

7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

8. Хатпелль Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Пер. с англ. М.: Мир, 1976.

9. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009.

Поступила в редакцию
31.08.2022

УДК 532.591, 531.5.031

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОМАННЫХ ТРЕЩИН

А. В. Звягин¹, А. С. Удалов²

В процессе развития различных микродефектов в телах могут образовываться сложные системы трещин произвольной конфигурации. В работе представлена методика численного моделирования сложных ломаных трещин, позволяющая анализировать такие системы. При помощи предложенного авторами метода удается найти поля напряжений, перемещений, а также коэффициенты интенсивности напряжений, предоставляющие возможность сделать вывод о влиянии особенностей рассмотренной конфигурации на устойчивость трещины. Также приведено сравнение с результатами других авторов в задаче о двухзвенной трещине.

Ключевые слова: механика разрушения, трещины, коэффициенты интенсивности напряжений.

With the growth of various microdefects in bodies, complex systems of cracks of arbitrary configuration can be generated. This paper presents a technique for numerical simulation of complex branched cracks, which makes it possible to analyze such systems. Using the method proposed by the authors, it is possible to find the stress and displacement fields as well as the stress intensity factors, the analysis of which leads to the conclusion about the influence of the considered configuration on the crack stability. The paper also contains the comparison with the results of other authors in the problem of a two-link crack.

Key words: fracture mechanics, cracks, stress intensity factors.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-44-48

1. Введение. Разрушение различных объектов из-за наличия в них дефектов — крайне распространенное явление. Один из возможных вариантов таких дефектов — трещины. Их влияние на прочность тел изучает механика разрушения, важным разделом которой является механика трещин в упругой среде. Несмотря на то что процесс роста трещин сопровождается образованием области пластических деформаций, в некоторых случаях, как показано в [1–6], анализировать устойчивость трещин и прогнозировать их развитие можно на основе решения, полученного в рамках линейной теории упругости. В таких задачах не только описывается напряженно-деформированное состояние среды, но и отыскиваются особые величины — коэффициенты интенсивности напряжений. Так как для их определения необходимо исследовать, вообще говоря, бесконечные напряжения в вершинах трещин, то при моделировании данных сред с помощью численных методов приходится накладывать на точность полученного решения достаточно высокие требования. Ввиду этого в последнее время для подобных задач активно развиваются так называемые методы граничных элементов [7–9].

В настоящей работе предложена методика моделирования сред с ломаными трещинами сложной конфигурации с использованием одного из видов численных методов граничных элементов. Также описан алгоритм поиска коэффициентов интенсивности напряжений, основанный на асимптотическом разложении М. Уильямса [10–12]. Эффективность разработанных авторами методик

¹ Звягин Александр Васильевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zvsasha@rambler.ru.

Zvyagin Alexander Vasil'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Wave and Gas Dynamics.

² Удалов Артем Сергеевич — асп. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: udalets@inbox.ru.
Udalov Artem Sergeevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Wave and Gas Dynamics.

продемонстрирована путем сравнения с результатами других публикаций в известной задаче о двухзвенной ломаной трещине. Применение данных методов для анализа сред с большими системами коллинеарных прямолинейных трещин подробно описано в [13, 14].

2. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную линейно-упругую среду, ослабленную сложной ломаной трещиной, конфигурация которой показана на рис. 1.

В случае плоской статической задачи механики разрушения под трещиной понимается разрыв вектора перемещений $u(x, y)$ на некоторой заданной кривой. В настоящей работе рассматривается четырехзвенная ломаная $ABCDE$. Среда находится под действием уравновешенных нагрузок p , приложенных на бесконечности (рис. 1). Берега трещины свободны от нагрузки. Далее используются следующие обозначения: u_x, u_y — для компонент вектора перемещений; $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ — для компонент тензора напряжений; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Так как среда предполагается линейно-упругой, компоненты тензора напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия и условию совместности деформаций, записанного в напряжениях:

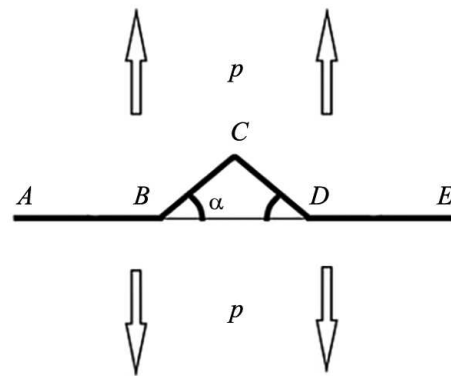


Рис. 1. Среда, ослабленная ломаной трещиной, под действием уравновешенных нагрузок, приложенных на бесконечности

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \tag{1}$$

В силу линейности системы уравнений решение исходной задачи можно представить в виде суммы решений двух задач. Первая из них — задача о трещине под действием напряжений на ее берегах. Вторая — задача о среде без трещины под действием исходных напряжений, приложенных на бесконечности. Решением второй задачи является однородное поле напряжений, поэтому интерес представляет только поиск напряженно-деформированного состояния среды, соответствующего первой задаче. Величины компонент тензора напряжений на берегах трещины в ней задаются так, чтобы после суммирования двух решений вектор напряжений на берегах был нулевым.

