В каждой точке отрезка [0, 1] существует такая окрестность, что все прообразы $\gamma'(t)$ лежат в одном полупространстве. Следовательно, все прообразы лежат в одном полупространстве. Но a и b из разных полупространств — противоречие. Значит, один из прообразов лежит в $m(a,b)\setminus\{a,b\}$ и можно воспользоваться леммой А. Теорема доказана.

Покажем, что необходимое и достаточное условие в теореме нельзя заменить более слабым условием: существует n линейно независимых векторов $f_1,\ldots,f_n$, таких, что для любых $i\in\{1,\ldots,n\}$ и $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ множество

$$\{x\in M:\langle f_j,x\rangle=c_j,\, j=1,\ldots,n,\, j\neq i\}$$

линейно связно или пусто. Это условие равносильно выпуклости M по n линейно независимым направлениям.

В качестве примера возьмем ломаную L в $\mathbb{R}^3$, последовательно соединяющую точки (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1) и (1, 1, 0).

Очевидно, что ломаная L выпукла по направлениям стандартного базиса. Если бы L удовлетворяла условиям теоремы, то нашлись бы такие три линейно независимых функционала f_1,f_2,f_3, что всякое множество $L_j(c):=\{x\in L:\langle f_j,x\rangle=c\}$ было бы линейно связно или пусто. Но тогда все $\ker f_j$ должны быть параллельны вектору (0, 0, 1): в противном случае плоскости $\{x:\langle f_j,x\rangle=c\}$ пересекают плоскость, в которой лежит ломаная L, по прямым, не параллельным этому вектору, и $L_j(c)$ при подходящем c является двухточечным. Получается, что f_1,f_2,f_3 линейно зависимы — противоречие.

Автор приносит благодарность П. А. Бородину за постановку задачи и А. Р. Алимову за ценные замечания.

Работа выполнена за счет гранта РНФ № 22–11-00129.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов А.Р.* Связность солнц в пространстве c_0 // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. **69**, № 4. 3–18.
2. *Царьков И.Г.* Свойства монотонно линейно связных множеств // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. **85**, № 2. 142–171.
3. *Алимов А.Р.* Monotone path-connectedness of strict suns // Lobachevskii J. Math. 2022. **43**, N 3. 519–527.
4. *Brosowski B., Deutsch F., Lambert J., Morris P.D.* Chebyshev sets which are not suns // Math. Ann. 1974. **212**, N 2. 89–101.
5. *Шкляев К.С.* Плоские множества, чебышёвские в какой-либо норме // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2021. № 2. 35–39.
6. *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи матем. наук. 2016. **71**, № 1(427). 3–84.

Поступила в редакцию
04.02.2022

УДК 517.925.5

КРИТЕРИЙ ЛЯПУНОВСКОЙ ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ К ЛИНЕЙНОМУ АВТОНОМНОМУ УРАВНЕНИЮ

И. Н. Сергеев[1], К. В. Уманский[2]

Установлен единый критерий приводимости линейной однородной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами при помощи как ляпуновских, так и

[1] *Сергеев Игорь Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: igniserg@gmail.com.

Sergeev Igor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.

[2] *Уманский Кирилл Валерьевич* — студ. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: umankir@yandex.ru.

Umansky Kirill Valer'evich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.

периодических преобразований. Полученное необходимое и достаточное условие на систему формулируется в терминах свойств жордановой нормальной формы ее матрицы.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, линейная система, линейное уравнение, периодическая система, ляпуновская приводимость, ляпуновское преобразование.

We establish a unified criterion for the reducibility of a linear homogeneous differential system with constant coefficients to a linear homogeneous differential equation with constant coefficients by means of both Lyapunov and periodic transformations. The resulting necessary and sufficient condition on a system is formulated in terms of properties of the Jordan normal form of its matrix.

Key words: differential equation, linear system, linear equation, periodic system, Lyapunov reducibility, Lyapunov transformation.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-55-59

Вопрос о приводимости линейной дифференциальной системы к более простому виду с сохранением определенных существенных свойств решений рассматривается издавна [1, §8; 2, гл. III, §8]. В частности (см., например, [3]), интерес для приложений представляет задача о ляпуновской приводимости системы именно к одному дифференциальному уравнению. Серьезное, причем положительное, продвижение в этой задаче было получено в работах [4, 5]. Однако оставался открытым вопрос о возможности сохранить при указанном переходе еще и свойство автономности при его наличии у исходной системы.

Для заданного *евклидова координатного векторного* пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) рассмотрим множество $\mathcal{M}^n$ *линейных однородных дифференциальных систем*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

задаваемых каждая своей *непрерывной ограниченной* матричной функцией

$$A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \|A\| \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |A(t)| < +\infty, \quad |A(t)| \equiv \sup_{|x|=1} |A(t)x|,$$

с которой в дальнейшем и будем отождествлять саму систему.

