УДК 515.124.4, 515.124.55, 514.174

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ГРОМОВА–ХАУСДОРФА С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛА БОРСУКА

А. О. Иванов[1], **А. А. Тужилин**[2]

Цель работы — продемонстрировать связи между свойствами расстояния Громова–Хаусдорфа и гипотезой Борсука. Числом Борсука данного ограниченного метрического пространства X называется точная нижняя грань кардинальных чисел n, таких, что X можно разбить на n меньших частей (в смысле диаметра). В предположении, что диаметр и мощность одного ограниченного метрического пространства меньше, чем диаметр и число Борсука другого ограниченного метрического пространства соответственно, выведена точная формула для расстояния Громова–Хаусдорфа между этими пространствами. Также получен ряд следствий, основанных на результатах П. Бекона об эквивалентности задач Борсука и Люстерника–Шнирельмана.

Ключевые слова: метрическая геометрия, расстояние Громова–Хаусдорфа, гипотеза Борсука, теорема Люстерника–Шнирельмана.

The aim of this paper is to demonstrate relations between Gromov–Hausdorff distance properties and the Borsuk Conjecture. The Borsuk number of a given bounded metric space X is the infimum of cardinal numbers n such that X can be partitioned into n smaller parts (in the sense of diameter). An exact formula for the Gromov–Hausdorff distance between bounded metric spaces is derived under the assumptions that the diameter and the cardinality of one space is less than the diameter and the Borsuk number of the other one, respectively. Using P. Bacon equivalence results between Lusternik–Schnirelmann and Borsuk problems, several corollaries are obtained.

Key words: metric geometry, Gromov–Hausdorff distance, Borsuk conjecture, Lusternik–Schnirelmann theorem.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-33-38

Введение. Один из естественных подходов к задаче сравнения между собой подмножеств данного метрического пространства или, более общо, разных метрических пространств состоит в определении той или иной функции расстояния между этими объектами, т.е. в переходе к рассмотрению так называемых гиперпространств — метрических пространств, точками которых являются или подмножества фиксированного пространства, или пространства заданного типа (см., например, [1]). Естественная функция расстояния между двумя подмножествами фиксированного метрического пространства была введена в рассмотрение Ф. Хаусдорфом [2] как инфимум положительных чисел r, таких, что одно подмножество содержится в r-окрестности другого и наоборот. Эта функция называется *расстоянием Хаусдорфа* и является метрикой на семействе всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства (см., например, [3] или [4]). Расстояние Хаусдорфа было обобщено на случай пары метрических пространств Д. Эдвардсом [5] и независимо М. Громовым [6] с помощью вложений в общее объемлющее метрическое пространство (см. формальное определение в п. 1). Получившаяся в итоге функция называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа* между метрическими пространствами.

Геометрия расстояния Громова–Хаусдорфа довольно причудлива и является предметом изучения многих авторов (см., например, работы [7, 8], а также обзоры в [3] и [4]). Цель настоящей работы — продемонстрировать связи между свойствами расстояния Громова–Хаусдорфа и гипотезой Борсука. Неформально говоря (см. краткий обзор и ссылки в п. 2), в задаче Борсука для данного ограниченного метрического пространства X требуется найти наименьшее кардинальное

[1] *Иванов Александр Олегович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: aoiva@mech.math.msu.su.

Ivanov Alexander Olegovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

[2] *Тужилин Алексей Августинович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: tuz@mech.math.msu.su.

Tuzhilin Alexey Avgustinovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

число $\beta(X)$, необходимое для того, чтобы разбить X на $\beta(X)$ частей меньшего, чем у X, диаметра. Величина $\beta(X)$ называется *числом Борсука*. Недавно [9] авторы заметили, что число Борсука можно вычислить в терминах расстояния Громова–Хаусдорфа до метрического пространства с одним ненулевым расстоянием подходящих диаметра и мощности. В работе получена точная формула для расстояния Громова–Хаусдорфа между ограниченными метрическими пространствами в предположении, что диаметр и мощность одного пространства меньше, чем диаметр и число Борсука другого соответственно (см. теорему 4). Результаты П. Бэкона [10] об эквивалентности позволили получить ряд утверждений о задаче Люстерника–Шнирельмана (см. следствия 3–5).

