

Механика

УДК 532.582

**ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ВИТКА С ТОКОМ ТЕЛА
ИЗ АНИЗОТРОПНОГО НАМАГНИЧИВАЮЩЕГОСЯ ЭЛАСТОМЕРА
С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Д. И. Меркулов¹, Д. А. Пелевина², В. А. Турков³, В. А. Налетова⁴

В работе исследовано движение сферического тела из анизотропного намагничивающегося эластомера в вязкой жидкости под действием магнитного поля витка с током. Предложена математическая модель движения такого тела с учетом взаимодействия (качения, скольжения) с наклонной плоскостью. Построены расчетные траектории движения тела из начального положения на оси витка при включении магнитного поля. Определены параметры, при которых реализуется движение по наклонной поверхности. Вычислено максимальное отклонение тела от оси витка при различных параметрах задачи.

Ключевые слова: анизотропное намагничивающееся тело, траектория, неоднородное магнитное поле, магнитная сила, момент магнитной силы, взаимодействие тела с поверхностью.

In this paper, the motion of a spherical body with anisotropic magnetizable elastomer in a viscous liquid under the action of a magnetic field of the coil with current is investigated. A mathematical model of such a body motion taking into account the interaction (rolling, sliding) with the inclined plane is proposed. Calculated trajectories of the body movement from the initial position on the coil axis when the magnetic field is turned on are plotted. Parameters are determined at which the movement along the inclined plane is realized. Maximum deviation of the body from the coil axis for various problem parameters is calculated.

Key words: anisotropic magnetizable body, trajectory, non-uniform magnetic field, magnetic force, magnetic force moment, body interaction with the surface.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-39-44

Введение. В настоящее время научный интерес к движению тел из намагничивающихся эластомеров вызван перспективой их использования при создании мобильных роботов, актуаторов и других устройств. Намагничивающиеся эластомеры (НЭ) — это композитные среды, состоящие из упругой полимерной основы и распределенных в ее объеме ферромагнитных частиц. Изготавливают их, например, путем создания однородной намагничивающейся суспензии жидкого силикона и феррочастиц с последующей полимеризацией (застыванием). На основе данных материалов могут быть созданы мобильные роботы [1–3], которые не содержат внутри себя моторов, источников тока, иных механических элементов и способны двигаться автономно во внешнем магнитном поле. Если полимеризация намагничивающейся суспензии осуществляется в однородном магнитном поле, то феррочастицы могут выстроиться в цепочки, направленные вдоль вектора напряженности поля. В этом случае НЭ приобретает анизотропные свойства и становится так называемым анизотропным

¹ Меркулов Дмитрий Игоревич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. лаб. физико-химической гидродинамики НИИ механики МГУ, e-mail: merkulovdima@mail.ru.

Merkulov Dmitrii Igorevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Physical and Chemical Hydrodynamics.

² Пелевина Дарья Андреевна — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: pelevina.daria@gmail.com.

Pelevina Daria Andreevna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.

³ Турков Владимир Андреевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. лаб. физико-химической гидродинамики НИИ механики МГУ, e-mail: turkov@imec.msu.ru.

Turkov Vladimir Andreevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Physical and Chemical Hydrodynamics.

⁴ Налетова Вера Арсеньевна — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. лаб. физико-химической гидродинамики НИИ механики МГУ, e-mail: naletova@imec.msu.ru.

Naletova Vera Arsenyevna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Laboratory of Physical and Chemical Hydrodynamics.

намагничивающимся эластомером (АНЭ). В современной науке широко представлены исследования мобильных роботов, содержащих элементы из данных анизотропных материалов. Прототипы таких устройств приведены в работах [1, 2]. Магнитные свойства АНЭ изучены экспериментально в статьях [4, 5]. В работе [6] теоретически установлена связь магнитных свойств АНЭ с микроскопическими параметрами материала. В работе [5] получена формула для силы, действующей на сферическое тело из АНЭ со стороны неоднородного магнитного поля. Согласно этой формуле, если тело находится на оси осесимметричного магнитного поля (например, на оси электромагнитной катушки или витка с током), магнитная сила может иметь компоненту, перпендикулярную этой оси.

