СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берберян С.Л.* Об ограниченности нормальных гармонических функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 2. 57–61.
2. *Носиро К.* Предельные множества. М.: ИЛ, 1963.
3. *Rung D.* Asymptotic values of normal subharmonic functions // Math. Z. 1964. **84**, N 1. 9–15.
4. *Littlewood J.* On a theorem of Fatou // J. London Math. Soc. 1927. **27**. 172–176.
5. *Привалов И.И.* Субгармонические функции. М.; Л.: Научно-техн. изд-во НКТП СССР, 1937.
6. *Tsuji M.* Littlewood theorem on subharmonic functions in a unit circle // Comment. Math. Univ. St. Pauli. 1956. **5**, N 7. 3–16.
7. *Meek J.* Subharmonic versions of Fatous theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. **30**, N 2. 313–317.
8. *Берберян С.Л.* О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга // Изв. АН АрмССР. 1980. **15**, № 4. 395–402.
9. *Берберян С.Л.* О граничных особенностях нормальных субгармонических функций // Mathematica Montisnigri. 2005–2006. **18–19**. 5–14.
10. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
11. *Bagemihl F., Seidel W.* Sequential and continuous limits of meromorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI. 1960. N 280. 1–17.
12. *Lappan P.* Fatou points of harmonic normal functions and uniformly normal functions // Math. Z. 1967. **102**, N 3. 110–114.

Поступила в редакцию
20.11.2021

УДК 517.982.256

МНОЖЕСТВА В $\mathbb{R}^n$, МОНОТОННО ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫЕ В НЕКОТОРОЙ НОРМЕ

Е. А. Савинова[1]

Для линейно связного множества M в $\mathbb{R}^n$ получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы оно было монотонно линейно связным в некоторой норме.

Ключевые слова: монотонная линейная связность, m-связность, нормированное пространство.

Conditions on a path-connected set M in $\mathbb{R}^n$ that are necessary and sufficient for M to be monotone path-connected with respect to some norm are obtained.

Key words: monotone path-connectedness, m-connectedness, normed space.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-53-55

В 2005 г. в работе [1] А. Р. Алимов ввел понятие монотонно линейно связного множества, которое оказалось весьма полезным в геометрической теории приближений. В настоящее время теория монотонно линейно связных множеств и их приложений активно развивается (см., например, [2, 3]). Напомним определение монотонно линейно связного множества.

Пусть X — нормированное пространство, ext $S(X^*)$ — множество крайних точек единичной сферы сопряженного пространства.

Непрерывная кривая $\gamma(\cdot) : [0, 1] \to X$ *монотонна*, если $f(\gamma(t))$ является монотонной функцией на отрезке [0, 1] для всякого $f \in \text{ext } S(X^*)$ [4].

Множество $M \subset X$ *монотонно линейно связно* [1], если для любых $a, b \in M$ существует такая монотонная кривая $\gamma(\cdot) \subset M$, что $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$.

[1] *Савинова Екатерина Андреевна* — студ. каф. теории функций и функционального анализа мех.-мат. ф-та МГУ; техник-программист Моск. центра фунд. и прикл. матем. e-mail: sawinowa.katia@yandex.ru.

Savinova Ekaterina Andreevna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Engineer in Computer Science, Moscow Center for Fundamentals and Applied Mathematics.

Ясно, что всякое монотонно линейно связное множество является линейно связным. Возникает естественный вопрос: при каких условиях заданное линейно связное множество в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ является монотонно линейно связным в некоторой норме? Такого рода вопросы можно ставить для разных задач. Например, в [5] исследовались условия, при которых множество является чебышёвским в некоторой норме.

