16. *Kunen K.* Large homogeneous compact spaces // Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990. 262–270.

Поступила в редакцию
27.10.2021

УДК 517.938.5

ПАРАБОЛИЧНОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ ЭЙЛЕРА С ГИРОСТАТОМ

В. А. Кибкало [1]

Изучаются вырожденные особенности известного многопараметрического семейства интегрируемых систем динамики твердого тела — систем Жуковского, т.е. волчков Эйлера с добавленным постоянным вектором гиростатического момента. Для осесимметричного твердого тела и близких к нему систем доказано, что вырожденные локальные и полулокальные особенности являются параболическими и каспидальными особенностями соответственно для всех значений набора параметров системы, исключая некоторые гиперповерхности. Установлено, что эти особенности, лежащие в прообразе точки возврата бифуркационной кривой, удовлетворяют критерию параболичности А.В. Болсинова, Л. Гульелми и Е.А. Кудрявцевой. Как следствие они являются структурно-устойчивыми при малых возмущениях системы в классе интегрируемых систем, в частности при малом изменении главных моментов инерции, компонент вектора гиростатического момента и значения интеграла площадей.

Ключевые слова: гамильтонова система, интегрируемость, твердое тело, гиростат, особенность, слоение Лиувилля, параболические особенности, структурная устойчивость.

We study degenerate singularities of the well-known multiparametric family of integrable Zhukovsky cases of rigid body dynamics, i.e., Euler tops with added constant gyrostatic moment. For an axisymmetric rigid body and systems close to it, it is proved that degenerate local and semilocal singularities are parabolic and cuspidal singularities, respectively, for all values of the set of system parameters, excluding some hypersurfaces. It was checked that these singularities belonging to the preimage of the cusp of the bifurcation curve satisfy the parabolicity criterion of A. V. Bolsinov, L. Guglielmi, and E. A. Kudryavtseva. Therefore, they are structurally stable for small perturbations of the system in the class of integrable systems, in particular, for a small change in the principal moments of inertia, the components of the gyrostatic moment, and the values of the area integral.

Key words: Hamiltonian system, integrability, rigid body, gyrostat, singularity, Liouville foliation, parabolic singularity, structural stability.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-25-32

1. Топологические инварианты интегрируемых систем. Изучение гамильтоновых систем путем описания топологических свойств их поверхностей уровня энергии H в фазовом пространстве было начато в известной работе С. Смейла [1]. Как оказалось, вопрос о классе гомеоморфности таких изоэнергетических поверхностей при разных значениях энергии и других параметров системы (таким параметром системы может быть, например, значение ее интеграла площадей f_2) тесно связан с результатами и подходами из теории Морса.

Если система интегрируема, т.е. обладает “достаточно большим” числом скрытых симметрий, то изоэнергетическая поверхность сама может быть расслоена на совместные уровни дополнительных интегралов системы. На фазовом пространстве системы (являющемся симплектическим многообразием) возникает структура слоения Лиувилля (подробнее см. монографию [2]).

[1] *Кибкало Владислав Александрович* — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; мл. науч. сотр. Моск. центра фунд. и прикл. матем., e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Junior Researcher, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Для таких систем возможен более тонкий топологический анализ. Слоения Лиувилля многих известных систем, возникающих в приложениях (например, волчок Ковалевской, системы Жуковского и Горячева–Чаплыгина), были изучены М. П. Харламовым [3]: для них были построены бифуркационные диаграммы отображения момента, определены классы гомеоморфности слоев и типы перестроек регулярных торов.

Общая теория топологической классификации слоений Лиувилля интегрируемых систем основана на аналоге теории Морса, построенном для интегрируемых систем в работах А. Т. Фоменко [4, 5]. В дальнейших работах А. Т.Фоменко, его учеников и соавторов [6–8] были получены классифицирующие инварианты таких слоений относительно различных эквивалентностей.

Развитые подходы удалось применить к широкому классу интегрируемых систем из приложений. Для многих из них вычислены классифицирующие инварианты Фоменко и Фоменко–Цишанга и определены типы невырожденных особенностей. Например, работы [9–14] посвящены изучению ряда систем динамики твердого тела, а недавние работы [15–17] — аналогам таких систем на алгебрах Ли, отличных от $e(3)$.

Интегрируемые системы разной природы могут оказаться эквивалентными. Например, их слоения Лиувилля в некоторых зонах энергии могут быть послойно гомеоморфными. Это означает одинаковое устройство замыканий решений данных систем в соответствующих зонах энергии. Такой эффект, в частности, позволяет "моделировать" поведение более сложной системы при помощи более простой и наглядной. В самые последние годы были получены интересные результаты по моделированию интегрируемых систем из механики с использованием интегрируемых бильярдов на кусочно-плоских столах (см. работы [18–21]).