В настоящей работе изучено движение сферического тела из АНЭ в окружающей вязкой жидкости под действием осесимметричного неоднородного магнитного поля витка с током. При этом учитывается возможность движения тела по одной из наклонных плоскостей, в начальный момент поддерживающих тело на оси витка с током. Предложена соответствующая математическая модель, построены расчетные траектории движения тела. Найдены параметры, при которых тело движется вдоль наклонной плоскости, заметно отклоняясь от оси витка.

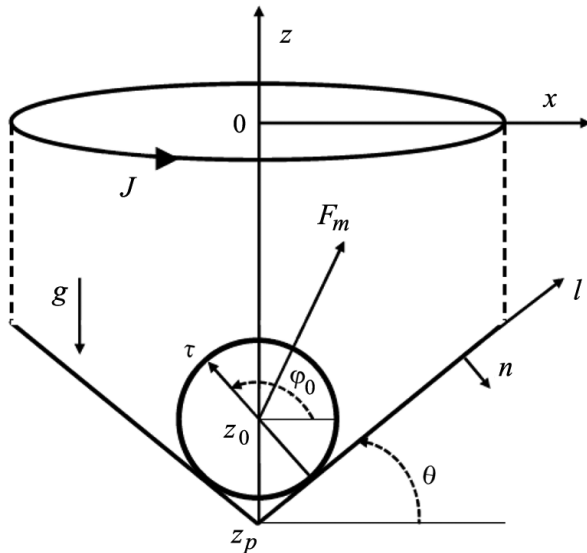


Рис. 1. Схема постановки задачи

Пусть центр сферического тела в начальный момент времени располагается в точке $(0, z_0)$ на оси витка. Добиться этого в эксперименте можно, например, поместив тело внутри угла, образованного двумя симметричными относительно плоскости $x = 0$ и параллельными оси y плоскостями, пересекающимися в точке $(0, z_p)$ плоскости $y = 0$ ($z_p = z_0 - R_b / \cos \theta$). Плоскость справа от тела наклонена под углом $\theta = \text{const}$ к горизонтальной плоскости (см. рис. 1). Вектор τ в начальный момент времени находится в плоскости (x, z) и образует с осью x угол $\varphi = \varphi_0$. В любой момент времени для вектора τ справедливо выражение $\tau = \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_z$. Проекция угловой скорости вращения тела на ось y определяется равенством $\omega = -d\varphi/dt$. Введем обозначения ($\mu^{(e)}$ — магнитная проницаемость окружающей жидкости):

$$a_1 = \frac{\mu^{(e)} - \mu^{(i)} - a}{2\mu^{(e)} + \mu^{(i)} + a}, \quad a_2 = \frac{\mu^{(e)} - \mu^{(i)}}{2\mu^{(e)} + \mu^{(i)}}, \quad k_\mu = a_1 \cos^2 \alpha + a_2 \sin^2 \alpha, \quad \cos \alpha = (\tau \mathbf{H})/H. \quad (1)$$

Со стороны магнитного поля на тело действуют сила \mathbf{F}_m и момент силы \mathbf{M}_m , определяемые по формулам ($V_b = 4\pi R_b^3/3$ — объем тела) [5]

$$\mathbf{F}_m = -3/(4\pi)\mu^{(e)}V_b \left(k_\mu \nabla H^2/2 - (a_2 - a_1)(\tau \mathbf{H})(\nabla_i H_j)\tau_\perp^j e^i \right), \quad \tau_\perp = \tau - \cos \alpha e_H, \quad e_H = \mathbf{H}/H, \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_m = K \left[\tau \mathbf{H} \right] (\tau \mathbf{H}), \quad K = 3aR_b^3 \mu^{(e)2} / \left((2\mu^{(e)} + \mu^{(i)} + a)(2\mu^{(e)} + \mu^{(i)}) \right). \quad (3)$$