В множестве $\mathcal{M}^n$ выделим:

1) подмножество $\mathcal{C}^n$ *автономных* систем, т.е. систем $A \in \mathcal{M}^n$ с постоянными коэффициентами или, что то же, задаваемых постоянными матричными функциями $A(\cdot) = \mathrm{const}$;

2) подмножество $\mathcal{E}^n$ систем, *отвечающих уравнению*, т.е. задаваемых матричными функциями A специального вида:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

называемого *клеткой Фробениуса* и обеспечивающего возможность однозначно записывать каждую из таких систем всего лишь одним (*скалярным* для первой координаты $y \equiv x_1$ ее решения x) *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка*

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с которым в дальнейшем также будем отождествлять такую систему.

Речь пойдет о возможности путем преобразования координат упростить исходную систему, сведя ее к уравнению. Аппарат для сохранения различных свойств решений при таком переходе описывает

Определение 1 [3]. Скажем, что система $A \in \mathcal{M}^n$:

а) *ляпуновски приводима* к системе $B \in \mathcal{M}^n$, если существует невырожденное преобразование координат $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, которое, во-первых, является *ляпуновским*, т.е. удовлетворяет условиям

$$L \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_+), \quad \|L\| + \|L^{-1}\| + \|\dot{L}\| < +\infty,$$

а во-вторых, *приводит* систему A к системе

$$B(t) = A_L(t) \equiv L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

б) *подобна* системе $B \in \mathcal{M}^n$, если она приводима к системе B некоторым постоянным преобразованием $L(\cdot) = \text{const}$;

в) *T-периодически приводима* к системе $B \in \mathcal{M}^n$, если она приводима к системе B некоторым периодическим преобразованием L с периодом $T > 0$.

Чтобы упростить формулировку основного результата, опирающегося на некоторые специальные свойства жордановой нормальной формы матрицы системы, введем следующее

Определение 2. Матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, равно как и соответствующую ей автономную систему $A \in \mathcal{C}^n$, назовем *жорданово почти парной*, если каждому ее действительному собственному значению отвечает такой набор жордановых клеток, что все они, кроме, быть может, одной, разбиваются на пары клеток одинакового порядка.

Известно [5], что любая (*ограниченная*) система (1) ляпуновски приводима к некоторому уравнению, причем T-периодическая система T-периодически же приводима к T-периодическому уравнению, а если расширить класс уравнений до комплексных (с фазовым пространством $\mathbb{C}^n$ вместо $\mathbb{R}^n$), то к таким автономным уравнениям периодически (с произвольным периодом) приводима всякая автономная система.

Сложнее оказался вопрос о возможности ляпуновски привести автономную систему (1) к действительному автономному уравнению. И хотя в маломерных случаях, т.е. при $n \leqslant 2$, этот вопрос решается положительно, в остальных случаях, вообще говоря, отрицательно. В связи с этим возникла задача о нахождении необходимого и достаточного условия такой приводимости, которое и представляет

Теорема. *Для любой автономной системы $A \in \mathcal{C}^n$ следующие три утверждения равносильны:*

1) *система ляпуновски приводима к автономному уравнению;*

2) *для любого $T > 0$ система T-периодически приводима к автономному уравнению;*

3) *система жорданово почти парна.*

Доказательство. Начнем с того, что дадим следующее, так сказать, рабочее

Определение 3. Матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, равно как и соответствующую ей автономную систему $A \in \mathcal{C}^n$, будем называть *жорданово экстремальной*, если в ее жордановой форме каждому собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$ отвечает ровно одна *жорданова клетка* J_k^λ порядка k (который в этом случае максимален, так как совпадает с кратностью этого собственного значения, при этом общее число жордановых клеток, наоборот, минимально, поскольку совпадает с числом всех различных собственных значений, т.е. корней λ характеристического многочлена матрицы A).

1. Для различных преобразований $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, описанных в определении 2, верны следующие простые утверждения:

а) любое преобразование подобия является T-периодическим с любым периодом $T > 0$;

б) любое T-периодическое преобразование является ляпуновским;

в) обратное к любому ляпуновскому преобразованию является также ляпуновским;

г) композиция любых двух ляпуновских преобразований есть снова ляпуновское преобразование.

2. Если ограничиться только автономными системами из класса $\mathcal{C}^n$ и автономными уравнениями из класса $\mathcal{E}^n \cap \mathcal{C}^n$, то для таких систем и уравнений будут верны следующие утверждения:

д) система подобна другой системе тогда и только тогда, когда их жордановы формы совпадают;

е) если система подобна уравнению, то набор его коэффициентов обязан совпадать с набором коэффициентов характеристического многочлена матрицы этой системы;

ж) если система отвечает уравнению, то она жорданово экстремальна;

з) система подобна уравнению тогда и только тогда, когда она жорданово экстремальна;

и) система ляпуновски или T-периодически приводима к уравнению тогда и только тогда, когда она ляпуновски или соответственно T-периодически приводима к жорданово экстремальной системе.