2. Классификация особенностей интегрируемых систем. Как оказалось, почти все критические точки (точки, где не максимален ранг дифференциала отображения момента) изученных конкретных систем являются невырожденными, т.е. удовлетворяют условию Морса–Ботта (см. [2, 5]).

Особенности, все критические точки которых являются невырожденными, удалось классифицировать. Классификация *локальных* особенностей (т.е. ростков слоения Лиувилля в окрестности точки) с точностью до симплектоморфизма была получена Л. Элиассоном [22]. Классы послойной гомеоморфности *полулокальных* особенностей (т.е. слоений в малой окрестности особого слоя, целиком состоящей из слоев слоения) коранга 1 были описаны А. Т. Фоменко [2, т. 1, теорема 3.3]. Их также называют 3-атомами Фоменко. Позже классы послойной гомеоморфности невырожденных особенностей любого коранга были описаны Н. Т. Зунгом [23] с помощью подхода почти прямых произведений. Так были названы произведения "элементарных" полулокальных особенностей систем с одной или двумя степенями свободы, которые затем, возможно, факторизуются по действию конечной группы с определенными свойствами (подробнее см. [2, т. 1, гл. 9]).

В большинстве систем с двумя степенями свободы из механики и математической физики, для которых была изучена топология слоений Лиувилля, почти все точки бифуркационной диаграммы (образа критического множества) имели в прообразе особые слои с невырожденными критическими точками ранга 1. В то же время прообраз конечного числа точек обыкновенно устроен сложнее: в нем имеются или точки ранга 0 (невырожденные при почти всех значениях параметров), или одномерные орбиты, состоящие из вырожденных критических точек ранга 1.

Вопрос классификации вырожденных особенностей интегрируемых систем является весьма непростым. Так, в работе А. В. Болсинова, Л. Гульелми и Е. А. Кудрявцевой [24] был рассмотрен простейший класс таких локальных особенностей, называемых параболическими (также см. работу [25]). Локальная бифуркационная диаграмма данных особенностей имеет в подходящих координатах вид полукубической параболы.

В работе [24] был предложен критерий параболичности локальной вырожденной особенности ранга 1, сформулированный в терминах первых интегралов системы. Этот критерий оказался весьма удобным при проверке параболичности конкретных интегрируемых систем из приложений.

Если критическое множество на компактном особым слое состоит ровно из одной окружности, являющейся орбитой параболической точки (отметим, что тогда и остальные точки этой окружности будут параболическими), то соответствующая полулокальная особенность называется *каспидальной* и является структурно-устойчивой (неустранима при малом интегрируемом возмущении системы, т.е. набора из симплектической структуры и первых интегралов [24, 26]).

Предложенный в [24] критерий параболичности точки можно принять за определение таких точек. На симплектическом многообразии (M^4, Ω) рассмотрим отображение момента $\mathfrak{F} = (H, F)$, т.е. пару вещественно-аналитических функций H и F из M^4 в $\mathbb{R}$, коммутирующих относительно формы Ω. Таким набором (H, F, ω) определяется локальное гамильтоново $\mathbb{R}^2$-действие на M^4. На неособых симплектических 4-листах рассматриваемых в нашей работе систем оно будет глобальным.

Положим, что $dF(x) \neq 0$, и ограничим H на поверхность уровня F, содержащую x, т.е. $H_0 := H|_{\{F=F(x)\}}$. Это гладкое 3-подмногообразие в M^4. Также положим, что $\mathrm{rk}\, d\mathfrak{F} = 1$ в точке x. Тем самым x — критическая точка функции H_0 и существует единственное число $k \in \mathbb{R}$, такое, что $dH(x) = kdF(x)$.

Определение. Точка x (и проходящая через нее $\mathbb{R}^2$-орбита гамильтонова действия) называется *параболической*, если выполнены три следующих условия:

(i) второй дифференциал ограничения $d^2H_0(x)$ имеет ранг 1 в ней;

(ii) существует вектор $v \in \operatorname{Ker} d^2H_0(x)$, такой, что $v^3H_0 \neq 0$ (обозначим через v^3H_0 третий дифференциал H_0 в направлении касательного вектора v в точке x);

(iii) второй дифференциал $d^2(H - kF)(x)$ имеет ранг 3, где для числа $k \in \mathbb{R}$ верно $dH(x) = k\, dF(x)$.

Подчеркнем, что определение невырожденных точек через условие Морса–Ботта и их последующее активное изучение были обусловлены тем, что именно такими являются почти все особые точки систем из приложений.