На тело действуют момент и сила вязкого сопротивления, а также сила Архимеда со стороны окружающей жидкости и сила тяжести, определяемые следующим образом (\mathbf{v} — вектор скорости центра тела):

$$M_{\text{visc}_y} = 8\pi\eta_s R_b^3 \dot{\varphi}, \quad \mathbf{F}_{\text{visc}} = -6\pi\eta_s R_b \mathbf{v}, \quad \mathbf{F}_A = \rho_s g V_b e_z, \quad \mathbf{F}_g = -m_b g e_z. \quad (4)$$

Модель движения с учетом взаимодействия с поверхностью. Рассматривается движение сферического тела из АНЭ радиуса R_b и массы m_b в неоднородном магнитном поле \mathbf{H} витка с током J , центр которого является началом системы координат, а ось совпадает с вертикальной осью z , ось x направлена вправо (см. рис. 1). Далее векторы базиса будут обозначены через e_i, e^i . Тело окружено жидкостью с вязкостью η_s и плотностью ρ_s . Пусть магнитная проницаемость АНЭ имеет вид [7]

$$\mu_{ij}^b = \mu^{(i)} g_{ij} + a \tau_i \tau_j \mu^{(i)} = \text{const} > 0,$$

$$a = \text{const} > 0, \quad g_{ij} = e_i e_j, \quad i = x, y, z, \quad j = x, y, z.$$

Здесь τ_i — компоненты вектора анизотропии τ в теле из АНЭ, который является единичным замороженным в анизотропную среду вектором, направленным вдоль цепочек феррочастиц.

Также на тело действует сила сухого трения \mathbf{F}_{fr} , если оно касается наклонной плоскости. Уравнения движения сферического тела из АНЭ с учетом действия указанных сил и моментов примут вид

$$(m_b + \rho_s V_b/2)\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{F}_m + \mathbf{F}_{\text{visc}} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_g) + \mathbf{F}_{\text{fr}} = \mathbf{F}' + \mathbf{F}_{\text{fr}}, \quad (5)$$

$$I_b \dot{\boldsymbol{\omega}} = (M_{m_y} + M_{\text{visc}_y}) + [\mathbf{r}_t \mathbf{F}_{\text{fr}}]_y = M'_y + [\mathbf{r}_t \mathbf{F}_{\text{fr}}]_y. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{r}_t — радиус-вектор точки касания сферического тела и наклонной плоскости относительно центра тела ($|\mathbf{r}_t| = R_b$), $I_b = 2m_b R_b^2/5$ — момент инерции сферического тела. Здесь не учитываются зависимости вязких сил и моментов вязких сил, а также зависимость силы присоединенной массы от расстояния до стенки [8, 9].

В начальный момент времени, если вектор анизотропии не параллелен магнитному полю, магнитная сила может иметь составляющую вдоль оси x . Далее для примера рассмотрим ситуацию, когда тело начинает двигаться вправо. Это может реализоваться, например, когда в начальный момент времени $\boldsymbol{\tau} \mathbf{H} > 0$, $\tau_x < 0$ и на оси витка с током $H_z > 0$. При этом тело может двигаться вдоль правой поверхности. Условия движения по данной поверхности (или нахождения на ней) имеют следующий вид (N — реакция опоры, z_b — координата центра тела):

$$N = \mathbf{n} \mathbf{F}' > 0, \quad z_b = x \operatorname{tg} \theta + z_0. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор нормали к наклонной поверхности с компонентами $(\sin \theta, -\cos \theta)$. Если тело находится на наклонной плоскости и выполнены условия (7), то уравнения (5) и (6) можно записать следующим образом (\mathbf{l} — вектор с компонентами $(\cos \theta, \sin \theta)$, лежащий в плоскости $y = 0$ и направленный вдоль наклонной поверхности):

$$(m_b + \rho_s V_b/2)\dot{v}_l = \mathbf{l} \mathbf{F}' + F_{\text{fr}}, \quad v_l = \mathbf{l} \mathbf{v}, \quad (8)$$