Теорема. *Пусть M — замкнутое линейно связное множество в $\mathbb{R}^n$. Множество M монотонно линейно связно в некоторой норме тогда и только тогда, когда существует n линейно независимых векторов $f_1, \ldots, f_n$, таких, что для любых $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ и $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ множество*

$$M_{i_1,\ldots,i_k}(c_1, \ldots, c_k) := \{x \in M : \langle f_{i_j}, x\rangle = c_j, j = 1, \ldots, k\}$$

линейно связно или пусто.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует норма в $\mathbb{R}^n$, в которой M монотонно линейно связно. Из теоремы Крейна–Мильмана о выпуклой оболочке крайних точек следует, что найдется по крайней мере n линейно независимых функционалов $f_1, \ldots, f_n \in \operatorname{ext} S^*$. Согласно определению монотонной линейной связности пересечение M с множеством $M_{i_1,\ldots,i_k}(c_1, \ldots, c_k)$ линейно связно для любых $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ и $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Достаточность. Возьмем $\|x\|_n = \max_{j=1,\ldots,n} |f_j(x)|$ в качестве искомой нормы для размерности n. Нетрудно показать, что это действительно норма в силу линейной независисмости f_i.

Нам понадобится

Лемма А [6, замечание 9.2, теорема 9.1]. *Замкнутое множество в конечномерном нормированном пространстве монотонно линейно связно тогда и только тогда, когда оно m-связно.*

Здесь m-связность множества M означает, что для любых $a, b \in M$ выполнено неравенство

$$m(a, b) \cap M \neq \{a, b\},$$

где $m(a, b)$ — оболочка Банаха–Мазура, т.е. пересечение всех замкнутых шаров, содержащих a, b.

Докажем монотонную линейную связность множеств $M \subset \mathbb{R}^n$ индукцией по n.

В силу леммы А достаточно доказать, что M m-связно.

Пусть $n = 2$. Для рассматриваемой нормы множество $m(a, b)$ представляет собой параллелограмм $axby$ со сторонами, параллельными прямым $\ker f_1$ и $\ker f_2$. Покажем, что в нем содержатся точки из M, отличные от a, b. Пусть вначале параллелограмм невырожден, т.е. все точки a, x, b, y различны. Так как M линейно связно, то a и b соединяются кривой $\gamma \subset M$. Если в параллелограмме есть неконцевая точка из γ, то все доказано. Если такой точки нет, то γ пересекает один из двух лучей

$$\{x + \lambda(x - a) : \lambda > 0\}, \qquad \{y + \lambda(y - b) : \lambda > 0\}$$

в некоторой точке p. Тогда, поскольку пересечения множества M с каждой из прямых, содержащих эти лучи, по условию линейно связны, весь отрезок от a или b до точки p содержится в M, а значит, M содержит целую сторону параллелограмма $axby$. Если же параллелограмм вырожден, то весь отрезок $[a, b]$, с ним совпадающий, лежит в M, так как концы этого отрезка лежат в M, а сам он лежит на прямой, являющейся линией уровня f_1 или f_2.

Индуктивный переход. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$. Рассмотрим точки $a, b \in M$. Существует такая кривая $\gamma \subset M$, что $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$. Необходимо показать, что в $m(a, b)$ (параллелепипеде с гранями, параллельными гиперплоскостям $\ker f_i$, с противолежащими вершинами a, b) содержатся точки из M, отличные от a, b. Тогда можно будет воспользоваться леммой А.

Какой-то из функционалов f_j принимает различные значения в точках a и b. Пусть это будет f_1. Считаем, что $\langle f_1, a\rangle \ > \langle f_1, b\rangle$.

Спроецируем всю картинку вдоль вектора из $\bigcap_{i=2}^n \ker f_i$ на гиперплоскость $\ker f_1$. В этой гиперплоскости получим множество $M' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющее условию теоремы для следующих функционалов: $g_2 = f_2 \mid_{\ker f_1}, \ldots, g_n = f_n \mid_{\ker f_1}$. Пусть a' и b' — проекции точек a и b. По предположению индукции множество M' монотонно линейно связно в норме $\|x\|_{n-1} = \max_{j=2,\ldots,n} |g_j(x)|$, а значит, существует такая монотонная кривая $\gamma' \subset M'$, что $\gamma'(0) = a', \gamma'(1) = b'$, причем $\gamma'(t)$ лежит внутри проекции параллелепипеда для любого t из отрезка $[0, 1]$.