1. Необходимые сведения: расстояние Громова–Хаусдорфа. Пусть X — произвольное непустое множество. Обозначим через $\#X$ мощность множества X. Неотрицательную симметричную функцию $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty]$, равную нулю на диагонали, будем называть *расстоянием*. Если расстояние удовлетворяет неравенству треугольника, то его обычно называют *обобщенной псевдометрикой*. Если добавляется условие невырожденности, т.е. $\rho(x, y) = 0$, тогда и только тогда, когда $x = y$, то говорят об *обобщенной метрике*, а если ρ принимает лишь конечные значения, то о *конечной псевдометрике* или о (конечной) *метрике* в зависимости от того, предполагается невырожденность или нет. Итак, метрика — это конечная, невырожденная и удовлетворяющая неравенству треугольника функция расстояния. Множество, на котором задана (обобщенная) (псевдо-) метрика, называется (*обобщенным*) (*псевдо-*) *метрическим пространством*. Как правило, если это не вызовет недоразумений, мы будем использовать обозначение $|xy|$ вместо $\rho(x, y)$.

Всюду ниже все метрические пространства снабжены соответствующей метрической топологией. Пусть X — метрическое пространство. Для произвольного подмножества $A \subset X$ и произвольной точки $x \in X$ положим $|xA| = |Ax| = \inf\bigl\{|ax| : a \in A\bigr\}$. Далее, для $r \geqslant 0$ положим

$$B_r(x) = \bigl\{y \in X : |xy| \leqslant r\bigr\}, \quad U_r(x) = \bigl\{y \in X : |xy| < r\bigr\}$$

и

$$B_r(A) = \bigl\{y \in X : |Ay| \leqslant r\bigr\}, \quad U_r(A) = \bigl\{y \in X : |Ay| < r\bigr\}.$$

Напомним необходимые понятия и результаты, касающиеся расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа. Более подробную информацию можно найти в [3] или [4]. Пусть X — некоторое множество. Через $\mathcal{P}_0(X)$ обозначим семейство всех его непустых подмножеств. Далее, пусть теперь X — метрическое пространство и $A, B \in \mathcal{P}_0(X)$. Хорошо известно, что следующие три выражения

$$\begin{gathered}
\max\Bigl(\sup\bigl\{|aB| : a \in A\bigr\}, \sup\bigl\{|Ab| : b \in B\bigr\}\Bigr),\\
\inf\bigl\{r \in [0, \infty] : A \subset B_r(B) \text{ и } B_r(A) \supset B\bigr\},\\
\inf\bigl\{r \in [0, \infty] : A \subset U_r(B) \text{ и } U_r(A) \supset B\bigr\}
\end{gathered}$$

определяют одну и ту же величину, которую мы обозначим через $d_H(A, B)$. Легко проверить, что функция d_H неотрицательна, симметрична и $d_H(A, A) = 0$ для любого непустого $A \subset X$, т.е. d_H — расстояние на семействе $\mathcal{P}_0(X)$ всех непустых подмножеств метрического пространства X. Более того, d_H удовлетворяет неравенству треугольника и поэтому является обобщенной псевдометрикой на $\mathcal{P}_0(X)$. Функция d_H называется *расстоянием Хаусдорфа*. Хорошо известно, что расстояние Хаусдорфа d_H является метрикой на множестве $\mathcal{H}(X)$ всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X.