$$-I_b \ddot{\varphi} = M'_y - R_b F_{\text{fr}}. \quad (9)$$

Возможны два режима движения по поверхности — качение и скольжение. При качении справедливо равенство $v_l = -R_b \dot{\varphi}$, подставив которое в уравнение (8), будем иметь ($m'_b = m_b + \rho_s V_b/2$)

$$m'_b (-R_b \dot{\varphi}) = \mathbf{l} \mathbf{F}' + F_{\text{fr}}, \quad (10)$$

$$-I_b \ddot{\varphi} = M'_y - R_b F_{\text{fr}}. \quad (11)$$

Выразив угловое ускорение из (11) и подставив в (10), получим выражение для F_{fr} :

$$F_{\text{fr}} = (m'_b M'_y R_b - I_b (\mathbf{l} \mathbf{F}')) / (m'_b R_b^2 + I_b). \quad (12)$$

Условие качения имеет следующий вид (k_{fr} — коэффициент трения):

$$\left| m'_b M'_y R_b - I_b (\mathbf{l} \mathbf{F}') \right| / (m'_b R_b^2 + I_b) \leq k_{\text{fr}} N, \quad N = \mathbf{n} \mathbf{F}' > 0. \quad (13)$$

Если условие качения (13) выполнено, то необходимо решать одно из уравнений (10), (11) совместно с выражением $v_l = -R_b \dot{\varphi}$, а для вычисления F_{fr} следует использовать равенство (12).

Если условие (13) не выполнено, то качения сферического тела по наклонной плоскости нет и реализуется режим скольжения. При этом необходимо решать уравнения (8), (9), а F_{fr} задавать следующим образом:

$$F_{\text{fr}} = \begin{cases} \mathbf{l} \mathbf{F}', & \text{если } v_l = 0 \text{ и } |\mathbf{l} \mathbf{F}'| < k_{\text{fr}} N; \\ k_{\text{fr}} N, & \text{если } v_l \neq 0 \text{ или } |\mathbf{l} \mathbf{F}'| > k_{\text{fr}} N. \end{cases}$$

Если тело отрывается от поверхности ($N \leq 0$ или $z_b > x \operatorname{tg} \theta + z_0$), то следует решать уравнения (5), (6) с учетом (1)–(4) и уравнения $F_{\text{fr}} = 0$.

Для замыкания системы уравнений необходимо задать распределение магнитного поля \mathbf{H} . Неоднородное магнитное поле витка радиуса R с током J по закону Био–Савара–Лапласа можно записать в виде ($c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с — скорость света в вакууме):

$$\mathbf{H} = \frac{2JR}{c} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \beta \mathbf{e}_x + (R - x \cos \beta) \mathbf{e}_z}{(x^2 + z^2 + R^2 - 2Rx \cos \beta)^{3/2}} d\beta.$$

Начальные условия в рассматриваемом случае имеют вид

$$t = 0: \quad x = 0, \quad z = z_0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = \varphi_0.$$

Следует отметить, что при данных начальных условиях изотропное сферическое тело из НЭ в силу симметрии всегда будет двигаться по оси витка с током. Также будет двигаться и анизотропное сферическое тело, если вектор анизотропии $\boldsymbol{\tau}$ в начальный момент времени параллелен оси витка с током. Далее будут численно исследованы траектории движения тела, когда вектор анизотропии $\boldsymbol{\tau}$ в начальный момент времени не параллелен оси витка и направлению напряженности приложенного магнитного поля. При этом тело начинает двигаться вправо и может какое-то время перемещаться по правой поверхности. Рассматривается плоскопараллельное движение тела, когда центр тела движется в плоскости (x, z) .

