4. *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. **205**, № 4. 3–19.
5. *Беднов Б.Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб. 2016. **207**, № 8. 31–46.
6. *Wolfe D.* A minimal point of a finite metric set // J. Combin. Theory. 1967. **2**. 514–522.
7. *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2011. № 6. 26–31.

Поступила в редакцию
31.10.2021

УДК 515.12

НОВЫЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, ОБОБЩАЮЩИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНУЮ НЕСВЯЗНОСТЬ

А. Ю. Грознова[1], **О. В. Сипачёва**[2]

Вводятся новые классы топологических пространств R_1, R_2, R_3, обобщающие класс F-пространств. Доказано, что все однородные компактные подпространства пространств из этих классов и их некоторых произведений конечны. Получены результаты о сравнимости в смысле Рудин–Кейслера ультрафильтров, по которым в R_2- и R_3-пространствах сходятся разные последовательности к одной и той же точке.

Ключевые слова: F-пространство, $\beta\omega$-пространство, R_1-пространство, R_2-пространство, R_3-пространство, однородный компакт, ультрафильтр, порядок Рудин–Кейслера.

New classes R_1, R_2, R_3 of topological spaces generalizing the class of F-spaces are introduced. It is proved that all homogeneous compact subspaces of spaces in these classes and of some of their products are finite. Results on the Rudin–Keisler comparability of ultrafilters along which distinct sequences converge to the same point in R_2- and R_3-spaces are obtained.

Key words: F-space, $\beta\omega$-space, R_1-space, R_2-space, R_3-space, homogeneous compact space, ultrafilter, Rudin–Keisler order.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-19-25

Всюду ниже под пространствами подразумеваются вполне регулярные топологические пространства.

Мы рассматриваем обобщения классов экстремально несвязных пространств и F-пространств. Пространство X называется *экстремально несвязным*, если непересекающиеся открытые подмножества X имеют непересекающиеся замыкания, и *F-пространством*, если непересекающиеся функционально открытые подмножества X функционально отделимы. На первый взгляд эти пространства могут показаться экзотическими, однако они играют центральную роль в теории непрерывных отображений компактных пространств [1, 2] и в теории двойственности между топологическими пространствами [3], а также в теории колец непрерывных функций [4]. В частности, F-пространства характеризуются тем свойством, что кольцо непрерывных функций на таком пространстве является F-кольцом, т.е. все конечно порожденные идеалы в нем являются главными. Основные топологические свойства экстремально несвязных и F-пространств можно найти в основополагающей книге [4] Л. Гиллмана и М. Джерисона по теории колец непрерывных функций.

Однако класс F-пространств (и тем более экстремально несвязных пространств) довольно узок, и важной задачей является поиск более широких классов пространств, обладающих теми или иными полезными свойствами F-пространств. Так, ван Дауэн в своей диссертации [5] ввел понятие $\beta\omega$-пространства. Этот класс оказался весьма полезным при изучении свойств ультрафильтров [6]

[1] *Грознова Анастасия Юрьевна* — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: avsav999@mail.ru.

Groznova Anastasiya Yur'evna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

[2] *Сипачёва Ольга Викторовна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: o-sipa@yandex.ru.

Sipacheva Ol'ga Viktorovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

и непрерывных отображений на подпространства произведений [7]. Пространство X называется *$\beta\omega$-пространством*, если из того, что $D \subset X$, $|D| = \aleph_0$, множество D дискретно и $\overline{D}$ компактно, следует, что $\overline{D} \cong \beta\omega$. Известно, что любое F-пространство является $\beta\omega$-пространством и что некоторые полезные утверждения об F-пространствах остаются верными для $\beta\omega$-пространств. Однако многие важные результаты перенести на $\beta\omega$-пространства не удается, хотя различия между F- и $\beta\omega$-пространствами довольно тонкие.

В настоящей работе мы вводим классы R_1-, R_2-, R_3-пространств, лежащие строго между классами F- и $\beta\omega$-пространств. На них удается распространить результаты К. Кунена [8], З. Фролика [9] и Е. А. Резниченко [10], связанные с однородностью компактных подпространств экстремально несвязных пространств, F-пространств и их произведений, а также получить результаты о сравнимости ультрафильтров относительно порядка Рудин–Кейслера на множестве ультрафильтров.