Далее, пусть X и Y — метрические пространства. Тройка (X', Y', Z), состоящая из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', которые изометричны X и Y соответственно, называется *реализацией пары* (X, Y). Обозначим через $d_{GH}(X, Y)$ точную нижнюю грань вещественных чисел r, таких, что существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y), удовлетворяющая неравенству $d_H(X', Y') \leqslant r$. Ясно, что функция $d_{GH}(X, Y)$ неотрицательна, симметрична и $d_{GH}(X, X) = 0$ для любого метрического пространства X. Итак, d_{GH} — функция расстояния на парах метрических пространств.

Определение. Величина $d_{GH}(X, Y)$ называется *расстоянием Громова–Хаусдорфа* между метрическими пространствами X и Y.

Хорошо известно, что функция d_{GH} есть обобщенная псевдометрика. В общем случае d_{GH} не является метрикой: она может принимать бесконечные значения, а также равняться нулю на паре разных метрических пространств. Однако на семействе компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, d_{GH} является метрикой.

Для конкретных вычислений расстояния Громова–Хаусдорфа оказывается полезным следующее эквивалентное определение.

Напомним, что *бинарным отношением* между множествами X и Y называется подмножество прямого произведения $X \times Y$. Бинарное отношение можно рассматривать как частично определенное многозначное отображение. По аналогии с обычными отображениями для каждого $\sigma \subset X \times Y$ определены *образ* $\sigma(x) := \big\{y \in Y : (x,y) \in \sigma\big\}$ каждого $x \in X$ и *прообраз* $\sigma^{-1}(y) = \big\{x \in X : (x,y) \in \sigma\big\}$ каждого $y \in Y$. Далее, для любых $A \subset X$ и $B \subset Y$ определены *образ* и *прообраз* как объединения соответственно образов и прообразов всех их элементов. Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если $R(X) = Y$ и $R^{-1}(Y) = X$. Другими словами, соответствие можно рассматривать как сюръективное многозначное отображение. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Пусть X и Y — метрические пространства. Для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$ величина

$$\operatorname{dis}\sigma := \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y),\, (x',y') \in \sigma\Big\}$$

называется *искажением* отношения σ.

Хорошо известен следующий ключевой результат, позволяющий вычислять расстояние по Громову–Хаусдорфу в терминах искажений соответствий.

Теорема 1. *Для любых метрических пространств X и Y имеет место следующее равенство*:

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Оказывается, достаточно рассматривать только соответствия специального вида. Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ называется *неприводимым*, если оно — минимальный элемент по включению в $\mathcal{R}(X,Y)$. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y будем обозначать через $\mathcal{R}^0(X,Y)$.

Следующий результат очевиден.

Предложение 1. *Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ неприводимо, если и только если для каждой пары $(x,y) \in R$ выполнено следующее равенство*:

$$\min\big\{\#R(x), \#R^{-1}(y)\big\} = 1.$$

Нам также понадобится

Теорема 2. *Пусть X, Y — произвольные непустые подмножества. Тогда для каждого соответствия $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ существует неприводимое соответствие $R^0 \in \mathcal{R}^0(X,Y)$, такое, что $R^0 \subset R$. В частности, $\mathcal{R}^0(X,Y) \neq \emptyset$.*

Из теорем 1 и 2 получаем

Следствие 1. *Для любых двух метрических пространств X и Y имеет место равенство*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R \mid R \in \mathcal{R}^0(X,Y)\big\}.$$

Дадим теперь другое полезное описание неприводимых соответствий.

Предложение 2. *Для любых непустых множеств X, Y и каждого неприводимого соответствия $R \in \mathcal{R}^0(X,Y)$ существуют единственные разбиения $R_X = \{X_i\}_{i\in I}$ и $R_Y = \{Y_i\}_{i\in I}$ множеств X и Y соответственно, такие, что $R = \cup_{i\in I} X_i \times Y_i$. Более того, $R_X = \cup_{y\in Y}\big\{R^{-1}(y)\big\}$, $R_Y := \cup_{x\in X}\big\{R(x)\big\}$,*

$$R = \{X_i \times Y_i\}_{i\in I} = \cup_{(x,y)\in R}\{R^{-1}(y) \times R(x)\}$$

и $\min\{\#X_i, \#Y_i\} = 1$ для каждого i.