Численное моделирование движения тела. Согласно предложенной модели была разработана компьютерная программа, позволяющая построить траекторию движения сферического тела из АНЭ и найти максимальное отклонение тела x_{\max} от оси витка. Расчеты проводились при следующих параметрах: $z_0 = -3.4$ см, $\varphi_0 = 150^\circ$, $m_b = 0.135$ г, $R_b = 0.295$ см, $\mu^{(i)} = 1.2$, $a = 0.22$, $\rho_s = 1.17$ г/см³, $\eta_s = 0.3$ П, $\mu^{(e)} = 1$, $g = 980$ см/с², $k_{\text{fr}} = 10$, $J = 3 \cdot 10^{11} \cdot j$ эл. стат. ед. тока, $R = 2.26$ см. Ток j в амперах и угол наклона плоскости к горизонту θ варьировались.

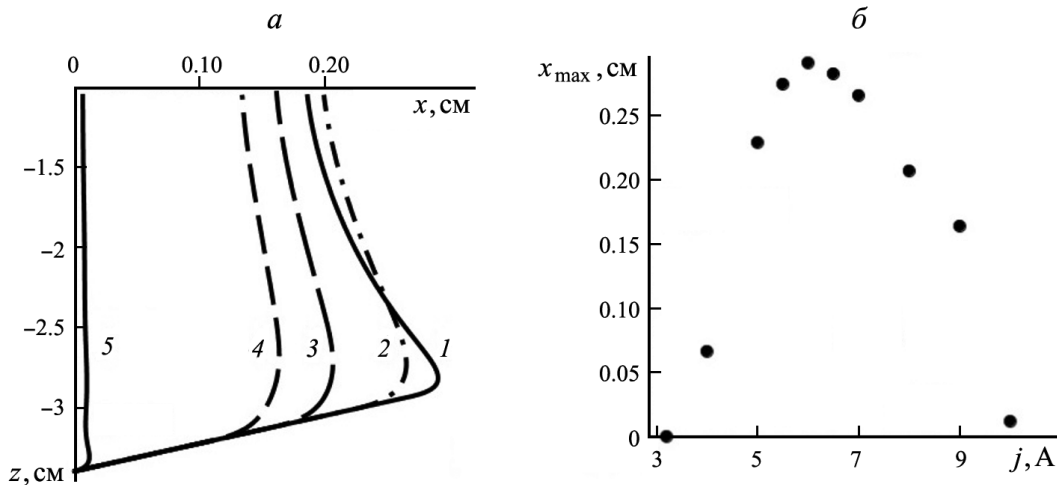


Рис. 2. Траектории тела при угле $\theta = 60^\circ$ и различных значениях тока в витке j : 1 — $j = 6$ А, 2 — 7 А, 3 — 8 А, 4 — 9 А, 5 — 10 А (а) и зависимость x_{\max} от j (б)

Траектории движения тела при различных значениях тока j и фиксированном угле $\theta = 60^\circ$ приведены на рис. 2, а. Обнаружено, что движение вдоль поверхности с последующим отрывом от нее реализуется при значениях тока из интервала $5.4 \text{ А} \leq j \leq 9 \text{ А}$. При $3.3 \text{ А} \leq j < 5.4 \text{ А}$ тело движется по поверхности без отрыва и занимает некоторое положение равновесия на ней. Горизонтальная координата данного положения равновесия и определяет максимальное отклонение x_{\max} . Для значений тока, меньших 3.3 А, характерно отсутствие какого-либо движения тела. При значениях тока, превосходящих 9 А, тело отрывается от поверхности сразу (без движения по ней) и максимальное отклонение x_{\max} мало. Зависимость $x_{\max}(j)$ в диапазоне $3.2 \text{ А} \leq j \leq 10 \text{ А}$ представлена на рис. 2, б. Видно, что эта зависимость имеет максимум (0.29 см) при токе 6 А. Это связано с тем, что с увеличением тока (в диапазоне от 6 А до 10 А и далее) растет вертикальная компонента магнитной силы и как следствие тело проходит меньший путь по поверхности и меньше отклоняется от оси витка.

