УДК 531.01

КАЛИБРОВКА БЛОКА НЬЮТОНОМЕТРОВ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ЕГО УГЛОВЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

Х. Инь[1], А. И. Матасов[2]

Для плоского случая рассмотрена задача калибровки блока ньютонометров при ограничении на его угловые положения. Для ее решения применен гарантирующий подход. Найдено решение задачи в аналитической форме.

Ключевые слова: блок ньютонометров, калибровка, гарантирующий подход.

The calibration problem for the accelerometer unit is considered under restrictions on its angular positions (for the plane case). The guaranteeing approach is applied to solve the problem. The solution is found in analytical form.

Key words: accelerometer unit, calibration, guaranteeing approach.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-60-64

1. Введение. Блок ньютонометров является одним из основных сенсоров инерциальной навигационной системы [1, 2]. Из-за собственных ошибок этих датчиков и погрешностей при их установке блок ньютонометров нуждается в калибровке [3, 4]. Обычно ошибки масштабных коэффициентов в модели блока ньютонометров считаются постоянными. Но иногда эти коэффициенты зависят от знаков входных сигналов ньютонометров. В статье [3] исследована такая задача для точных стендов. В настоящей работе рассматриваются грубые стенды. Для устранения неоднозначности масштабных коэффициентов вводится ограничение на угловые положения стенда. Построение оптимального плана калибровки и оптимальных оценок параметров блока ньютонометров осуществляется на основании гарантирующего подхода. В работе получено аналитическое решение задачи калибровки для плоского случая.

2. Задача оценивания. В ряде ситуаций ошибки масштабных коэффициентов ньютонометров зависят от знака входного сигнала ньютонометра. Чтобы исключить неоднозначность этих параметров, ограничимся положениями, в которых компоненты единичного вектора ориентации силы тяжести относительно приборного трехгранника являются неотрицательными. Основное калибровочное соотношение (после осреднения показаний ньютонометров) можно записать в стандартной форме [5]:

$$z(n) = H^{\mathsf{T}}(n)q + \varrho(n), \quad |\varrho(n)| \leqslant \sigma, \quad n \in S^+, \quad S^+ = S \cap \mathbb{R}^2_+,$$

где $n = (n_1, n_2)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^2_+$ — известные данные о векторе ориентации силы тяжести относительно приборного трехгранника (полученные при помощи измерения углов поворота стенда); $z(n) = g^{-1}n^{\mathsf{T}}f' - 1 \in \mathbb{R}^1$ — известные измерения, формируемые по показаниям ньютонометров f'; g — абсолютная величина ускорения силы тяжести; $H(n) = \left(n_1^2, n_2^2, n_1n_2, n_1, n_2\right)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^5$ — заданный вектор регрессии; $q = (k_1, k_2, \Gamma_{12}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^5$ — вектор неизвестных параметров (в котором k_i являются ошибками масштабных коэффициентов, Γ_{12} — углом перекоса осей чувствительности ньютонометров, а ε_i — нормированными систематическими смещениями); $\varrho(n) \in \mathbb{R}^1$ — ошибки измерений; σ — известная константа, характеризующая уровень ошибок измерений; S — единичная окружность; $\mathbb{R}^2_+$ — неотрицательный квадрант на плоскости. Основной составляющей $\varrho(n)$ является остаточная нестабильность показаний ньютонометров.

В плоском случае, очевидно, $n_1(\alpha) = \cos\alpha,\ n_2(\alpha) = \sin\alpha,\ \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

---

[1] *Инь Хаолин* — студ. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yhl2671818702@gmail.com.

Yin Haoling — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

[2] *Матасов Александр Иванович* — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. лаб. управления и навигации мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alexander.matasov@gmail.com.

Matasov Alexander Ivanovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Laboratory of Control and Navigation.