Всюду далее через $\overline{A}$ мы обозначаем замыкание множества A в топологическом пространстве и через $|A|$ — его мощность. Мы используем стандартное обозначение ω для множества неотрицательных целых чисел. Через $\beta\omega$ мы обозначаем стоун-чеховскую компактификацию дискретного пространства ω, а через ω^* — стоун-чеховский нарост $\beta\omega \setminus \omega$. Точки пространства $\beta\omega$ отождествляются с ультрафильтрами на ω, а точки ω^* — с неглавными ультрафильтрами на ω. Напомним, что топология пространства $\beta\omega$ порождена базой

$$\mathscr{B} = \{\overline{A} : A \subseteq \omega\}, \quad \text{где} \quad \overline{A} = \{\mathscr{U} \in \beta\omega : A \in \mathscr{U}\} \quad \text{для} \quad A \subseteq \omega.$$

Само множество ω находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех главных ультрафильтров:

$$n \mapsto \mathscr{U}_n = \{A \subseteq \omega : \{n\} \in A\} \in \beta\omega.$$

Все понятия и обозначения, используемые ниже без пояснений, можно найти в книге [11].

Определение 1 (см., например, [11])**.** Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$ для любых двух непересекающихся открытых множеств $U, V \subset X$.

Определение 2 (см., например, [11])**.** Два множества A и B в топологическом пространстве X *отделены*, если $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Предложение 1. *Все счетные подмножества пространства X экстремально несвязны тогда и только тогда, когда любые счетные отделенные подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания.*

Доказательство. Необходимость доказана в [9, предложение 1.9]. Достаточность выполнена в силу того, что любые непересекающиеся открытые множества, очевидно, отделены в любом пространстве. □

Следствие 1 (см. также [4])**.** *Любое счетное подпространство экстремально несвязного пространства экстремально несвязно.*

Настоящая работа посвящена классам топологических пространств R_1, R_2, R_3, которые определяются следующим образом.

Определение 3. Мы будем говорить, что топологическое пространство X является

R_1-пространством, если всякое счетное подмножество X экстремально несвязно, т.е. любые два счетных отделенных подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания (см. предложение 1);

R_2-пространством, если любые два счетных отделенных подмножества пространства X, одно из которых дискретно, имеют непересекающиеся замыкания;

R_3-пространством, если любые два счетных отделенных дискретных подмножества пространства X имеют непересекающиеся замыкания.

Класс всех R_i-пространств, $i = 1, 2, 3$, будем обозначать символом $\mathcal{R}_i$.

Сразу же отметим, что классы $\mathcal{R}_i$, в отличие от классов экстремально несвязных пространств и F-пространств, обладают полезным свойством наследственности, т.е. вместе с каждым пространством содержат все его подпространства.

Очевидно, $\mathcal{R}_1 \subsetneq \mathcal{R}_2 \subsetneq \mathcal{R}_3$, однако обратные включения неверны. Ниже мы приведем соответствующие примеры, но для начала напомним, что такое слабые P-точки, и определим дискретно слабые P-точки.

Определение 4 [8]**.** Точка $x \in X$ называется *слабой P-точкой*, если она не является предельной точкой никакого счетного подмножества X.

Определение 5. Точка $x \in X$ называется *дискретно слабой P-точкой*, если она не является предельной точкой никакого счетного дискретного подмножества X.

Пример 1. *Компактное R_2-пространство, не являющееся R_1-пространством.* Возьмем два экземпляра нароста ω^* стоун-чеховского расширения дискретного пространства ω и в каждом из них выберем дискретно слабую P-точку, не являющуюся слабой P-точкой. Такие точки всегда существуют (см. определение *одинокой точки* в [12]). Склеим копии ω^* по этим двум точкам. Полученное пространство X является R_2-пространством, но не R_1-пространством. Действительно, пусть A и B — счетные отделенные подмножества пространства X, и пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Если x не является точкой склеивания, то она принадлежит только одной из копий ω^* и у нее найдется окрестность U, целиком лежащая в этой копии. Ясно, что $A' = A \cap U$ и $B' = B \cap U$ — отделенные счетные подпространства пространства $\omega^* \subset \beta\omega$, причем $x \in \overline{A}' \cap \overline{B}'$, а это противоречит следствию 1 и экстремальной несвязности пространства $\beta\omega$ [11, следствие 6.2.29]. Из того, что обе точки не являются слабыми P-точками в соответствующих копиях пространства ω^*, следует, что точка склеивания — предельная для счетного множества A, целиком лежащего в одной из копий ω^*, и для счетного множества B, целиком лежащего в другой копии. Значит, X не R_1-пространство. С другой стороны, точка склеивания не является предельной ни для какого счетного дискретного множества, так как если бы такое множество существовало, то точка склеивания была бы предельной для его пересечения хотя бы с одной копией ω^* в противоречие с тем, что она не является дискретно слабой P-точкой ни в одной из копий.