На рис. 3, *а* представлены траектории движения тела при $j = 9$ А и различных углах θ . Обнаружено, что движение вдоль поверхности с последующим отрывом от нее реализуется при углах из интервала $45^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$. Для углов $80^\circ < \theta < 90^\circ$ характерно движение тела по поверхности без отрыва от нее. При углах θ , меньших 45° , тело отрывается от поверхности сразу и движения вдоль поверхности нет. При этом и отклонение от оси витка очень маленькое. В случае стремления угла θ к 90° траектория стремится к оси витка и отклонение при этом стремится к нулю. Зависимость $x_{\max}(\theta)$ в диапазоне $40^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ представлена на рис. 3, *б*. Видно, что эта зависимость имеет локальные максимумы: 0.18 см при угле 55° и 0.25 см при угле 80° . Это связано с противоборством двух эффектов. С одной стороны, с увеличением угла тело проходит больший путь по плоскости, что может увеличить отклонение x_{\max} , а с другой — даже при увеличении этого пути l_{\max} отклонение $x_{\max} \gtrsim l_{\max} \cos \theta$ может уменьшаться из-за роста угла θ .

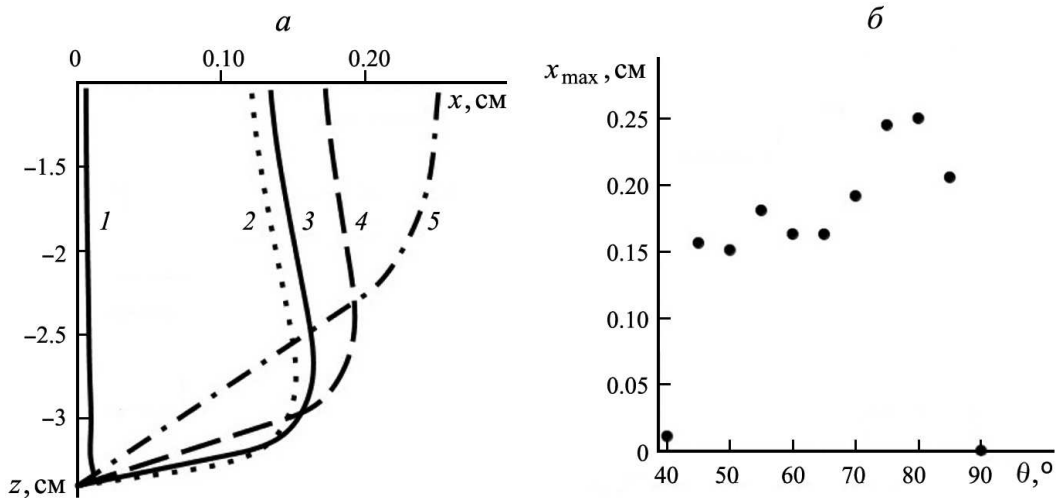


Рис. 3. Траектории тела при токе $j = 9$ А и различных значениях θ : 1 — $\theta = 40^\circ$, 2 — 50° , 3 — 60° , 4 — 70° , 5 — 80° (*а*) и зависимость x_{\max} от θ (*б*)

Заключение. Предложена математическая модель движения сферического тела из анизотропного намагничивающегося эластомера в окружающей вязкой жидкости под действием неоднородного магнитного поля. Модель учитывает возможность движения тела по наклонной поддерживающей плоскости. Построены расчетные траектории движения и найдено максимальное отклонение тела от оси витка для различных параметров задачи. Показано, что при режиме движения по поверхности происходит заметное смещение тела от оси витка. Найдены значения параметров, необходимые для возникновения режима движения тела по наклонной плоскости. Установлено, что максимальное отклонение тела от оси витка немонотонно зависит от величины тока и угла наклона плоскости. Существуют значения тока в витке и угла наклона, при которых максимальное отклонение тела от оси достигает наибольшего значения. Результаты работы могут быть полезны при создании мобильных роботов из анизотропных намагничивающихся эластомеров.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20–71–10002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hu W., Lum G.Z., Mastrangeli M., Sitti M.* Smallscale soft-bodied robot with multimodal locomotion // *Nature*. 2018. **554**. 81–85.
2. *Kim Y., Yuk H., Zhao R., Chester Sh.A., Zhao X.* Printing ferromagnetic domains for untethered fast-transforming soft materials // *Nature*. 2018. **558**. 274–279.
3. *Merkulov D.I., Pelevina D.A., Turkov V.A., Vinogradova A.S., Naletova V.A.* Mobile robots with magnetizable materials in uniform magnetic fields // *Acta Astronautica*. 2021. **181**. 579–584.
4. *Демин А.А.* Магнитные свойства анизотропного намагничивающегося эластомера // Тр. конф.-конкурса молодых ученых. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2019. 82–89.
5. *Demin A.A., Merkulov D.I., Pelevina D.A., Kalmykov S.A., Naletova V.A.* Determination of parameters of anisotropic magnetizable elastomer // *Magneto hydrodynamics*. 2019. **55**, N 3. 347–352.
6. *Иванов А.О., Елфимова Е.А.* Равновесные магнитные свойства ансамбля суперпарамагнитных наночастиц с учетом межчастичного магнитодипольного взаимодействия // 18-я Междунар. Плесская науч. конф. по нанодисперсным магнитным жидкостям. Плещ: ФГБОУВО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина», 2018. 86–90.