Вполне естественным является вопрос: удовлетворяет ли определению параболичности достаточно широкий класс вырожденных особых точек реальных интегрируемых систем? В настоящей работе мы покажем, что для одного известного многопараметрического семейства систем динамики твердого тела свойство параболичности действительно является свойством общего положения.

3. Интегрируемый случай Жуковского. Задача о движении волчка, т.е. о вращении твердого тела вокруг своей неподвижной точки, может быть обобщена и дополнительно усложнена добавлением к телу постоянного гиростатического момента. Как оказалось, при таком обобщении волчков Эйлера, Лагранжа и Ковалевской [27] получаются системы (они перечислены, например, в монографии [2]), которые тоже интегрируемы и известны в литературе как случай Жуковского, случай Лагранжа с гиростатом и случай Ковалевской–Яхьи соответственно [14].

Интегрируемое обобщение случая Эйлера, т.е. тела, закрепленного на шарнире в своем центре масс, было открыто Н. Е. Жуковским [28]. Мы рассмотрим случай осесимметричного тела, а на последнем этапе перейдем к возмущению данной системы. Параметрами изначальной системы являются значение интеграла площадей $f_2 = b$, отношение двух различных моментов инерции $A_1 : A_2$ и значения проекций λ_1, λ_2 вектора гиростатического момента на ось симметрии и на перпендикулярную ей плоскость.

Систему Жуковского, как и многие другие системы динамики твердого тела, можно задать на двойственном пространстве к алгебре Ли $e(3)$, т.е. на $\mathbb{R}^6$ с координатами $(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ и скобкой Ли–Пуассона:

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k, \qquad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k \qquad \{x_i, x_j\} = 0,$$

где ε_{ijk} есть знак перестановки $(123) \to (ijk)$. Сама динамическая система задается уравнениями вида $\dot{y_i} = \{y_i, H\}$ для $y_i \in \{J_1, \ldots, x_3\}$.

Рассмотренная выше скобка имеет следующие функции Казимира, являющиеся первыми интегралами систем, — геометрический интеграл f_1 и интеграл площадей f_2:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad f_2 = x_1J_1 + x_2J_2 + x_3J_3.$$

Совместная поверхность уровня $M^4_{a,b} : \{f_1 = a, f_2 = b\} \subset \mathbb{R}^6$ является гладким симплектическим многообразием при $a > 0$ и гомеоморфна T^*S^2. Без ограничения общности положим $a = 1$, чего можно добиться линейной заменой координат. Обозначим многообразие $M^4_{1,b}$ через M^4_b.

Гамильтониан системы Жуковского, умноженный на 2, обозначим H. Он зависит от набора физических параметров — соотношения $A_1 : A_2 : A_3$ моментов инерции (относительно главных осей) и вектора гиростатического момента $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$H = \frac{(J_1 + \lambda_1)^2}{A_1} + \frac{(J_2 + \lambda_2)^2}{A_2} + \frac{(J_3 + \lambda_3)^2}{A_3}.$$

При произвольных значениях параметров (из физического смысла задачи $A_i > 0$) этот гамильтониан интегрируем, причем интеграл совпадает с интегралом системы Эйлера F и является квадратичным:

$$F = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2.$$

Также для удобства записи вычислений введем величины a_i, α_i и μ_i для $i = 1, 2, 3$:

$$a_i = 1/A_i, \qquad \alpha_i^3 = a_i, \qquad \mu_i^3 = \lambda_i.$$

В случае, когда все моменты инерции различны, а компоненты вектора $\bar\lambda$ отличны от нуля, фазовая топология системы была подробно изучена в работах М. П. Харламова [3] и А. А. Ошемкова [9]. При этом бифуркационная диаграмма отображения момента на плоскости Ohf значений интегралов H, F содержит параметрическую кривую $(h(t), f(t))$, где $t \in \mathbb{R}\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$:

$$h(t) = t^2\left(\frac{a_1\lambda_1^2}{(a_1-t)^2} + \frac{a_2\lambda_2^2}{(a_2-t)^2} + \frac{a_3\lambda_3^2}{(a_3-t)^2}\right), \qquad f(t) = \frac{a_1^2\lambda_1^2}{(a_1-t)^2} + \frac{a_2^2\lambda_2^2}{(a_2-t)^2} + \frac{a_3^2\lambda_3^2}{(a_3-t)^2}.$$

При $a_1 > a_2 > a_3$ полученная кривая имеет три непрерывные ветви, соответствующие промежуткам $(a_3, a_2), (a_2, a_1), (a_1, +\infty) \cup (-\infty, a_3)$. Последние разделяются значениями параметра $t \in \{a_1, a_2, a_3\}$. Каждому из двух конечных интервалов соответствует кусочно-гладкая ветвь кривой, имеющая ровно одну точку возврата. Вычисление значения параметра кривой, соответствующего этой точке, для произвольных моментов инерции и компонент вектора гиростатического момента представляет собой непростую задачу и ранее не выполнялось.