Обратно: каждое множество $R = \cup_{i\in I} X_i \times Y_i$, где $\{X_i\}_{i\in I}$ и $\{Y_i\}_{i\in I}$ — разбиения X и Y, такие, что $\min\{\#X_i, \#Y_i\} = 1$ для каждого i, является неприводимым соответствием между X и Y.

Пусть X — произвольное множество, состоящее не менее чем из двух элементов, и m — кардинальное число, такое, что $2 \leqslant m \leqslant \#X$. Обозначим через $\mathcal{D}_m(X)$ семейство всех возможных разбиений множества X на m непустых подмножеств.

Пусть теперь X — метрическое пространство. Для каждого его разбиения $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i.$$

Далее, для непустых подмножеств $A, B \subset X$ положим

$$|AB| = \inf\big\{|ab| : (a,b) \in A \times B\big\} \quad \text{и} \quad |AB|' := \sup\big\{|ab| : (a,b) \in A \times B\big\}.$$

Заметим, что $|X_iX_i| = 0$, $|X_iX_i|' = \operatorname{diam} X_i$, и поэтому $\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} |X_iX_i|'$.

Следующий результат легко получается из определения искажения и предложения 2.

Предложение 3. *Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, $D_X = \{X_i\}_{i\in I}$ и $D_Y = \{Y_i\}_{i\in I}$, $\#I \geqslant 2$, — некоторые их разбиения и $R = \cup_{i\in I} X_i \times Y_i \in \mathcal{R}(X, Y)$. Тогда*

$$\operatorname{dis} R = \sup\bigl\{|X_iX_j|' - |Y_iY_j|,\, |Y_iY_j|' - |X_iX_j| : i, j \in I\bigr\} = \\ = \sup\bigl\{\operatorname{diam} D_X,\, \operatorname{diam} D_Y,\, |X_iX_j|' - |Y_iY_j|,\, |Y_iY_j|' - |X_iX_j| : i, j \in I,\, i \neq j\bigr\}.$$

Перечислим некоторые простые случаи, в которых удается вычислить или оценить расстояние Громова–Хаусдорфа.

Через Δ_1 обозначим одноточечное метрическое пространство.

Пример 1. Для любого метрического пространства X справедливо равенство

$$d_{GH}(\Delta_1, X) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X.$$

Пример 2. Пусть X и Y — метрические пространства, причем диаметр по крайней мере одного из них конечен. Тогда

$$d_{GH}(X, Y) \geqslant \frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|.$$

Пример 3. Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда

$$d_{GH}(X, Y) \leqslant \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\},$$

в частности если X и Y ограничены, то $d_{GH}(X, Y) < \infty$.

Для любого метрического пространства X и любого положительного числа λ обозначим через λX метрическое пространство, полученное из X умножением всех расстояний на λ. Если $\lambda = 0$, а X ограничено, то положим $\lambda X = \Delta_1$.

Пример 4. Для произвольного ограниченного метрического пространства X и любых $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ имеет место равенство $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu|\operatorname{diam} X$. В частности, для любых чисел a и b, $0 \leqslant a < b$, кривая $\gamma(t) := t\,X$, $t \in [a, b]$, является кратчайшей.

Пример 5. Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеет место равенство $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\, d_{GH}(X, Y)$. Если, кроме того, X и Y ограничены, то равенство остается верным и при $\lambda = 0$.