3. Методика моделирования. Решение будем искать численно, используя методику, предложенную авторами и описанную подробно в [13, 14]. В [15] показано, что в плоских задачах теории упругости системе уравнений (1) тождественно удовлетворяют напряжения, взятые в форме Колосова–Мусхелишвили:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\phi(z), \psi(z)$ — произвольные голоморфные функции комплексного переменного $z = x + iy$.

В этом случае перемещения могут быть найдены по следующей формуле:

$$2\mu(u_x + iu_y) = k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \tag{3}$$

Здесь μ — модуль сдвига, коэффициент k зависит от рассматриваемой задачи. Для плосконапряженного состояния $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$, для состояния плоской деформации $k = 3 - 4\nu$. Верхняя черта в (2), (3) обозначает комплексное сопряжение. Функции для построения решения конкретной задачи ищутся исходя из граничных условий.

Функции $\phi(z), \psi(z)$, благодаря которым строятся все требуемые поля, предлагается искать в виде линейных комбинаций решений некоторых вспомогательных задач теории упругости. Таким образом, основой предлагаемого метода является представление искомых функций в виде конечных функциональных рядов. Функциями разложения являются решения следующих двух краевых задач для отрезка заданной длины h .

Задача I

$$y = 0; \quad |x| < h: \quad [u_y] = D_y(x); \quad \sigma_{xy} = 0.$$

Задача II

$$y = 0; \quad |x| < h: \quad [u_x] = D_x(x); \quad \sigma_{yy} = 0.$$

Квадратные скобки означают разность краевых значений соответствующей компоненты перемещений для значений аргумента $y = 0^\pm$; D_x, D_y — величины скачков перемещений. Подробное решение

задачи I в случае плоской деформации было описано в [13]. Результатом является следующее представление:

$$\phi'(z) = \frac{1}{2}T'(z), \quad \psi'(z) = -\frac{z}{2}T''(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}zT'(z) + \frac{1}{2}T(z), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} T'(z) - y \operatorname{Im} T''(z), \quad \sigma_{xy} = -y \operatorname{Re} T''(z), \quad \sigma_{yy} = \operatorname{Re} T'(z) + y \operatorname{Im} T''(z), \\ 2\mu u_x &= (1 - 2\nu) \operatorname{Re} T(z) - y \operatorname{Im} T'(z), \quad 2\mu u_y = 2(1 - \nu) \operatorname{Im} T(z) - y \operatorname{Re} T'(z), \end{aligned} \quad (5)$$

$$T(z) = \frac{\mu}{1 - \nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{D_y(t)}{t - z} dt. \quad (6)$$

Аналогично для задачи II можно получить

$$\phi(z) = -\frac{1}{2}Q(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}(zQ(z))', \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} Q'(z) - y \operatorname{Im} Q''(z), \quad \sigma_{xy} = -\operatorname{Im} Q'(z) - y \operatorname{Re} Q''(z), \quad \sigma_{yy} = y \operatorname{Im} Q''(z), \\ 2\mu u_x &= 2(1 - \nu) \operatorname{Re} Q(z) - y \operatorname{Im} Q'(z), \quad 2\mu u_y = (1 - 2\nu) \operatorname{Im} Q(z) - y \operatorname{Re} Q'(z), \end{aligned} \quad (8)$$

$$Q(z) = \frac{\mu}{1 - \nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h \frac{D_x(t)}{t - z} dt. \quad (9)$$

Таким образом, решения вспомогательных задач полностью определяются интегралами типа Коши, которые в случае взятия величин скачков $D_x(t)$, $D_y(t)$ определенного заданного вида могут быть вычислены аналитически. В [13, 14] нами были рассмотрены постоянная, линейная, квадратичная и корневая зависимости. В алгоритме используются только две заключительные из вышеперечисленных.