Система Жуковского, как и система Эйлера, обладает замечательным свойством. Поскольку гамильтониан H и интеграл F не зависят от переменных x_1, x_2, x_3, то M_b^4 можно спроецировать на $\mathbb{R}^3(J_1, J_2, J_3)$ и получить следующее слоение с особенностями: каждой тройке $\bar J = (J_1, J_2, J_3)$ соответствуют точки, у которых набор координат (x_1, x_2, x_3) как точка $\bar x$ пространства $\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$ лежит в пересечении сферы $f_1 = |\bar x|^2 = a = 1$ и плоскости $b = <\bar x, \bar J>$.

При этом у точек открытого шара $|\bar J| < |b|$ прообраз в M_b^4 пуст, у точек сферы $|\bar J| = |b|$ прообраз состоит из точки $\bar x = \pm \bar J$ с нужными знаками, а каждой точке из внешности замкнутого шара $|\bar J| > |b|$ соответствует окружность.

Напомним, что $F = |\bar J|^2 = f$. Тем самым в M_b^4 все слои слоения Лиувилля с условием $f < b^2$ будут пусты, а в случае $f = b^2$ слой будет гомеоморфен своей проекции — связной компоненте пересечения уровней $H = h$ и $F = f$ в $\mathbb{R}^3(J_1, J_2, J_3)$. В случае $f > b^2$ каждый слой гомеоморфен произведению окружности и связной компоненты уровня $H = h, F = f$. Это произведение является прямым. Дело в том, что топология слоев слоения Лиувилля для системы Жуковского хорошо известна: в частности, в нем отсутствуют бутылки Клейна или 3-атомы Фоменко со звездочками (невырожденные особенности с неориентируемой сепаратрисной диаграммой).

4. Основные результаты. Рассмотрим случай осесимметричного тела. Положим $A_2 = A_3$, т.е. $a_2 = a_3$. Повернув при необходимости вторую и третью оси, примем $\lambda_3 = 0$, т.е. осесимметричная система зависит от четырех параметров: $a_1 \neq a_2, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

С точки зрения слоения Лиувилля и бифуркационной диаграммы при этом происходит следующее. У параметрической кривой $h(t), f(t)$ исчезает одна ветвь, содержащая одну из двух (в неосесимметричном случае Жуковского) точек возврата системы и соответствующая интервалу $(a_3, a_2) \subset \mathbb{R}$ ее параметра t. Оставшаяся часть бифуркационной диаграммы никаких перестроек не испытывает.

В осесимметричном случае несложно найти значение параметра t_0, соответствующее сохранившейся точке возврата кривой, и вычислить координаты ее образа $h_0 = h(t_0)$ и $f_0 = f(t_0)$ на плоскости Ohf:

$$t_0 = \alpha_1^2\alpha_2^2\frac{(\alpha_2\mu_1^2 + \alpha_1\mu_2^2)}{\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2}, \qquad h_0 = \alpha_1^3\alpha_2^3\frac{(\alpha_2\mu_1^2 + \alpha_1\mu_2^2)^3}{(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)^2}, \quad f_0 = \frac{(\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2)^3}{(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)^2}.$$

Более трудной оказывается задача вычисления координат (J_1, J_2, J_3), которые соответствовали бы критической окружности (состоящей из вырожденных точек).

Утверждение. *В случае* $|b| < b_0$, *где* $b_0 = +\sqrt{f_0} = (\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2)^{3/2}/|\alpha_1^3 - \alpha_2^3|$, *прообраз точки возврата кривой* $h(t), f(t)$ *при отображении момента* (H, F) *гомеоморфен двумерному тору. Критическое множество на нем гомеоморфно окружности, и все ее точки вырождены. Эта критическая окружность проецируется в точку* (J_{10}, J_{20}, J_{30}) *пространства* $\mathbb{R}^3(J_1, J_2, J_3)$ *с координатами*

$$J_{10} = -\alpha_1\mu_1\frac{\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2}{\alpha_1^3 - \alpha_2^3}, \quad J_{20} = \alpha_2\mu_2\frac{\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2}{\alpha_1^3 - \alpha_2^3}, \quad J_{30} = 0.$$

Далее несложно выбрать тройку координат (x_1, x_2, x_3), задающую вместе с тройкой (J_{10}, J_{20}, J_{30}) вырожденную критическую точку в M_b^4.

Теперь применим к точке $(J_{10}, J_{20}, J_{30}, x_1, x_2, x_3)$ критерий параболичности критической точки ранга 1 интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, предложенный А. В. Болсиновым, Л. Гульелми и Е. А. Кудрявцевой в [24].