3. Гарантирующий подход. Пусть требуется оценить величину $l = a^\top q$, где $a \in \mathbb{R}^5$ — заданный вектор, характеризующий оцениваемую компоненту q, с помощью линейных функционалов:

$$\widetilde{l} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\alpha) z(n(\alpha))\, d\alpha = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_*(\alpha) z(n(\alpha))\, d\alpha + \sum_{s=1}^{M} \Phi_s z(n(\alpha_s)),$$

где $\Phi(\alpha)$ — весовая функция оценивателя, $\Phi_*(\alpha)$ — интегрируемая на $[0, \frac{\pi}{2}]$ функция, а $\{\Phi_s, \alpha_s\}$, $s = 1, \ldots, M$, — произвольный набор чисел и углов ориентации. Таким образом, функция $\Phi(\alpha)$ представима в виде суммы интегрируемой функции и конечного числа импульсных функций ($\delta(\alpha)$ — дельта-функция Дирака):

$$\Phi(\alpha) = \Phi_*(\alpha) + \sum_{s=1}^{M} \Phi_s \delta(\alpha - \alpha_s).$$

Задача оптимального гарантирующего оценивания состоит в нахождении такого оценивателя, который минимизирует гарантированную ошибку оценивания, т.е. решает задачу [6, 7]

$$\inf_{\Phi} \sup_{q \in \mathbb{R}^5,\, |\varrho(n(\alpha))| \leqslant \sigma} |\widetilde{l} - l|.$$

Можно показать, что оптимальный оцениватель, который минимизирует гарантированную ошибку оценки, определяется решением следующей непрерывной вариационной проблемы (проблемы моментов):

$$I_0 = \inf_{\Phi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\Phi(\alpha)|\, d\alpha \quad \text{при условии} \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} h(\alpha)\Phi(\alpha)\, d\alpha = a, \tag{1}$$

где $h(\alpha) = H(n(\alpha)) = \big(\cos^2\alpha,\, \sin^2\alpha,\, \cos\alpha \sin\alpha,\, \cos\alpha,\, \sin\alpha\big)^\top \in \mathbb{R}^5$. Ограничение в задаче (1) называется условием несмещенности. Оно означает, что при отсутствии помехи в измерениях $\widetilde{l} = l$ для всех q. При оценивании, например, k_1 необходимо положить $a = (1, 0, 0, 0, 0)^\top$; далее будем исследовать этот случай.

Для анализа вариационной задачи (1) рассмотрим также двойственную задачу [8, 9]

$$I^0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^5} a^\top \lambda \quad \text{при ограничении} \quad |h^\top(\alpha)\lambda| \leqslant 1, \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]. \tag{2}$$

Цель работы — решить в явном виде проблему моментов (1). При этом гарантированное значение ошибки оптимальной оценки равно $\sigma I_0 = \sigma I^0$.

4. Аналитическое решение плоской задачи. Сначала обсудим предполагаемое решение прямой задачи — проблемы моментов (1). Известно [7, 9], что решение проблемы моментов, как правило, является импульсной функцией ($\Phi_*(\alpha) = 0$) с числом импульсов, не превосходящим размерности неизвестного вектора, в данном случае пяти. Точки приложения импульсов определяют оптимальные угловые положения стенда. На основе анализа численных решений примем гипотезу, что оптимальные углы (точки приложения импульсов) в решении симметрично расположены относительно точки $\frac{\pi}{4}$, т.е. имеют вид

$$0,\ \beta,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2} - \beta,\ \frac{\pi}{2}, \quad \text{где} \quad \beta \in (0, \tfrac{\pi}{4}). \tag{3}$$

Это означает, что соответствующая весовая функция оценивателя $\Phi^0(\alpha)$ определяется выражением (для простоты нижний индекс k_1 опускается)

$$\Phi^0(\alpha) = \psi_1(\beta)\delta(\alpha) + \psi_2(\beta)\delta(\alpha - \beta) + \psi_3(\beta)\delta\big(\alpha - \tfrac{\pi}{4}\big) + \psi_4(\beta)\delta\big(\alpha - (\tfrac{\pi}{2} - \beta)\big) + \psi_5(\beta)\delta\big(\alpha - \tfrac{\pi}{2}\big)\,.$$