Численное определение полей напряжений и перемещений в исходной задаче основывается на следующем алгоритме. Трещина разбивается на прямолинейные отрезки длиной $2h$. На каждом из них рассматриваются две задачи о нормальном и касательном скачках перемещений неизвестной величины, но заданного функционального вида. В нашем случае это корневой вид для крайних отрезков и квадратичный вид для всех остальных. Каждый такой отрезок является граничным элементом. Искомые величины — неизвестные коэффициенты функций $D_x(t)$, $D_y(t)$ каждого элемента. Формулы (4)–(9) позволяют вычислять напряжения и перемещения, созданные одним элементом, в некоторой точке среды с координатами, рассматриваемыми в локальной системе с началом в центре взятого элемента. Эти напряжения будут линейно зависеть от коэффициентов искомых величин скачков $D_x(t)$, $D_y(t)$. Просуммировав напряжения всех граничных элементов в какой-то одной точке границы и приравняв к заданной величине, получим одно уравнение относительно искомых коэффициентов. Таким образом, взяв за такие точки центры элементов, будем иметь $2N$ уравнений в задаче с разбиением трещины на N элементов. При выполнении этих уравнений наше суммарное решение будет удовлетворять граничным условиям исходной задачи в некотором дискретном наборе точек границы. Заметим, что каждое вспомогательное решение построено таким образом, что тождественно удовлетворяет системе дифференциальных уравнений состояния среды и в силу линейности этой системы их сумма также является решением. Чтобы получить замкнутую линейную систему уравнений для коэффициентов функций $D_x(t)$, $D_y(t)$ каждого элемента, дополним граничные условия требованиями непрерывности скачков и их производных на концах необходимого количества соседних элементов. Решив данную систему линейных уравнений, найдем искомое разложение решения исходной задачи в аналитическом виде. С его помощью можно отыскать напряжения и перемещения в любой точке среды.

Одной из важнейших характеристик задач механики разрушения являются коэффициенты интенсивности напряжений. Они описывают особенность в концах трещины и дают возможность проанализировать ее устойчивость и направление роста. По определению

$$K_I = \lim_{s \rightarrow 0} \sigma_{yy}(s) \sqrt{2\pi s}, \quad K_{II} = \lim_{s \rightarrow 0} \sigma_{xy}(s) \sqrt{2\pi s}. \quad (10)$$

Здесь s — расстояние от вершины трещины до точки среды, в которой взяты напряжения. Искать коэффициенты интенсивности напряжений предлагается численно по методике авторов [14]. Она

базируется на представлении Уильямса [10–12] полей напряжений в окрестности конца трещины, берега которой свободны от нагружения:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m f_n^{m,ij}(\theta) r^{n/2-1}. \tag{11}$$

В данном разложении r, θ — полярные координаты в системе отсчета, начало которой находится в конце трещины. Нулевой угол соответствует линии продолжения трещины. Функции $f(\theta)$ — угловые распределения, вид которых известен и неизменен для любой конфигурации среды. Параметр m отвечает за тип нагружения: $m = 1$ соответствует нормальному отрыву, $m = 2$ — случаю поперечного сдвига. Таким образом, от конфигурации среды зависят только коэффициенты a_n^m . Оставляя лишь конечное число членов ряда, можно найти приближенное аналитическое представление компонент тензора напряжений, моделирующее напряжения в малой окрестности конца трещины. После численного определения напряжения для дискретного набора точек по предложенному ранее алгоритму можно, используя метод наименьших квадратов, получить систему уравнений для коэффициентов разложения. Подставив (11) в (10), будем иметь

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1^1 f_1^{1,yy}(0), \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} a_1^2 f_1^{2,xy}(0).$$

Таким образом, отыскав первые коэффициенты асимптотического разложения Уильямса, сможем найти коэффициенты интенсивности напряжений. При помощи описанных методик авторам удалось с высокой точностью смоделировать поведение сред, ослабленных системой коллинеарных трещин, в том числе и бесконечной периодической системой, при различных конфигурациях нагружения [14].

4. Результаты. Для тестирования эффективности предложенных методов и их применимости к задачам о ломаных трещинах предлагается рассмотреть хорошо известную задачу о трещине ABC (рис. 1) в бесконечной линейно-упругой среде [16, 17]. Зависимость коэффициентов интенсивности напряжений в вершине C от угла α , определяющего направление излома, и численные результаты работы [16] представлены в таблице.

Угол α	K_I	K_I [16]	K_{II}	K_{II} [16]
15	1.6621	1.6619	0.4749	0.4777
30	1.3502	1.3573	0.8342	0.8528
45	0.9215	0.9322	1.0022	1.0499
60	0.4808	0.4865	1.0472	1.0392

Трещина рассматривается с одинаковой длиной звеньев $L = 1$. Первое звено расположено на оси $x: y = 0^\pm, |x| < L/2$. На бесконечности приложена нормальная нагрузка единичной величины $\sigma_{yy} = p = 1, \sigma_{xy} = 0$. Как видно из таблицы, имеем очень хорошее соответствие. Также результаты, полученные при помощи данной методики, соответствуют результатам, представленным в [17]. Расчеты произведены с разбиением трещины на 100 граничных элементов.