Пример 2. *Компактное R_3-пространство, не являющееся R_2-пространством.* Возьмем два экземпляра ω^*, склеенные по двум точкам. В первом выберем дискретно слабую P-точку, не являющуюся слабой P-точкой (чтобы нарушилось свойство R_2), во втором — точку, не являющуюся дискретно слабой P-точкой (тогда она является предельной для некоторого счетного дискретного множества). Полученное пространство есть R_3-пространство, но не R_2-пространство.

Теперь покажем, что классы $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ строго шире класса F-пространств.

Определение 6 (см. [4]). Топологическое пространство X является *F-пространством*, если любые непересекающиеся функционально открытые подмножества X функционально отделимы, и *F'-пространством*, если любые такие подмножества имеют непересекающиеся замыкания.

Нам понадобятся следующие факты из книги [4].

Факт 1. Топологические пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда каждое функционально открытое подмножество $Y \subset X$ C^*-вложено в X, т.е. любая ограниченная непрерывная функция на Y продолжается на все пространство X.

Факт 2. Если X — F-пространство, то βX тоже является F-пространством.

Факт 3. Всякое C^*-вложенное подпространство F-пространства является F-пространством.

Предложение 2. *Если X — нормальное пространство, то для любой пары отделенных F_σ-множеств $A, B \subset X$ найдутся функционально открытые непересекающиеся множества U и V из X, такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть A и B — отделенные непересекающиеся F_σ-множества в нормальном пространстве X. Тогда $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ и $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, где множества A_n и B_n замкнуты для любого $n \in \omega$. Без ограничения общности можно считать, что $A_n \subseteq A_{n+1}$ и $B_n \subseteq B_{n+1}$ для $n \in \omega$. Непересекающиеся замкнутые множества в нормальном пространстве X функционально отделимы, поэтому существуют функционально открытые множества V_0 и W_0, такие, что $A_0 \subseteq V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq X \setminus \overline{B}$ и $B_0 \subseteq W_0 \subseteq \overline{W}_0 \subseteq X \setminus \overline{A}$, и для каждого $n \in \omega$ найдутся функционально открытые V_{n+1} и W_{n+1}, такие, что $A_{n+1} \cup \overline{V}_n \subseteq V_{n+1} \subseteq \overline{V}_{n+1} \subseteq X \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{W}_n\right)$ и $B_{n+1} \cup \overline{W}_n \subseteq W_{n+1} \subseteq \overline{W}_{n+1} \subseteq X \setminus \left(\overline{A} \cup \overline{V}_n\right)$. Положим $V = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ и $W = \bigcup_{n\in\omega} W_n$. Эти множества функционально открыты как счетные объединения функционально открытых множеств V_n и W_n [11, с. 77, 78] и являются непересекающимися окрестностями множеств A и B. □

Предложение 3. *Если X — компактное F-пространство, то замыкание любого F_σ-подмножества Y в X является стоун-чеховской компактификацией βY.*

Доказательство. Подмножество $Y \subset X$ нормально, так как нормальность наследуется F_σ-подмножествами (см. [11, с. 122]). Поскольку $\overline{Y}$ — компакт, достаточно показать, что произвольные непересекающиеся замкнутые подмножества Y имеют непересекающиеся замыкания в $\overline{Y}$. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества Y. Они, очевидно, отделены и являются F_σ-множествами в X. В силу предложения 3 у них есть непересекающиеся функционально открытые окрестности V и W, которые в F-пространстве X функционально отделены, и поэтому A и B имеют непересекающиеся замыкания в X. Согласно [11, следствие 3.6.4], имеем $\overline{Y} = \beta Y$. □

Вспомним, что в нормальном пространстве замкнутое множество имеет тип G_δ тогда и только тогда, когда оно функционально замкнуто [11, с. 87]. Все счетные регулярные пространства нормальны, и в таких пространствах все замкнутые множества имеют тип G_δ, а значит, все открытые множества функционально открыты. Отсюда немедленно вытекает следующее предложение.