Введем вектор $\psi(\beta) = (\psi_1(\beta), \ldots, \psi_5(\beta))^\top$, состоящий из искомых весовых коэффициентов $\psi_i(\beta)$. Эти весовые коэффициенты должны удовлетворять условию несмещенности из (1), которое при подстановке функции $\Phi^0(\alpha)$, сосредоточенной на углах (3), переходит в систему линейных алгебраических уравнений

$$L(\beta)\psi(\beta) = a, \quad \text{где} \quad L(\beta) = \Big(h(0),\, h(\beta),\, h\big(\tfrac{\pi}{4}\big),\, h\big(\tfrac{\pi}{2}-\beta\big),\, h\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\Big). \tag{4}$$

При помощи правила Крамера решение $\psi(\beta)$ системы (4) может быть получено в явном аналитическом виде, причем нетрудно показать, что при $\beta \in (0, \frac{\pi}{4})$ знаки его компонент постоянны и имеют сигнатуру $e = (+1, -1, +1, -1, +1)^{\mathsf{T}}$.

Тогда предполагаемое значение функционала в проблеме моментов определяется формулой

$$\sum_{i=1}^{5} |\psi_i(\beta)| = \frac{\sqrt{2}\sin\beta\cos\beta + (1-\sqrt{2})\sin\beta\cos\beta(\sin\beta+\cos\beta)}{1-\sin\beta-\cos\beta+\sqrt{2}\sin\beta\cos\beta+(1-\sqrt{2})\sin\beta\cos\beta(\sin\beta+\cos\beta)}.$$

Произведя громоздкие выкладки и приравняв производную $\sum_{i=1}^{5}|\psi_i(\beta)|$ по β к нулю, можно получить уравнение относительно искомого параметра β:

$$\Big(\sin\big(\beta+\tfrac{\pi}{4}\big)-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2\Big[(4\sqrt{2}-4)\sin\big(\beta+\tfrac{\pi}{4}\big)-\sqrt{2}\Big]=0, \quad \beta\in(0,\tfrac{\pi}{4}),$$

откуда следует, что его решение имеет вид

$$\beta_0 = \arcsin\tfrac{2+\sqrt{2}}{4} - \tfrac{\pi}{4}. \tag{5}$$

Тогда предполагаемое решение проблемы моментов (1) при $a = (1,0,0,0,0)^{\mathsf{T}}$ (т.е. для k_1) с учетом (4) и (5) определяется выражением

$$\Phi^0(\alpha) = \frac{14+9\sqrt{2}}{2}\,\delta(\alpha) - \left(14+10\sqrt{2}-2\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{\tfrac{5}{17}+\tfrac{2}{17}\sqrt{2}}\,\right)\delta(\alpha-\beta_0) + \left(13+9\sqrt{2}\right)\delta\big(\alpha-\tfrac{\pi}{4}\big) -$$

$$- \left(14+10\sqrt{2}+2\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{\tfrac{5}{17}+\tfrac{2}{17}\sqrt{2}}\,\right)\delta\big(\alpha+\beta_0-\tfrac{\pi}{2}\big) + \frac{18+13\sqrt{2}}{2}\,\delta\big(\alpha-\tfrac{\pi}{2}\big)\,, \tag{6}$$

а значение функционала на этом допустимом элементе прямой задачи равно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\Phi^0(\alpha)|\,d\alpha = 57+40\sqrt{2}.$$

Теперь построим предполагаемое решение двойственной задачи. На основании теоремы о необходимых и достаточных условиях оптимальности [9] искомое оптимальное решение λ^0 двойственной задачи (2) должно удовлетворять соотношениям

$$|L^{\mathsf{T}}(\beta_0)\,\lambda^0| = 1 \qquad \text{и} \qquad \operatorname{sign}(\psi_i(\beta_0)) = \operatorname{sign}\Big(L^{\mathsf{T}}(\beta_0)\,\lambda^0\Big)_i, \quad i=1,\ldots,5;$$