3. С учетом справедливости утверждений *а–и* доказательство теоремы естественно разбивается на следующие две части.

Часть I. Пусть сначала система $A \in \mathcal{C}^n$ жорданово почти парна. Докажем, что тогда для любого $T > 0$ она T-периодически приводима к некоторой автономной жорданово экстремальной системе $B \in \mathcal{C}^n$ (которая в свою очередь подобна и тем более T-периодически приводима к автономному уравнению).

I.1. Прежде всего пусть действительному собственному значению $\alpha \in \mathbb{R}$ матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

отвечают по меньшей мере две одинаковые жордановы клетки J_k^α, J_k^α некоторого порядка $k \in \mathbb{N}$ каждая. Тогда сужение оператора A на инвариантное $2k$-мерное подпространство, соответствующее этим двум клеткам, задается в жордановом базисе матрицей

$$A^{\alpha,\alpha} \equiv \begin{pmatrix} J_k^\alpha & 0 \\ 0 & J_k^\alpha \end{pmatrix}.$$

Для любого $\gamma > 0$ с помощью *специального* $(2\pi/\gamma)$-периодического преобразования (в том же базисе)

$$L(t) = L_\gamma(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos\gamma t E_k & \sin\gamma t E_k \\ -\sin\gamma t E_k & \cos\gamma t E_k \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где E_k — единичная матрица порядка k, матрица $A^{\alpha,\alpha}$ приводима к *канонической* действительной матрице

$$A_L^{\alpha,\alpha}(t) = L(t)A^{\alpha,\alpha}L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t) = \begin{pmatrix} J_k^\alpha & \gamma E_k \\ -\gamma E_k & J_k^\alpha \end{pmatrix} \equiv A^{\alpha\pm i\gamma}, \tag{3}$$

жорданова форма которой состоит в точности из пары клеток $J_k^{\alpha+i\gamma}$ и $J_k^{\alpha-i\gamma}$.

I.2. Далее, пусть при некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta > 0$ паре комплексно-сопряженных собственных значений $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ отвечает по меньшей мере пара жордановых клеток $J_k^{\alpha+i\beta}, J_k^{\alpha-i\beta}$ одного порядка $k \in \mathbb{N}$. Тогда сужение оператора A на действительное инвариантное $2k$-мерное подпространство, соответствующее этим двум клеткам, задается канонической матрицей $A^{\alpha\pm i\beta}$ вида (3) (с заменой γ на β). Эта матрица для любого $\gamma > \beta$ приводима к матрице $A^{\alpha\pm i\gamma}$ с помощью специального $(2\pi/(\gamma-\beta))$-периодического преобразования того же вида (2) (с заменой γ на $\gamma - \beta$):

$$L(t) = L_{\gamma-\beta}(t) = L_\gamma(t)L_{-\beta}(t),$$

поскольку сначала преобразование $L_{-\beta} = L_\beta^{-1}$ приводит матрицу $A^{\alpha\pm i\beta}$ к матрице $(A^{\alpha\pm i\beta})_{L_{-\beta}} = A^{\alpha,\alpha}$, которую затем преобразование L_γ приводит к матрице $(A^{\alpha,\alpha})_{L_\gamma} = A^{\alpha\pm i\gamma}$.

I.3. Наконец, известно, что система $A \in \mathcal{C}^n$ жорданово почти парна. Тогда, следуя определению 2, выделим среди всех жордановых клеток ее матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ максимально возможное количество непересекающихся пар одинаковых клеток вида J_k^α, J_k^α или комплексно-сопряженных клеток вида $J_k^{\alpha+i\beta}, J_k^{\alpha-i\beta}$ в соответствии с предыдущим п. I.1 или I.2, в результате для некоторых действительных собственных значений α матрицы A, возможно, останутся незадействованными одиночные клетки вида J_k^α. Для каждой из этих пар клеток выберем индивидуальное (отличное от других) число $\gamma > 0$ или $\gamma > \beta$ соответственно и, разложив пространство $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму соответствующих инвариантных подпространств, зададим в них периодические преобразования L_γ и $L_{\gamma-\beta}$ согласно пп. I.1 и I.2, а в подпространствах, отвечающих одиночным клеткам, зададим тождественные преобразования.