Теорема 1. *Рассмотрим осесимметричную систему Жуковского ($A_1 = A_2 < A_3$ либо $A_1 < A_2 = A_3$) с вектором гиростатического момента $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, таким, что $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$. При условиях $f_1 = 1$ и $|f_2| = |b| < b_0$ все вырожденные особые точки в $M^4_{1,b}$ являются параболическими и составляют одну окружность. Содержащая ее полулокальная особенность является каспидальной и структурно-устойчива при малых возмущениях системы в классе интегрируемых систем.*

Возмутим осесимметричную систему, заменив в ее гамильтониане H один из двух совпадающих главных моментов инерции A_i на функцию $\tilde{A}_i(\varepsilon) = A_i + \varepsilon$. Иначе говоря, введем для малых ε семейство гамильтонианов H_ε, в которое при $\varepsilon = 0$ вкладывается невозмущенный гамильтониан осесимметричной системы. Из структурной устойчивости параболических и каспидальных особенностей, имеющихся в осесимметричной системе при $\varepsilon = 0$, следует параболичность и каспидальность вырожденных (неботтовских) особенностей возмущенной системы трехосного волчка Эйлера с добавленным к нему гиростатом.

Теорема 2. *Рассмотрим систему, являющуюся малым возмущением осесимметричной системы Жуковского, а также имеющую попарно различные главные моменты инерции ($A_1, A_1 + \varepsilon, A_2$ или $A_1, A_2, A_2 + \varepsilon$ для малого ε) и ненулевые компоненты вектора гиростатического момента $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Фазовое пространство данной системы содержит окружность параболических точек на каспидальном торе в прообразе точки возврата бифуркационной кривой $h(t), f(t)$, близкой к точке возврата невозмущенной системы.*

Иными словами, произвольная система Жуковского, близкая к осесимметричной, имеет каспидальные и параболические вырожденные особенности.

5. Доказательства. Найдем координаты (J_{10}, J_{20}, J_{30}) точки, являющейся проекцией вырожденной окружности из прообраза точки возврата кривой $h(t), f(t)$.

Доказательство утверждения. Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции H на множестве $F = f$. Записав соответствующие условия на производные $H - \lambda F$ по J_1, J_2, J_3, имеем для некоторого λ

$$J_1 = -\frac{\mu_1^3}{1 + A_1\lambda}, \qquad J_2 = -\frac{\mu_2^3}{1 + A_2\lambda}, \qquad J_3 = 0.$$

Основную сложность представляет отыскание значения $\lambda = \lambda_0$, при котором получаемые критические точки попадают на уровень $F = f_0$. Подставив приведенные выше значения в уравнения H и F, будем иметь

$$\lambda^2 \left(\frac{\alpha_1^6 \mu_1^6}{(1 - \alpha_1^3\lambda)^2} + \frac{\alpha_2^6 \mu_2^6}{(1 - \alpha_2^3\lambda)^2} \right) = \frac{(\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2)^3}{(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)^2} = f_0, \tag{1}$$

$$\frac{\alpha_1^3 \mu_1^6}{(1 - \alpha_1^3\lambda)^2} + \frac{\alpha_2^3 \mu_2^6}{(1 - \alpha_2^3\lambda)^2} = \alpha_1^3\alpha_2^3 \frac{(\alpha_2\mu_1^2 + \alpha_1\mu_2^2)^3}{(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)^2} = h_0. \tag{2}$$

Рассмотрим линейную комбинацию $f_0 - h_0(2\lambda - 1/\alpha_1^3)$ с коэффициентом, зависящим от λ. После небольших упрощений получим выражение вида

$$\frac{\mu_2^6(\alpha_2^3 - \alpha_1^3)}{\alpha_1^3(-1 + \alpha_2^3\lambda)^2} = f_0 - h_0 \left(2\lambda - \frac{1}{\alpha_1^3} \right) - (\mu_1^6 + \mu_2^6). \tag{3}$$

Теперь выразим из уравнения (2) дробь $\dfrac{\alpha_1^3\mu_1^6}{(1 - \alpha_1^3\lambda)^2}$, а из уравнения (3) — дробь $\dfrac{1}{(-1 + \alpha_2^3\lambda)^2}$. Подставим их в уравнение (1). Перенеся все в левую часть и избавившись от знаменателя, имеем

$$\lambda^2((\alpha_2^3 - \alpha_1^3)\mu_2^6\alpha_1^3 h_0 + (\alpha_2^3 - \alpha_1^3)\alpha_2^3\mu_2^6\alpha_1^3(f_0 - h_0(2\lambda - 1/\alpha_1^3) - (\mu_1^6 + \mu_2^6))) - f_0(\alpha_2^3 - \alpha_1^3)\mu_2^6 = 0. \tag{4}$$