здесь $\psi_i(\beta_0)$ — коэффициенты предполагаемого импульсного решения прямой задачи $\Phi^0(\alpha)$; они определяются формулами (4) и (5). Тогда λ^0 удовлетворяет системе уравнений

$$L^{\mathsf{T}}(\beta_0)\,\lambda^0 = e = (1,-1,1,-1,1)^{\mathsf{T}},$$

откуда

$$\lambda^0 = \Big(57+40\sqrt{2},\ 57+40\sqrt{2},\ 48+32\sqrt{2},\ -56-40\sqrt{2},\ -56-40\sqrt{2}\Big)^{\mathsf{T}}.$$

Теперь покажем, что λ^0 является допустимым элементом двойственной задачи, т.е.

$$|S(\alpha)| = |h^{\mathsf{T}}(\alpha)\lambda^0| \leqslant 1, \quad \alpha\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

Нетрудно убедиться, что

$$S(\alpha) = \left[\frac{2}{\left(1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2} \left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2+\sqrt{2}}{4} \right)^2 \right] - 1.$$

При этом $S(0) = S(\frac{\pi}{4}) = S(\frac{\pi}{2}) = 1$, а $S(\beta_0) = S(\frac{\pi}{2} - \beta_0) = -1$. Ясно, что $S(\alpha)$ является параболой относительно $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, а углы $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ и $\beta_0, \frac{\pi}{2} - \beta_0$ соответствуют ее крайним точкам и вершине. Поэтому в остальных точках $|S(\alpha)| < 1$. Итак, $|S(\alpha)| \leqslant 1$ для $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, следовательно, элемент λ^0 является допустимым. Значение функционала двойственной задачи на нем равно $\lambda_1^0 = 57 + 40\sqrt{2}$ (при оценивании k_1 вектор $a = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$).

На основании проведенного выше анализа предполагаемых решений прямой и двойственной задач заключаем, что имеет место равенство

$$a^{\mathsf{T}}\lambda^0 = \lambda_1^0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\Phi^0(\alpha)|\, d\alpha = 57 + 40\sqrt{2}.$$

Лемма. *Пусть $\Phi^0(\alpha)$ является допустимым элементом прямой задачи* (1), *а λ^0 — допустимым элементом двойственной задачи* (2) *и*

$$a^{\mathsf{T}}\lambda^0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\Phi^0(\alpha)|\, d\alpha.$$

Тогда $\Phi^0(\alpha)$ является решением прямой задачи, а λ^0 — решением двойственной задачи.

Доказательство леммы для выпуклых вариационных задач приведено, например, в [8, 9].

Итак, получено искомое решение плоской задачи калибровки для коэффициента k_1. Весовая функция оценивателя для этого параметра определяется выражением (6) (в котором $\Phi^0(\alpha) \equiv \Phi^0_{k_1}(\alpha)$), а оптимальное значение функционала $I_{0,k_1} = 57 + 40\sqrt{2}$. При этом сама оптимальная оценка имеет вид

$$\tilde{l} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi^0(\alpha) z(n(\alpha))\, d\alpha.$$

Рассуждая, как и выше, можно показать, что для параметра Γ_{12} и для параметра ε_1 (что соответствует $a = (0,0,1,0,0)^{\mathsf{T}}$ и $a = (0,0,0,1,0)^{\mathsf{T}}$) весовые функции оценивателя и оптимальные значения функционала определяются следующими формулами:

$$\Phi^0_{\Gamma_{12}}(\alpha) = \left(6+4\sqrt{2}\right)\delta(\alpha) - \left(12+8\sqrt{2}\right)\delta(\alpha-\beta_0) + \left(12+8\sqrt{2}\right)\delta\left(\alpha-\tfrac{\pi}{4}\right) -$$
$$- \left(12+8\sqrt{2}\right)\delta\left(\alpha+\beta_0-\tfrac{\pi}{2}\right) + \left(6+4\sqrt{2}\right)\delta\left(\alpha-\tfrac{\pi}{2}\right), \quad I_{0,\Gamma_{12}} = 48 + 32\sqrt{2};$$