Предложение 4 (см. [4, п. 14N, задача 5]). *Всякое счетное F-пространство экстремально несвязно.*

Предложение 5. *Всякое F-пространство X является R_1-пространством.*

Доказательство. Пусть $Y \subset X$ — любое счетное множество. В силу факта 2 пространство βX — F-пространство, а в силу предложения 3 пространство βY вложено в βX (поскольку Y, как и любое счетное множество, имеет тип F_σ). Будучи компактом, βY C^*-вложено в βX, а Y C^*-вложено в βY, значит, Y тоже является F-пространством (см. факт 3). По предложению 4 подмножество Y экстремально несвязно, а по следствию 1 оно является R_1-пространством. □

Определение 7 [8]. Точка x в топологическом пространстве X называется *P-точкой*, если для любой счетной последовательности ее окрестностей $U_0, U_1, \ldots$ пересечение $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ тоже является ее окрестностью (необязательно открытой).

Пример 3. *Компактное R_1-пространство, не являющееся F-пространством.* В пространстве ω^* выберем точку, которая не является P-точкой, но является слабой P-точкой; такая точка всегда существует [8]. Возьмем две копии пространства ω^*. Обозначим выбранную точку в одной из этих копий через x_1, а в другой через x_2 и склеим точки x_1 и x_2. Полученное пространство X является R_1-пространством. Действительно, если A и B — два счетных отделенных подмножества X и $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, то x — точка склеивания по той же причине, что и в примере 1, однако тогда она должна быть предельной точкой для пересечения счетного множества $A \cup B$ с одной из копий ω^*, а ни одна из точек x_1 и x_2, по которым производится склеивание, не является предельной точкой ни для какого счетного множества в своей копии ω^*, поскольку обе эти точки являются слабыми P-точками.

С другой стороны, X не является F- и даже F'-пространством. Действительно, поскольку x_i — не P-точка в X_i для $i = 1, 2$, у x_i существуют окрестности $U_0, U_1, \ldots$, такие, что $\overline{U}_{n+1} \subseteq U_n$ и любая окрестность точки x_i пересекает дополнение до замкнутого G_δ-множества $Y_i = \bigcap_{i\in\omega} U_i$ в компакте X_i. Из компактности X_i следует, что множество Y_i функционально замкнуто (см. [11, с. 87]). Значит, множество $Z_i = X_i \setminus Y_i$ функционально открыто в X_i. При склеивании компакт X_i вкладывается в X, и при этом вложении Z_i остается функционально открытым множеством в X. Имеем $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, однако $x \in \overline{Z}_1 \cap \overline{Z}_2$.

Другие примеры R_1-пространств, не являющихся F-пространствами, можно получить, заметив, что свойство быть R_1-пространством наследуется любыми подпространствами, а свойство быть F-пространством не наследуется даже замкнутыми подпространствами (см. [13]).

Теперь рассмотрим класс $\beta\omega$-пространств, который шире классов $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$.

Определение 8 [5]. Топологическое пространство X называется $\beta\omega$-пространством, если каково бы ни было дискретное счетное множество $D \subset X$ с компактным замыканием, замыкание $\overline{D}$ гомеоморфно стоун-чеховской компактификации βD.

Замечание 1. Из определения 7 вытекает, что если в пространстве X нет бесконечных компактов, то оно является $\beta\omega$-пространством.

Предложение 6. *Компактное топологическое пространство X является R_3-пространством тогда и только тогда, когда оно является $\beta\omega$-пространством.*

Доказательство. *Необходимость.* Возьмем произвольное счетное дискретное множество $D \subseteq X$ с компактным замыканием и его непересекающиеся подмножества A и B. Так как $\overline{D}$ компактно, то $cD = \overline{D}$ — некоторая компактификация D. Понятно, что $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$ (в силу дискретности множества D), а значит, $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, поскольку выполнено свойство R_3. Согласно [11, следствие 3.6.4], имеем $\overline{D} \cong \beta\omega$, а это и означает, что X является $\beta\omega$-пространством.