Уравнение (3), домноженное на знаменатель, и уравнение (4) задают два многочлена третьей степени по λ. Рассмотрим их линейную комбинацию с коэффициентами α_2^3 и $(-\alpha_1^3 + \alpha_2^3)\mu_2^6$ соответственно. Ее старший коэффициент будет нулевым. Подстановка значений h_0 и f_0, найденных ранее, и последующее символьное упрощение с использованием системы Wolfram Mathematica 12 приводят к равенству следующего вида: квадрат линейного по λ многочлена равен нулю. Поэтому имеем единственное значение λ_0, соответствующее искомой критической точке (несложно убедиться, что эта точка не является морсовской на сфере $|J|^2 = f_0$):

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_2\mu_1^2 + \alpha_1\mu_2^2)}.$$

Отсюда легко находим J_{10} и J_{20}. Утверждение доказано. □

Замечание. Отметим, что если $A_1 < A_2$, то $\alpha_1 > \alpha_2$ и $J_1 < 0 < J_2$. Если же $A_1 > A_2$, то $\alpha_1 < \alpha_2$ и $J_1 > 0, J_2 < 0$. Это наблюдение будет полезно далее, когда при введении локальных координат (J_1, J_2, x_1, x_2) на M_b^4 потребуется выбирать знак перед радикалами.

Теперь найдем некоторую точку из M_b^4, которая проецируется на полученную точку $(J_{10}, J_{20}, 0)$, и затем проверим ее параболичность.

Доказательство теоремы 1. 1. Введем на $M_{1,b}^4$ локальные координаты J_1, J_2, x_1, x_2, т.е. выразим x_3 и J_3 как функции от них из уравнений $f_1 = 1, f_2 = b$. Якобиан $\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(J_3, x_3)}$ равен $2x_3^2$, т.е. для регулярности координат достаточно выбрать точку на окружности, в которой $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \neq 0$.

Рассмотрим на $M_{1,b}^4$ первый интеграл $\Phi = H - \alpha_2^3 F$ и поверхность его уровня Q^3, содержащую слой с вырожденной окружностью. В качестве локальных координат выберем J_2, x_1, x_2, т.е. выразим J_1 через них. Якобиан замены имеет вид $4\,\alpha_1\alpha_2^2\,\mu_1\mu_2^2\,(-1 + x_1^2 + x_2^2)$, т.е. отличен от нуля при $x_3 \neq 0$ и $\mu_1\mu_2 \neq 0$.

2. Плоскость $b = <\bar{x}, \bar{J}_0>$ параллельна оси Ox_3 в $\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$, поскольку $J_{30} = 0$. Выберем в качестве x_1, x_2 значения координат в точке основания перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из начала координат. Их легко найти из вида J_{10} и J_{20}. Более того, значение $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ обязательно положительно в случае, если пересечение плоскости и сферы $f_1 = |\bar{x}|^2 = 1$ является окружностью. Имеем

$$x_{10} = -\frac{\alpha_1\mu_1(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)b}{(\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2)^2}\quad,\quad x_{20} = +\frac{\alpha_1\mu_1(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)b}{(\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2)^2}\quad,\quad x_{30} = +\sqrt{1 - x_{10}^2 - x_{20}^2}\,.$$

3. Выразив x_3 из уравнения $f_1 = 1$ и подставив в $f_2 = b$, получим

$$x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, \qquad J_3 = \frac{b - x_1J_1 - x_2J_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}.$$

Подставим эти выражения в формулу интеграла Φ:

$$\Phi = \alpha_1^3(J_1 + \mu_1^3)^2 + \alpha_2^3(-J_1^2 + 2J_2\mu_2^3 + \mu_2^6).$$

Значение $\Phi = \varphi_0$ в вырожденных точках равно

$$\varphi_0 = \frac{\alpha_2^3(3\alpha_1^2\alpha_2\mu_1^2\mu_2^4 + \alpha_2^3\mu_2^6 + \alpha_1^3(-\mu_1^6 + \mu_2^6))}{\alpha_1^3 - \alpha_2^3}.$$

Получили уравнение $\Phi = \varphi_0$, левая часть которого является многочленом степени 2 по переменной J_1. Решив это уравнение относительно J_1, получим две ветви $J_1^{\pm}(J_2)$, отличающиеся знаком перед радикалом.