2. Необходимые сведения: задача Борсука–Люстерника–Шнирельмана. Обозначим через S^n стандартную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$. В 1930 г. Л. Люстерник и Л. Шнирельман [11] доказали, что любое замкнутое покрытие сферы S^n, состоящее из $(n + 1)$ замкнутых множеств $C_1, \ldots, C_{n+1}$, включает множество C_i, содержащее пару диаметрально противоположных точек x и $-x$, т.е. сферу S^n нельзя разбить на $m \leqslant (n + 1)$ подмножеств меньшего диаметра. Несколько позже, в 1933 г., польский математик К. Борсук сформулировал следующий вопрос: на какое наименьшее число частей меньшего диаметра можно разбить произвольное подмножество евклидова пространства? Он выдвинул следующую знаменитую гипотезу: любое неодноточечное подмножество $\mathbb{R}^n$ можно разбить на $n + 1$ подмножество меньшего диаметра. К. Борсук сам доказал это утверждение для $n = 2$ и для шара и сферы в трехмерном пространстве (см. [12] и [13]). Затем гипотеза была доказана для $n = 3$ Ю. Перкалем (1947) и независимо Х. Эглестоном (1955). В 1946 Г. Хадвигер [14, 15] доказал ее для выпуклых подмножеств с гладкими границами. Далее, гипотеза была доказана для центрально-симметричных тел (А. Рислинг, 1971), и после этого практически все специалисты поверили, что и общая гипотеза верна, а ее доказательство — вопрос времени и усовершенствования техники. Однако в 1993 г. гипотеза Борсука была неожиданно опровергнута Дж. Каном и Г. Калаи (см. [16]). Они построили контрпример в размерности $n = 1325$, а также доказали, что гипотеза неверна для всех размерностей $n > 2014$. Эта оценка последовательно улучшалась в работах А.М. Райгородского, $n \geqslant 561$, А. Хинрихса и К. Рихтера, $n \geqslant 298$, А.В. Бондаренко, $n \geqslant 65$, и Т. Йенриха, $n \geqslant 64$ (см. детали в обзоре [17] и работах [18] и [19]). Заметим, что все контрпримеры представляют собой конечные подмножества соответствующих пространств, а лучшие известные оценки Бондаренко и Йенриха получены на подмножествах единичной сферы с двумя ненулевыми расстояниями.

В работе [9] авторы предложили следующую обобщенную формулировку проблемы Борсука. Пусть X — ограниченное метрическое пространство и $D = \{X_i\}_{i\in I}$ — некоторое разбиение пространства X. Скажем, что D разбивает X на подмножества *строго меньших диаметров*, если существует $\varepsilon > 0$, такое, что $\operatorname{diam} X_i \leqslant \operatorname{diam} X - \varepsilon$ для всех $i \in I$.

Обобщенная проблема Борсука: пусть X — ограниченное метрическое пространство и m — кардинальное число, такое, что $2 \leqslant m \leqslant \#X$. Существует ли разбиение мощности m пространства X на подмножества строго меньшего диаметра?

Оказывается (см. [9]), решение этой задачи можно получить в терминах расстояния Громова–Хаусдорфа. Обозначим через Δ_m метрическое пространство мощности m с одним ненулевым расстоянием, и пусть это расстояние равно 1.

Теорема 3. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, m — кардинальное число, такое, что $2 \leqslant m \leqslant \#X$, и λ — вещественное число, $0 < \lambda < \operatorname{diam} X$. Пространство X может быть разбито на m подмножеств строго меньшего диаметра, если и только если $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) < \operatorname{diam} X$. Более того, если такого разбиения не существует, то $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \operatorname{diam} X$.*

Для ограниченного метрического пространства X, $\#X \geqslant 2$, обозначим через $\beta(X)$ точную нижнюю грань кардинальных чисел n, таких, что X можно разбить на n подмножеств строго меньшего диаметра. Назовем $\beta(X)$ *числом Борсука пространства* X. Ясно, что $\beta(X) \leqslant \#X$.

3. Расстояние Громова–Хаусдорфа и число Борсука. Оказывается, число Борсука может в ряде ситуаций помочь вычислить расстояние Громова–Хаусдорфа.