7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

8. Хатпелль Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Пер. с англ. М.: Мир, 1976.

9. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009.

Поступила в редакцию
31.08.2022

УДК 532.591, 531.5.031

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОМАННЫХ ТРЕЩИН

А. В. Звягин¹, А. С. Удалов²

В процессе развития различных микродефектов в телах могут образовываться сложные системы трещин произвольной конфигурации. В работе представлена методика численного моделирования сложных ломаных трещин, позволяющая анализировать такие системы. При помощи предложенного авторами метода удается найти поля напряжений, перемещений, а также коэффициенты интенсивности напряжений, предоставляющие возможность сделать вывод о влиянии особенностей рассмотренной конфигурации на устойчивость трещины. Также приведено сравнение с результатами других авторов в задаче о двухзвенной трещине.

Ключевые слова: механика разрушения, трещины, коэффициенты интенсивности напряжений.

With the growth of various microdefects in bodies, complex systems of cracks of arbitrary configuration can be generated. This paper presents a technique for numerical simulation of complex branched cracks, which makes it possible to analyze such systems. Using the method proposed by the authors, it is possible to find the stress and displacement fields as well as the stress intensity factors, the analysis of which leads to the conclusion about the influence of the considered configuration on the crack stability. The paper also contains the comparison with the results of other authors in the problem of a two-link crack.

Key words: fracture mechanics, cracks, stress intensity factors.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-44-48

1. Введение. Разрушение различных объектов из-за наличия в них дефектов — крайне распространенное явление. Один из возможных вариантов таких дефектов — трещины. Их влияние на прочность тел изучает механика разрушения, важным разделом которой является механика трещин в упругой среде. Несмотря на то что процесс роста трещин сопровождается образованием области пластических деформаций, в некоторых случаях, как показано в [1–6], анализировать устойчивость трещин и прогнозировать их развитие можно на основе решения, полученного в рамках линейной теории упругости. В таких задачах не только описывается напряженно-деформированное состояние среды, но и отыскиваются особые величины — коэффициенты интенсивности напряжений. Так как для их определения необходимо исследовать, вообще говоря, бесконечные напряжения в вершинах трещин, то при моделировании данных сред с помощью численных методов приходится накладывать на точность полученного решения достаточно высокие требования. Ввиду этого в последнее время для подобных задач активно развиваются так называемые методы граничных элементов [7–9].

В настоящей работе предложена методика моделирования сред с ломаными трещинами сложной конфигурации с использованием одного из видов численных методов граничных элементов. Также описан алгоритм поиска коэффициентов интенсивности напряжений, основанный на асимптотическом разложении М. Уильямса [10–12]. Эффективность разработанных авторами методик

¹ Звягин Александр Васильевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zvsasha@rambler.ru.

Zvyagin Alexander Vasil'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Wave and Gas Dynamics.

² Удалов Артем Сергеевич — асп. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: udalets@inbox.ru.
Udalov Artem Sergeevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Wave and Gas Dynamics.