Для выбора знака напомним, что пара значений J_{10} и J_{20} переменных J_1 и J_2 обращает уравнение $\Phi = \varphi_0$ в тождество. Подставим значение J_{20} в формулы для $J_1^{\pm}$, будем иметь

$$J_1^{\pm}(J_{20}) = \frac{-\,\alpha_1^3\mu_1^3 \pm \alpha_1\alpha_2^2|\mu_1|\mu_2^2}{\alpha_1^3 - \alpha_2^3}.$$

Искомый знак отвечает условию $J_1^{\pm} = J_{10}$. Без ограничения общности примем $\mu_1 > 0$ (иначе поменяем направление оси). Получаем, что условию удовлетворяет знак “минус”. Отсюда

$$J_1(J_2, x_1, x_2) \;=\; -\frac{\alpha_1^3\mu_1^3 + \sqrt{\alpha_2^3\mu_2^3}\,\sqrt{2J_2(\alpha_2^3 - \alpha_1^3) + 3\alpha_1^2\alpha_2\mu_1^2\mu_2 + 2\alpha_2^3\mu_2^3}}{(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)}.$$

4. Вычислим дифференциалы функций $\Phi(J_1, J_2, x_1, x_2)$ и $F(J_1, J_2, J_3(J_1, J_2, x_1, x_2))$ по переменным (J_1, J_2, x_1, x_2). Выполнив символьные вычисления в системе Wolfram Mathematica 12, подставим в эти формулы значения координат $J_{10}, J_{20}, x_{10}, x_{20}$ вырожденной критической точки. Получим, что дифференциал следующей линейной комбинации обращается в нуль:

$$(\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2)d\Phi - \alpha_2^2\mu_2^2(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)dF = (0, 0, 0, 0).$$

Рассмотрим второй дифференциал этой линейной комбинации. Аналогично, выполнив символьные вычисления в системе Wolfram Mathematica 12, получим формулы для компонент его матрицы, а затем подставим в них координаты изучаемой точки.

Две строки полученной матрицы, соответствующие переменным x_1 и x_2, линейно зависимы. Тем самым для выполнения условия (iii) определения параболической точки остается проверить невырожденность подматрицы 3×3, соответствующей переменным J_1, J_2, x_1.

Ее определитель есть произведение выражения $8\ \alpha_1^4\alpha_2^4\ (\alpha_1^3 - \alpha_2^3)\ \mu_1^4\ \mu_2^4\ (\alpha_1^2\mu_1^2 + \alpha_2^2\mu_2^2)^5$ и квадрата следующего выражения от b:

$$-2\alpha_1^3\alpha_2^3 b^2 + \alpha_1^6(b^2 - \mu_1^6) - 3\alpha_1^4\alpha_2^2\mu_1^4\mu_2^2 - 3\alpha_1^2\alpha_2^4\mu_1^2\mu_2^4 + \alpha_2^6(b^2 - \mu_2^6).$$

Последнее отлично от нуля, если $|b| \neq f_0$, т.е. интеграл площадей f_2 не равен значению F на вырожденной орбите. Тем самым при $|b| < \sqrt{f}$ ранг матрицы второго дифференциала равен трем, т.е. условие (iii) параболичности выполнено.

5. Остается проверить условия (i) и (ii). Сделаем это для F как функции от локальных координат J_2, x_1, x_2 на совместной поверхности уровня функций f_1, f_2, Φ вблизи изучаемой точки. Полученная матрица второго дифференциала в данной точке имеет нулевыми первую строку и столбец (дифференцирование по J_2), а две другие строки линейно зависимы и не являются ненулевыми. Тем самым ранг второго дифференциала ограничения равен 1 и условие (i) выполнено.

Для проверки условия (ii) заметим, что вектор $(1, 0, 0)$ лежит в ядре второго дифференциала. Подставим его в третий дифференциал d^3F этой функции F и после упрощений получим $\dfrac{6(\alpha_1^3 - \alpha_2^3)}{\alpha_1^2\alpha_2\mu_1^2\mu_2}$. В случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\mu_1\mu_2 \neq 0$ третий дифференциал d^3F корректно определен и отличен от нуля, т.е. условие (ii) выполнено и данная точка является параболической (вместе со всей ее орбитой). Теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности пусть для исходной системы $A_1 < A_2 = A_3$, а для возмущенной $A_1 < A_2 < \tilde{A}_3 = A_2 + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$. Случай $A_1 < \tilde{A}_2 = A_1 + \varepsilon < A_3$ разбирается аналогично. Параметры вектора $\bar{\lambda}$ примем ненулевыми. Это соответствует повороту базиса на угол $\varphi \neq pk/2$ для $k \in \mathbb{Z}$ в плоскостях OJ_2J_3 и Ox_2x_3. Тогда в одной из точек параболической орбиты все компоненты $\bar{J} = (J_{10}, J_{20}\cos\varphi, J_{20}\sin\varphi)$ не равны нулю для найденных выше J_{10} и J_{20}.