Теперь обратимся к исходной задаче о четырехзвенной трещине под действием нормальной нагрузки, приложенной на бесконечности. В этом случае удобно рассматривать не коэффициенты интенсивности напряжения, а так называемые коэффициенты влияния — отношения коэффициентов интенсивности напряжений, полученных в поставленной задаче, к коэффициентам в задаче о прямолинейной трещине такой же длины под действием такой же нагрузки.

Так как нагрузка нормальная по отношению к звеньям, концы которых рассматриваются, основной интерес представляет первый коэффициент влияния. Его зависимость от угла α показана на рис. 2 сплошной линией. Стоит отметить, что в задачах о ломаных трещинах под действием нагрузок заданной конфигурации также логично рассмотреть коэффициент интенсивности напряжений, отнесенный к длине проекции трещины на ось OX . Его зависимость показана на рис. 2 пунктиром.

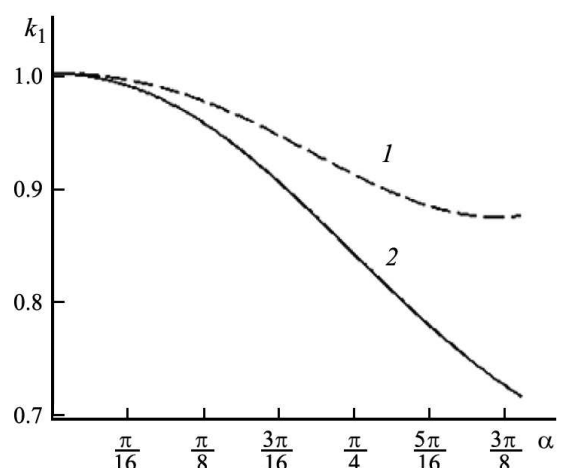


Рис. 2. Зависимость коэффициента влияния k_1 от угла α : 1 — коэффициент интенсивности напряжений, отнесенный к длине трещины; 2 — коэффициент интенсивности напряжений, отнесенный к длине проекции

Расчеты произведены с разбиением трещины на 200 граничных элементов. Как видно из графика, наличие излома уменьшает коэффициент интенсивности по сравнению с конфигурацией пря-

молинейной трещины. С точки зрения устойчивости можно считать, что ломаная трещина более устойчивая, чем прямолинейная.

5. Заключение. Исходя из результатов, представленных в настоящей работе, можно утверждать, что разработанная авторами методика моделирования сред с трещинами позволяет искать с достаточной для приложений точностью все необходимые параметры в задачах о ломаных трещинах. Также можно сделать вывод о том, что наличие излома рассмотренной конфигурации в трещине делает ее более устойчивой по сравнению с прямолинейной трещиной такой же длины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Orowan E.* Energy criteria of fracture // *Weld. J.* 1955. **34**, N 3. 1576–1606.
2. *Irwing G.R.* Fracture dynamics // *Fracturing in metals.* Cleveland: ASM, 1948. 147–166.
3. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *J. Appl. Mech.* 1968. **35**. 379–386.
4. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // *Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения.* М.: Мир, 1975. 204–335.
5. *Cherepanov G.P.* Crack propagation in continuous media // *J. Appl. Math. and Mech.* 1967. **31**. 503–512.
6. *Slepyan L.I.* Models and phenomena in fracture mechanics. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer, 2002.
7. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках / Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
8. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
9. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике / Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
10. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* 1952. **19**. 526–528.
11. *Williams M.L.* On the stress distribution at the base of a stationary crack // *ASME J. Appl. Mech.* 1957. **24**. 109–114.
12. *Hello G., Tahar M.B., Roelandt I.M.* Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *Int. J. Solids and Struct.* 2012. **49**. 556–566.
13. *Звягин А.В., Удалов А.С.* Метод разрывных смещений высокого порядка точности в механике трещин // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2020. № 6. 34–39.
14. *Zvyagin A.V., Udalov A.S., Shamina A.A.* Boundary element method for investigating large systems of cracks using the Williams asymptotic series // *Acta Astronaut.* 2022. **194**. 480–487.
15. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
16. *Chatterjee S.N.* The stress field in the neighborhood of a branched crack in an infinite elastic sheet // *Int. J. Solids and Struct.* 1975. **11**. 521–538.
17. *Lo K. K.* Analysis of branched cracks // *ASME J. Appl. Mech.* 1978. **45**, N 4. 797–802.

Поступила в редакцию
07.09.2019