Теорема 4. *Пусть X и Y — ограниченные метрические пространства. Предположим, что $\#X < \beta(Y)$ и $\operatorname{diam} X \leqslant \operatorname{diam} Y$. Тогда*

$$2d_{GH}(X, Y) = \operatorname{diam} Y.$$

Доказательство. Пусть $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$ — произвольное неприводимое соответствие. Рассмотрим соответствующее разбиение $R_Y = \big\{R(x)\big\}_{x \in X}$. Так как $\#R_Y = \#X < \beta(Y)$, то X нельзя разбить на $\#X$ частей меньшего диаметра, поэтому $\operatorname{diam} R_Y = \operatorname{diam} Y$. Применяя предложение 3, заключаем, что $2d_{GH}(X, Y) \geqslant \operatorname{diam} Y$. С другой стороны,

$$2d_{GH}(X, Y) \leqslant \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\} = \operatorname{diam} Y$$

(см. пример 3). Теорема доказана.

Перейдем к примерам. Рассмотрим сначала пространство $\lambda\Delta_m$ мощности m с одним ненулевым расстоянием. Его число Борсука очевидно равно m. Следующий результат был доказан в [20].

Следствие 2. *Пусть X — ограниченное метрическое пространство. Тогда для любого вещественного числа $\lambda \geqslant \operatorname{diam} X$ и любого кардинального числа $m > \#X$ имеет место равенство $d_{GH}(X, \lambda\Delta_m) = \lambda$.*

Следующий класс примеров получается с помощью теорем Борсука–Улама и Люстерника–Шнирельмана. К. Борсук доказал свою гипотезу для случая сферы S^2 с помощью теоремы Борсука–Улама, которая, напомним, утверждает, что для любого непрерывного отображения $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ найдется точка $x \in S^2$, такая, что $f(x) = f(-x)$. Позднее П. Бэкон [10] показал, что эти два результата эквивалентны для существенно более широкого класса пространств. Напомним, что отображение $f\colon X \to X$ называется *инволюцией*, если f обратно к самому себе, т.е. $f\big(f(x)\big) = x$ для любого $x \in X$. Инволюция называется *свободной*, если у нее нет неподвижных точек.

Теорема 5. *Пусть X — нормальное топологическое пространство со свободной непрерывной инволюцией $A\colon X \to X$ и n — натуральное число. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

Для произвольного непрерывного отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in X$, такая, что $f\big(A(x)\big) = f(x)$.

Для произвольного покрытия $\{C_1, \ldots, C_{n+1}\}$ пространства X замкнутыми множествами по крайней мере одно их них содержит пару точек x и $A(x)$.

Как мы уже отмечали выше, в первой версии теоремы Борсука–Люстерника–Шнирельмана рассматриваются сфера S^n и инволюция $A\colon x \mapsto -x$. В этом случае инволюция A обладает одним важным дополнительным свойством, а именно $\big|xA(x)\big| = \operatorname{diam} S^n$ для любой точки $x \in S^n$. Назовем такую инволюцию *диаметральной*.

Пусть X — ограниченное метрическое пространство, такое, что для любого его замкнутого покрытия $\{C_i\}$ мощности не более чем n по крайней мере одно множество C_i содержит диаметрально противоположные точки, т.е. такие точки x и x', что $|xx'| = \operatorname{diam} X$. Назовем такое пространство dLS_n-*пространством* (*диаметральным n-пространством Люстерника–Шнирельмана*). В частности, если $A\colon X \to X$ — свободная непрерывная диаметральная инволюция ограниченного метрического пространства X и для любого непрерывного отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ существует точка $x \in X$, такая, что $f\big(A(x)\big) = f(x)$, то X является dLS_n-пространством по теореме Бэкона (теорема 5). Обзор современных работ по геометрии пространств Люстерника–Шнирельмана можно найти в [21]. Заметим, что если X является dLS_n-пространством, то $\beta(X) > n$.

Следствие 3. *Пусть* Y *является* dLS_n*-пространством для некоторого натурального числа* n *и* X *— конечное метрическое пространство, такое, что* $\#X \leqslant n$ *и* $\operatorname{diam} X \leqslant \operatorname{diam} Y$. *Тогда* $2d_{GH}(X,Y) = \operatorname{diam} Y$.