Поскольку функции H, F являются гладкими по переменным J_1, J_2, J_3 и параметру ε при его малых значениях (от переменных x_1, x_2, x_3 эти функции не зависят) и система локальных координат J_1, J_2, x_1, x_2 является регулярной в окрестности точки параболической орбиты (в которой $x_3 \neq 0$), то функции H, F от $J_1, J_2, x_1, x_2, \varepsilon$ являются гладкими на симплектическом многообразии $M^4_{1,b}$, содержащем эту точку параболической орбиты. При всех малых значениях ε функции H, F находятся в инволюции как первые интегралы системы.

Для малых ε, ненулевых $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и значений $f_2 = \tilde{b}$, близких к исходному b, бифуркационная диаграмма отображения момента возмущенной системы содержит точку возврата кривой $h(t), f(t)$. Прообраз этой точки при всех указанных значениях параметров гомеоморфен тору и содержит критическую окружность, все точки которой имеют ранг 1 и являются вырожденными. Согласно результатам о структурной устойчивости параболических и каспидальных особенностей (см. [24], а также [26]) из этого факта с учетом гладкости функций H, F по переменным и параметрам следует, что указанные локальные и полулокальные особенности являются параболическими и каспидальными соответственно. Теорема 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1 выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20–31–90114). Автор является участником Межрегиональной школы Московского университета “Математические методы анализа сложных систем”, а также стипендиатом фонда “БАЗИС” (№ 18–2–6–51–1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smale S.* Topology and Mechanics, 1 // Invent. Math. 1970. **10**, N 4. 305–331.

2. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1, 2. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999.
3. *Харламов М.П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1988.
4. *Фоменко А.Т.* Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР. 1986. **287**, № 5. 1071–1075.
5. *Фоменко А.Т.* Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, № 6. 1276–1307.
6. *Фоменко А.Т.* Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. **22**, № 4. 38–51.
7. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, № 3. 546–575.
8. *Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Успехи матем. наук. 1990. **45**, № 2. 49–77.
9. *Oshemkov A.A.* Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Topological Classification of Integrable Systems. Advances in Soviet Mathematics. Vol. 6. Amer. Math. Soc., Providence, 1991. 67–146.
10. *Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. **191**, № 2. 3–42.
11. *Ryabov P.E.* Bifurcations of first integrals in the Sokolov case // Theor. Math. Phys. 2003. **134**, N 2. 181–197.
12. *Морозов П.В.* Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа // Матем. сб. 2004. **195**, № 3. 69–114.
13. *Морозов П.В.* Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи // Матем. сб. 2007. **198**, № 8. 59–82.
14. *Славина Н.С.* Топологическая классификация систем типа Ковалевской–Яхьи // Матем. сб. 2014. **205**, № 1. 105–160.
15. *Хагигатдуст Г., Ошемков А.А.* Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли so(4) // Матем. сб. 2009. **200**, № 6. 119–142.
16. *Kibkalo V.A.* Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(4) // Sbornik Math. 2019. **210**, № 5. 625–662.
17. *Kibkalo V.* Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(3, 1) // Topol. and its Appl. 2020. **275**. 107028.
18. *Фокичева В.В.* Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**, № 10. 127–176.
19. *Fokicheva V.V., Fomenko A.T.* Integrable billiards model important integrable cases of rigid body dynamics // Dokl. Math. 2015. **92**, N 3. 682–684.
20. *Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, № 4. 20–67.
21. *Fomenko A.T., Vedyushkina V.V.* Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential // Mosc. Univ. Math. Bull. 2019. **74**, N 3. 98–107.
22. *Eliasson L.H.* Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // Comment. math. helv. 1990. **65**. 4–35.
23. *Zung N.T.* Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities // Compositio Math. 1996. **101**, N 2. 179–215.
24. *Bolsinov A.V., Guglielmi L., Kudryavtseva E.A.* Symplectic invariants for parabolic orbits and cusp singularities of integrable systems with two degrees of freedom // Phil. Trans. Roy. Soc. A: Math., Phys., Engin. Sci. 2018. **376**, N 2131. 20170424.
25. *Efstathiou K., Giacobbe A.* The topology associated to cusp singular points // Nonlinearity. 2012. **25**, N 12. 3409–3422.
26. *Kudryavtseva E.A.* Hidden toric symmetry and structural stability of singularities in integrable systems // Europ. J. Math. 2022. **8**. 1487–1549.
27. *Yehia H.M.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Communs. 1986. **13**, N 3. 169–172.
28. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М.; Л., 1949. Т. 2. 152–309.

Поступила в редакцию
27.10.2021