Линейное преобразование L, определенное таким образом во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, окажется T-периодическим для наперед заданного $T > 0$, если только потребовать, чтобы все числа из конечного набора чисел вида $2\pi/\gamma$ и $2\pi/(\gamma-\beta)$ были делителями числа T — таковых потенциально имеется бесконечно много, а значит, это требование заведомо осуществимо. Матрица же полученной системы $B \in \mathcal{C}^n$ окажется жорданово экстремальной, поскольку абсолютно все ее жордановы клетки в итоге будут соответствовать разным собственным значениям.

Часть II. Пусть теперь система $A \in \mathcal{C}^n$ ляпуновски приводима к автономной жорданово экстремальной системе $B \in \mathcal{C}^n$ (или, что то же, к некоторому автономному уравнению). Докажем, что тогда система A жорданово почти парна.

II.1. Автономная система $B \in \mathcal{C}^n$ жорданово экстремальна, а значит, и жорданово почти парна. Действительно, каждому ее действительному (и не только) собственному значению соответствует всего одна жорданова клетка, что вполне согласуется с возможностью разбиения соответствующих ему клеток на пары с точностью до одной клетки.

II.2. Заметим, что данная автономная система жорданово почти парна тогда и только тогда, когда она обладает свойством *расширенной почти парности*, т.е. когда для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ все, кроме, быть может, одной, ее клетки, отвечающие собственным значениям с действительной частью α, разбиваются на пары клеток одинакового порядка — либо одинаковых действительных, либо комплексно-сопряженных. В самом деле, добавление к множеству действительных клеток с собственным значением α пар комплексно-сопряженных клеток, отвечающих комплексным собственным значениям с той же действительной частью α, не влияет на факт наличия или отсутствия жордановой почти парности в указанном расширенном смысле.

II.3. В *предположении* (см. обоснование в пп. *к–н* ниже), что в классе $\mathcal{C}^n$ автономных систем расширенная почти парность из п. II.2 инвариантна относительно ляпуновских преобразований, получим, что автономная система $A \in \mathcal{C}^n$, будучи ляпуновски приводимой к автономной системе $B \in \mathcal{C}^n$, являющейся жорданово почти парной и, стало быть, обладающей свойством расширенной почти парности, и сама обладает этим же свойством, а значит, тоже жорданово почти парна.

II.4. Для обоснования предположения, сформулированного в п. II.3, заметим, что для произвольной автономной системы верны утверждения:

к) каждому решению x соответствует пара характеристик — *показатель* (*Ляпунова* [1]) и *степень* (*Демидовича* [6]), задаваемые соответственно формулами

$$\lambda(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln|x(t)|, \quad \delta(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} \log_t \left(e^{-t\lambda(x)}|x(t)|\right), \quad \lambda(0) = \delta(0) = -\infty$$

и не меняющиеся под действием ляпуновских преобразований (примененных к решению x);

л) множество Λ всех значений показателей, которые принимаются на ненулевых решениях, совпадает с множеством всех действительных частей собственных значений матрицы системы, а множество $\Delta(\alpha)$ степеней всех решений с показателем α состоит из чисел $0, 1, \ldots, k(\alpha) - 1$, где $k(\alpha)$ — наибольший порядок жордановой клетки, отвечающей значению с действительной частью α, причем каждая из пар (α, m) *допустимых* значений $\alpha \in \Lambda$ и $m \in \Delta(\alpha) + 1 = \{1, \ldots, k(\alpha)\}$ задает *спектральное* подпространство решений $S(\alpha, m)$ с показателями либо меньшими α, либо равными α и со степенями, меньшими m;

м) по полному набору размерностей всех спектральных подпространств системы однозначно восстанавливаются количества и размерности всех жордановых клеток, отвечающих собственным значениям ее матрицы с заданными допустимыми значениями их действительной части. Например, наименьшая из таких размерностей равна числу всех жордановых клеток, отвечающих наименьшему допустимому значению $\alpha \in \Lambda$, а следующая по величине размерность больше предыдущей на число тех из них, порядок которых больше 1, причем если таковых уже нет, то она больше предыдущей на число жордановых клеток, отвечающих следующему по величине допустимому значению α, и т.д.;

н) под действием ляпуновского преобразования все спектральные подпространства переходят в подпространства тех же размерностей и с теми же парами (α, m), поэтому свойство расширенной почти парности инвариантно относительно ляпуновских преобразований, что и подтверждает справедливость предположения из п. II.3.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. *Зайцев В.А.* Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. 2003. № 1. 31–62.
4. *Сергеев И.Н.* Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 3. 25–33.
5. *Сергеев И.Н.* О приводимости линейных дифференциальных систем к линейным дифференциальным уравнениям // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 3. 39–44.
6. *Демидович Б.П.* Об одном обобщении критерия устойчивости Ляпунова для правильных систем // Матем. сб. 1965. **66**(108), № 3. 344–353.

Поступила в редакцию
20.05.2022