Достаточность. Пусть X — компактное $\beta\omega$-пространство. Возьмем дискретные счетные множества A и B в X, такие, что $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Множество $A \cup B$ дискретно. Действительно, возьмем произвольную точку $x \in A \cup B$ (пусть для определенности $x \in A$). У этой точки есть окрестность U, такая, что $U \cap A = \{x\}$ и $U \cap \overline{B} = \varnothing$, т.е. $U \cap (A \cup B) = \{x\}$. Аналогично у любой точки $x \in B$ есть окрестность V, такая, что $V \cap (A \cup B) = \{x\}$. Значит, объединение A и B дискретно. Следовательно, $\overline{A \cup B} \cong \beta\omega$ в силу компактности замыкания этого объединения в компакте X. Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Поскольку пространство $\beta\omega$ экстремально несвязно, а экстремальная несвязность наследуется счетными подпространствами по следствию 1, пространство $x \cup A \cup B$ должно быть экстремально несвязно, однако замыкания его открытых подмножеств A и B пересекаются в точке x. Это противоречие показывает, что $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$. Ввиду произвольности выбора A и B заключаем, что X — R_3-пространство. □

Замечание 2. Доказательство необходимости в предложении 6 не использует компактность пространства X. Поэтому выполнено следующее утверждение.

Предложение 7. *Всякое R_3-пространство является $\beta\omega$-пространством.*

Пример 4. *Некомпактное $\beta\omega$-пространство, не являющееся R_3-пространством.* Возьмем счетное дискретное пространство X и добавим к нему одну неизолированную точку, проколотыми окрестностями которой являются элементы некоторого ультрафильтра на множестве X. Два экземпляра полученного пространства, склеенные по неизолированной точке, не содержат бесконечных компактов, поэтому представляют собой $\beta\omega$-пространство, которое не является R_3-пространством, так как точка склеивания предельна для обоих экземпляров дискретного множества X.

Из предложений 5 и 7 и примеров 1–4 получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Имеют место строгие включения:*

$$\text{класс } F\text{-пространств} \subset \text{класс } \mathcal{R}_1 \subset \text{класс } \mathcal{R}_2 \subset \text{класс } \mathcal{R}_3 \subset \text{класс } \beta\omega\text{-пространств}.$$

Напомним определение *порядка Рудин–Кейслера* на множестве ультрафильтров на ω.

Определение 9 (см. [14])**.** Пусть $p \in \beta\omega$ и $\varphi\colon \omega \to \omega$. Тогда можно определить $\varphi_*(p) \in \beta\omega$ следующим образом: $M \in \varphi_*(p) \Leftrightarrow \varphi^{-1}(M) \in p$. Ультрафильтры $p, q \in \beta\omega$ связаны отношением $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$ тогда и только тогда, когда существует функция φ, такая, что $p = \varphi_*(q)$.

Определение 10 [15]**.** Говорят, что последовательность точек (x_n) в топологическом пространстве X *сходится к точке* $x \in X$ *по ультрафильтру* $p \in \beta\omega$, если для любой окрестности U точки x множество $\{n : x_n \in U\}$ принадлежит p. Обозначение: $x = \lim\limits_p x_n$ или $x_n \underset{p}{\to} x$.

В 1990 г. К. Кунен доказал теорему о сравнимости ультрафильтров специального вида, по которым могут сходиться к одной и той же точке последовательности в компактном F-пространстве, и использовал ее для доказательства неоднородности бесконечных компактных F-пространств [16]. Следующая теорема усиливает результат Кунена в нескольких направлениях: мы расширяем класс рассматриваемых пространств до класса $\mathcal{R}_2$ и не требуем, чтобы оба ультрафильтра в формулировке теоремы являлись слабыми P-точками. Кроме того, мы явно указываем, какой именно из ультрафильтров меньше другого в смысле порядка Рудин–Кейслера (это уточнение можно извлечь и из доказательства Кунена, но явно оно нигде не формулировалось). Общая схема нашего доказательства подобна схеме Кунена из [16], но в ее реализации имеются существенные отличия, связанные, в частности, с тем, что оригинальное доказательство Кунена содержало пробелы.

Теорема 2. *Пусть $q \in \omega^*$ — любой неглавный ультрафильтр на ω и $p \in \omega^*$ — неглавный ультрафильтр, являющийся слабой P-точкой. Предположим, что существуют компактное R_2-пространство X, точка $x \in X$ и две последовательности $(d_m)_{m\in\omega}$ и $(e_n)_{n\in\omega}$ точек X, такие, что $\{d_m : m \in \omega\}$ — дискретное множество попарно различных точек и $e_n \neq x$ для всех $n \in \omega$, причем $x = \lim\limits_p d_m = \lim\limits_q e_n$. Тогда $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$.*

