самолета, поскольку на практике близость угла тангажа БИНС к нулю обеспечивается специальной наклонной установкой БИНС на корпусе самолета.

Радиальные скорости самолета V_{ρ_i}, $i = 1, 2, 3$, в направлении лучей лидара представляются в виде

$$V_{\rho_i} = {n_x^i}^T V_x, \quad i = 1, 2, 3.$$

Имея три измерения $Z_{V_{\rho_i}}$ радиальной скорости от трехлучевого лидара, можно составить линейную задачу оценивания компонент вектора скорости V_x:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{V_{\rho_1}} \\ Z_{V_{\rho_2}} \\ Z_{V_{\rho_3}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} {n_x^1}^T \\ {n_x^2}^T \\ {n_x^3}^T \end{pmatrix}}_{H} \begin{pmatrix} V_{x_1} \\ V_{x_2} \\ V_{x_3} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta V_{\rho_1}^s \\ \Delta V_{\rho_2}^s \\ \Delta V_{\rho_3}^s \end{pmatrix}}_{r} = HV_x + r, \tag{1}$$

где $\Delta V^s_{\rho_i}$ — шумы измерений трехлучевого лидара. Будем предполагать, что погрешности измерений лидара не зависят от наклона лучей к местности.

Решение задачи оценивания (1) по методу наименьших квадратов имеет вид

$$\widetilde{V}_x = (H^T W^{-1} H)^{-1} H^T W^{-1} Z,$$

где $W = \mathbb{E}\,[rr^T]$ — априори известная ковариационная матрица шумов измерений.

Если погрешности измерения радиальных скоростей равноточны и некоррелированны, т.е. $W = \sigma^2_{\Delta V^s_\rho} E$, где $\sigma_{\Delta V^s_\rho}$ — среднеквадратическое отклонение ошибки измерения радиальной скорости, то ковариационная матрица ошибки оценки $\Delta V_x = \widetilde{V}_x - V_x$ равна

$$P_{\Delta V_x} = \sigma^2_{\Delta V^s_\rho} (H^T H)^{-1}.$$

Определение геометрических факторов. По аналогии с задачами спутниковой навигации [3] введем общий геометрический фактор K и геометрические факторы K_{hor} и K_{ver}, характеризующие точность оценивания скорости в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно:

$$K = \sqrt{\operatorname{tr}(H^T H)^{-1}} = \sqrt{\sigma^2_{\Delta V_E} + \sigma^2_{\Delta V_N} + \sigma^2_{\Delta V_U}}, \quad K_{\text{hor}} = \sqrt{\sigma^2_{\Delta V_E} + \sigma^2_{\Delta V_N}}, \quad K_{\text{ver}} = \sigma_{\Delta V_U}. \tag{2}$$

Значения геометрических факторов зависят от геометрии расположения лучей лидара.

Минимизация общего геометрического фактора. Ставится вопрос: как выбор направлений лучей влияет на ковариацию ошибки оценивания вектора скорости и значения геометрических факторов при прямолинейном горизонтальном движении самолета? Чтобы доказать существование точки минимума общего геометрического фактора, приведем формулировку теоремы Рао о выборе матрицы плана [4], адаптированную под рассматриваемую постановку задачи.

Теорема. *Пусть* $\dim H = N \times n$, $N \geqslant n$, $\mathrm{rk} H = n$, $H = (h_1, \ldots, h_n)$, σ_i^2 *— элементы на диагонали* $(H^T H)^{-1}$. *Если задано ограничение* $\sum\limits_{i=1}^n h_i^T h_i = C^2$, *то*

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \geqslant \frac{n^2}{C^2}.$$

Равенство достигается, когда столбцы матрицы H *ортогональны.*

В рассматриваемой задаче на матрицу H наложено следующее ограничение: нормы строк матрицы H равны единице, поскольку они составлены из направляющих векторов n^j_x, $j = 1, 2, 3$, лучей лидара. Тем самым верна теорема и показано, что общий геометрический фактор K (2) имеет оценку снизу $K \geqslant \sqrt{3}$ и достигает своего минимума при условии ортогональности матрицы H.

Для дальнейших вычислений параметризуем каждый из направляющих векторов n^i_z лучей лидара в приборной системе координат углами α_i и β, как изображено на рис. 1: угол α_i равен углу между проекцией направляющего вектора луча на плоскость Mz_1z_3 и осью Mz_1, угол β — углу между направляющим вектором луча и вертикалью Mz_2. Рассматривается конфигурация, когда угол β одинаковый для каждого из лучей. Будем называть β углом наклона лучей. Тогда

$$n^i_{z_1} = \sin\beta\cos\alpha_i, \quad n^i_{z_2} = -\cos\beta, \quad n^i_{z_3} = \sin\beta\sin\alpha_i.$$