Пусть $S^n(R)$ — стандартная n-мерная сфера радиуса R с внутренней метрикой.

Следствие 4. *Пусть* X *— конечное метрическое пространство. Тогда* $d_{GH}\big(X, S^n(R)\big) = R$ *для любого* $R \geqslant (\operatorname{diam} X)/\pi$ *и любого натурального* n*, такого, что* $n \geqslant \#X - 1$.

Применяя теорему 3, получаем

Следствие 5. *Пусть* X *и* Y *— ограниченные метрические пространства и* $\operatorname{diam} X \leqslant \operatorname{diam} Y$. *Предположим, что для некоторого вещественного* λ, $0 < \lambda < \operatorname{diam} Y$, *и некоторого кардинального числа* m, $\#X < m \leqslant \#Y$, *выполнено* $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, Y) = \operatorname{diam} Y$. *Тогда* $2d_{GH}(X,Y) = \operatorname{diam} Y$.

Работа выполнена при поддержке Межрегиональной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Illanes A., Nadler S.* Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances. New York; Basel: Marcel Dekker Inc., 1999.
2. *Hausdorff F.* Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].
3. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004 (*Burago D., Burago Yu., Ivanov S.* A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 33. Providence, RI: AMS, 2001).
4. *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа: случай компактов. М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ, 2017.
5. *Edwards D.* The Structure of Superspace / Ed. by N.M. Stavrakas and K.R. Allen. Studies in Topology. NY; San Francisco; London: Academic Press, 1975. 121–133.
6. *Gromov M.* Groups of Polynomial Growth and Expanding Maps // Publications Mathematiques I.H.E.S. Vol. 53. Paris: I.H.E.S., 1981. 53–73.
7. *Чикин В.М.* Функции, сохраняющие метрики, и пространство Громова–Хаусдорфа // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2021. № 4. 11–16 (Moscow University Mathematics Bulletin. 2018. **73** (5). 154–160).
8. *Малышева О.С.* Оптимальное положение компактов в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова–Хаусдорфа // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 5. 14–22 (Moscow University Mathematics Bulletin. 2018. **76** (4). 182–189).
9. *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.* Gromov–Hausdorff distances to simplexes and some applications to discrete optimisation // Чебывшёвский сб. 2020. **21**, № 2. 69–189.
10. *Bacon P.* Equivalent formulations of the Borsuk–Ulam theorem // Canad. J. Math. 1966. **18**. 492–502.
11. *Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М.: Исследовательский институт математики и механики при 1-м МГУ, 1930.
12. *Borsuk K.* Über die Zerlegung einer n-dimensionalen Vollkugel in n-Mengen // V Int. Math. Kongress. Zürich, 1932. 192.
13. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fund. Math. 1933. **20**. 177–190.
14. *Hadwiger H.* Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comment. Math. Helv. 1945. **18** (1). 73–75.
15. *Hadwiger H.* Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comment. Math. Helv. 1946. **19**. 72–73.
16. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. **29**, N 1. 60–62.
17. *Raigorodskii A.M.* Around Borsuk's hypothesis // J. Math. Sci. 2008. **154**, N 4. 604–623.
18. *Bondarenko A.V.* On Borsuk's conjecture for two-distance sets // arXiv e-prints, `arXiv:1305.2584`, 2013.
19. *Jenrich T.* A 64-dimensional two-distance counterexample to Borsuk's conjecture // arXiv e-prints, `arXiv:1308.0206`, 2013.
20. *Григорьев Д.С., Иванов А.О., Тужилин А.А.* Расстояние Громова–Хаусдорфа до симплексов // Чебышёвский сб. 2019. **20** (2). 100–114 (ArXiv e-prints, `arXiv:1906.09644`, 2019).
21. *Musin O.R., Volovikov A.Yu.* Borsuk–Ulam type spaces // ArXiv e-prints, `arXiv: 1507.08872`, 2015.

Поступила в редакцию
31.03.2022