Покажем, что существует неконцевая точка на этой кривой, один из прообразов которой лежит в $m(a, b) \backslash \{a, b\}$. Пусть такой точки нет. Параллелепипед лежит в слое

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle f_1, b\rangle \ \leqslant \langle f_1, x\rangle \leqslant \langle f_1, a\rangle\}.$$

Тогда прообразы всех точек $\gamma'(t)$ лежат в одном из двух непересекающихся полупространств:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle f_1, x\rangle \geqslant \langle f_1, a\rangle\}, \{x \in \mathbb{R}^n : \langle f_1, x\rangle \leqslant \langle f_1, b\rangle\}.$$

В каждой точке отрезка [0, 1] существует такая окрестность, что все прообразы $\gamma'(t)$ лежат в одном полупространстве. Следовательно, все прообразы лежат в одном полупространстве. Но a и b из разных полупространств — противоречие. Значит, один из прообразов лежит в $m(a,b)\backslash\{a,b\}$ и можно воспользоваться леммой А. Теорема доказана.

Покажем, что необходимое и достаточное условие в теореме нельзя заменить более слабым условием: существует n линейно независимых векторов $f_1,\ldots,f_n$, таких, что для любых $i\in\{1,\ldots,n\}$ и $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ множество

$$\{x\in M:\langle f_j,x\rangle=c_j, j=1,\ldots,n, j\neq i\}$$

линейно связно или пусто. Это условие равносильно выпуклости M по n линейно независимым направлениям.

В качестве примера возьмем ломаную L в $\mathbb{R}^3$, последовательно соединяющую точки (0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1) и (1, 1, 0).

Очевидно, что ломаная L выпукла по направлениям стандартного базиса. Если бы L удовлетворяла условиям теоремы, то нашлись бы такие три линейно независимых функционала f_1,f_2,f_3, что всякое множество $L_j(c):=\{x\in L:\langle f_j,x\rangle=c\}$ было бы линейно связно или пусто. Но тогда все $\ker f_j$ должны быть параллельны вектору (0, 0, 1): в противном случае плоскости $\{x:\langle f_j,x\rangle=c\}$ пересекают плоскость, в которой лежит ломаная L, по прямым, не параллельным этому вектору, и $L_j(c)$ при подходящем c является двухточечным. Получается, что f_1,f_2,f_3 линейно зависимы — противоречие.

Автор приносит благодарность П. А. Бородину за постановку задачи и А. Р. Алимову за ценные замечания.

Работа выполнена за счет гранта РНФ № 22–11-00129.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов А.Р.* Связность солнц в пространстве c_0 // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. **69**, № 4. 3–18.
2. *Царьков И.Г.* Свойства монотонно линейно связных множеств // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. **85**, № 2. 142–171.
3. *Алимов А.Р.* Monotone path-connectedness of strict suns // Lobachevskii J. Math. 2022. **43**, N 3. 519–527.
4. *Brosowski B., Deutsch F., Lambert J., Morris P.D.* Chebyshev sets which are not suns // Math. Ann. 1974. **212**, N 2. 89–101.
5. *Шкляев К.С.* Плоские множества, чебышёвские в какой-либо норме // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2021. № 2. 35–39.
6. *Алимов А.Р., Царьков И.Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи матем. наук. 2016. **71**, № 1(427). 3–84.

Поступила в редакцию
04.02.2022

УДК 517.925.5

КРИТЕРИЙ ЛЯПУНОВСКОЙ ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ К ЛИНЕЙНОМУ АВТОНОМНОМУ УРАВНЕНИЮ

И. Н. Сергеев[1], **К. В. Уманский**[2]

Установлен единый критерий приводимости линейной однородной дифференциальной системы с постоянными коэффициентами к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами при помощи как ляпуновских, так и

[1] *Сергеев Игорь Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: igniserg@gmail.com.

Sergeev Igor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.

[2] *Уманский Кирилл Валерьевич* — студ. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: umankir@yandex.ru.

Umansky Kirill Valer'evich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.