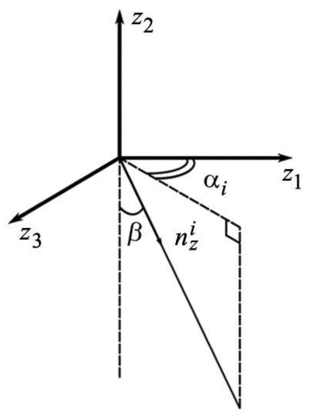

Рис. 1. Параметризация лучей лидара

В случае прямолинейного горизонтального движения (т.е. углы крена и тангажа БИНС равны нулю, угол курса БИНС постоянен и без ограничения общности считается нулевым) матрица H имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} \sin\beta\sin\alpha_1 & \sin\beta\cos\alpha_1 & -\cos\beta \\ \sin\beta\sin\alpha_2 & \sin\beta\cos\alpha_2 & -\cos\beta \\ \sin\beta\sin\alpha_3 & \sin\beta\cos\alpha_3 & -\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Запишем условие попарной ортогональности строк H:

$$\begin{aligned}(n^i_x, n^j_x) &= \sin^2\beta(\sin\alpha_i\sin\alpha_j + \cos\alpha_i\cos\alpha_j) + \cos^2\beta = \\ &= \sin^2\beta\cos(\alpha_j - \alpha_i) + \cos^2\beta = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку матрица H для разрешимости задачи оценивания должна иметь полный ранг, то $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Тогда из (3) получаем

$$\cos(\alpha_j - \alpha_i) = -\operatorname{ctg}^2 \beta \quad \forall i, j : \ i \neq j. \tag{4}$$

Из системы уравнений (4) видно, что проекции направляющих векторов лучей на плоскость Mz_1z_3 попарно отклонены друг от друга на один и тот же угол. Следовательно, этот угол равен 120°. Тогда набор конфигураций, минимизирующих общий геометрический фактор K, записывается следующим образом:

$$\alpha_1 \in [0,\, 360^\circ), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + 120^\circ, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + 240^\circ, \quad \beta = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg} \sqrt{2} \approx 54.7^\circ.$$

Зависимость геометрических факторов от угла наклона лучей. Поскольку углом наклона лучей β устанавливается максимальная высота полета из-за ограниченной дальности действия лидара, то полученный угол наклона $\beta = 54.7^\circ$ не используется на практике. При большом угле наклона β также увеличивается вероятность потери сигнала одного из лучей при совершении маневров.

Зафиксировав углы $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $\alpha_3 = 240^\circ$, можно численно получить зависимость геометрических факторов (2) от угла наклона лучей лидара β (рис. 2). Видно, что с уменьшением угла наклона β вертикальный геометрический фактор уменьшается, а горизонтальный — увеличивается. Как следствие ковариация ошибки оценивания вертикальной компоненты скорости уменьшается и ковариация ошибки оценивания горизонтальных компонент увеличивается. Верно и обратное.

Поскольку приоритетом является оценивание вертикальной компоненты скорости, угол наклона лучей β уменьшается и на основе моделирования находится компромисс между точностями оценивания горизонтальных компонент скорости и вертикальной компоненты скорости. Например, в навигационном доплеровском лидаре от НАСА используется угол наклона $\beta = 25^\circ$ [5].

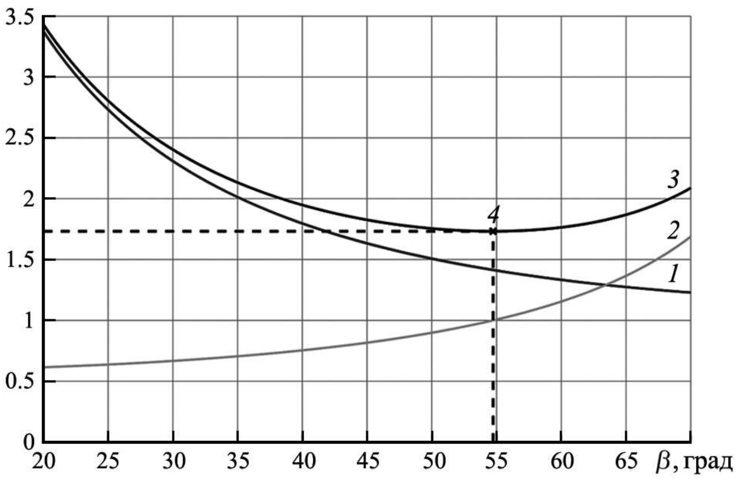

Рис. 2. Зависимость геометрических факторов от угла наклона лучей β: *1* — K_{hor}, *2* — K_{ver}, *3* — K, *4* — точка минимума K

Заключение. В задаче оценивания скорости самолета по измерениям трехлучевого лидара введены геометрические факторы. С их использованием показано, что имеет место компромисс между точностью оценивания горизонтальных компонент скорости и точностью оценивания вертикальной компоненты скорости: при уменьшении ковариации ошибки оценивания вертикальной компоненты увеличивается ковариация ошибки оценивания горизонтальных компонент и наоборот. Решена задача минимизации общего геометрического фактора K и найдены минимизирующие его конфигурации лучей лидара: $\alpha_i = \alpha_0 + \frac{2\pi(i-1)}{3}$, $\alpha_0 \in [0, 2\pi)$, $i = 1, 2, 3$; $\beta = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$. Моделирование задачи оценивания скорости самолета подтвердило теорию геометрических факторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gabell A.R.* Gravimeter assembly // United States Patent 10838104.
2. *Kozlov A., Nikulin A.* An analytic approach to the relation between GPS attitude determination accuracy and antenna configuration geometry // AIP Conf. Proc. 2017. **1798**.
3. *Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А., Трубников С.А.* Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. М.: Изд-во МГУ, 2009.
4. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.
5. *Amzajerdian F., Hines G.D., Pierrottet D.F., Barnes B.W., Petway L.B., Carson J.M.* Demonstration of Coherent Doppler lidar for navigation in GPS-denied environments // Laser Radar Technology and Appl. 2017. **10191**. 1–8.

Поступила в редакцию
27.10.2022