$$\Phi^0_{\varepsilon_1}(\alpha) = -\frac{12+9\sqrt{2}}{2}\delta(\alpha) + \left(14+10\sqrt{2}-2\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{\tfrac{5}{17}+\tfrac{2}{17}\sqrt{2}}\right)\delta(\alpha-\beta_0) - \left(13+9\sqrt{2}\right)\delta\left(\alpha-\tfrac{\pi}{4}\right) +$$
$$+ \left(14+10\sqrt{2}+2\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{\tfrac{5}{17}+\tfrac{2}{17}\sqrt{2}}\right)\delta\left(\alpha+\beta_0-\tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{18+13\sqrt{2}}{2}\delta\left(\alpha-\tfrac{\pi}{2}\right), \quad I_{0,\varepsilon_1} = 56+40\sqrt{2}.$$

Весовые функции для оценок параметров k_2 и ε_2 имеют аналогичные выражения:

$$\Phi^0_{k_2}(\alpha) = \Phi^0_{k_1}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \Phi^0_{\varepsilon_2}(\alpha) = \Phi^0_{\varepsilon_1}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

5. Заключение. В работе поставлена и решена задача оптимального гарантирующего оценивания калибровочных параметров блока ньютонометров в плоском случае при ограничении на допустимые угловые ориентации блока. Построен план калибровочных экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
2. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. 3-е изд. М.: Изд-во МГУ, 2011.
3. *Голован А.А., Матасов А.И., Тарыгин И.Е.* Калибровка блока ньютонометров с асимметричными моделями показаний чувствительных элементов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 2. 107–119.
4. *Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В.* Алгоритмы калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. 13–27.
5. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующий подход и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
6. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космич. исследования. 1964. **2**, № 5. 713–718.
7. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
8. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
9. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.

Поступила в редакцию
29.06.2022

УДК 511

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ СКОРОСТИ САМОЛЕТА ПРИ ПОМОЩИ ИЗМЕРЕНИЙ ТРЕХЛУЧЕВОГО ЛИДАРА

В. М. Железнов[1]

Приводится исследование геометрических факторов в задаче оценивания скорости самолета при помощи измерений радиальных скоростей от трехлучевого доплеровского лидара. Подобные системы предлагается использовать в задачах авиационной гравиметрии как дополнение или как замену дифференциального скоростного решения спутниковой навигационной системы. Аналитическим способом получена оптимальная конфигурация направлений лучей лидара. Численным моделированием установлены конфигурации лучей, уменьшающие ковариацию ошибки оценивания вертикальной скорости самолета.

Ключевые слова: доплеровский лидар, авиационная гравиметрия, задача оценивания, геометрические факторы.

The paper presents our study on «dilution of precision» factors in the problem of estimating vehicle's velocity using a three-beam doppler lidar. Such a system has been proposed as an addition or replacement to the differential GNSS velocity solution in an airborne gravimetry system. We analytically derive optimal directions of lidar beams and use numerical simulation to obtain their attitude which minimizes the error covariance of estimated vertical velocity.

Key words: doppler lidar, airborne gravimetry, estimation problem, dilution of precision.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-64-67

Введение. Гравиметрия — наука об измерении силы тяжести на поверхности и вблизи поверхности Земли. Получаемые данные о силе тяжести могут использоваться для поиска полезных ископаемых, более точного прогнозирования орбит спутников, вычисления геоида Земли.

Для решения задач гравиметрии применяются платформенные инерциальные навигационные системы (ИНС) и бесплатформенные (БИНС). ИНС с помощью гиростабилизированной платформы физически моделирует поведение географического трехгранника. БИНС численным образом моделирует поведение географического трехгранника, и показания гравиметра формируются перепроектировкой показаний блока акселерометров, измеряющих удельную силу, на оси числового трехгранника.

---

[1] *Железнов Виктор Михайлович* — асп. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: victorzheleznov@ya.ru.

Zheleznov Viktor Mikhailovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.