Доказательство. Положим $D = \{d_m : m \in \omega\}$, $E = \{e_n : n \in \omega\}$ и $D^* = \overline{D} \setminus D$. Выберем открытые непересекающиеся множества U_m, $m \in \omega$, такие, что $d_m \in U_m$ и $U_m \cap D^* = \varnothing$ для всех $m \in \omega$. Введем обозначение $B = \{n : e_n \in \bigcup_{m\in\omega} U_m\}$. Для $P, Q \subset \omega$ положим $D_P = \{d_m : m \in P\}$ и $E_Q = \{e_n : n \in Q\}$. Заметим, что для любых $P \in p$ и $Q \in q$ точка x принадлежит пересечению $\overline{E}_Q \cap \overline{D}_P$.

Возможны следующие случаи.

1. Найдется элемент $Q \in q$, для которого $E_Q \subset \overline{D}$.

1.1. Если $E_Q \cap D = \varnothing$, то определим отображение $f\colon \omega \to D$ правилом $f(m) = d_m$. По свойству стоун-чеховской компактификации f продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}\colon \beta\omega \to \overline{D}$. Так как X — компактное R_2-пространство, а поэтому и $\beta\omega$-пространство (в силу предложения 6 и включения $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3$), выполняется $\overline{D} = \beta D$, а значит, $\tilde{f}$ — гомеоморфизм. Пусть $g = \tilde{f}^{-1}$. Поскольку $E_Q \cap D = \varnothing$, имеем $g(e_n) \in \omega^*$ для $n \in Q$, а поскольку g — гомеоморфизм, верно равенство $g(x) = p = \lim\limits_q \big(g(e_n)\big)_{n\in\omega}$. То, что ультрафильтр p является слабой P-точкой, означает, что p может быть предельной точкой для не более чем счетного множества $\{g(e_n) : n \in Q\} \subset \omega^*$ только в том случае, если бесконечное число элементов этого множества равно p, т.е. $e_n = x$ для бесконечно многих n, а это противоречит условиям теоремы.

1.2. В случае, когда $E_Q \subset D$, рассмотрим отображение $\varphi\colon \omega \to \omega$, определенное правилом $\varphi(n) = m \iff e_n = d_m$ для $n \in Q$ и $\varphi(n) = 0$ для $n \notin Q$. Возможны следующие варианты:

1.2.1) для любого множества $Q' \subset Q$, такого, что $Q' \in q$, имеем $\varphi(Q') \in p$. Тогда $p = \varphi_*(q)$, так что $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$;

1.2.2) существует элемент $Q' \in q$, для которого $\varphi(Q') \notin p$, т.е. $\omega \setminus \varphi(Q') \in p$. Без ограничения общности можно считать, что $Q' \subset Q$ (иначе рассмотрим $Q' \cap Q$). Имеем

$$\bigcup\{U_n :\, n \in \omega \setminus \varphi(Q')\} \bigcap \bigcup\{U_n :\, n \in \varphi(Q')\} = \varnothing,$$

причем

$$\{d_m : m \in \omega \setminus \varphi(Q')\} \subset \bigcup\{U_m : m \in \omega \setminus \varphi(Q')\} \quad \text{и} \quad E_{Q'} \subset \bigcup\{U_n :\, n \in \varphi(Q')\}.$$

Поэтому $\overline{D}_{\omega\setminus\varphi(Q')} \cap \overline{E}_{Q'} = \varnothing$ в противоречие со сделанным в начале доказательства замечанием, что $x \in \overline{E}_Q \cap \overline{D}_P$ для любых $P \in p$ и $Q \in q$.

2. Предположим, что найдется элемент $Q \in q$, такой, что $E_Q \cap \overline{D} = \varnothing$. Снова рассмотрим два случая.

2.1. Пусть $B \in q$. Определим отображение $\varphi\colon \omega \to \omega$ правилом $\varphi(n) = m \iff e_n \in U_m$ для $n \in B$ и $\varphi(n) = 0$ для $n \notin B$:

2.1.1) предположим, что для каждого элемента $B' \in q$, $B' \subset B$, имеем

$$\varphi(B') = \{m : e_n \in U_m \text{ для некоторого } n \in B'\} \in p.$$

Тогда $p = \varphi_*(q)$, так что $p \leqslant_{\mathrm{RK}} q$;

2.1.2) предположим, что найдется элемент $B' \in q$, $B' \subset B$, такой, что множество $\{m : e_n \in U_m$ для некоторого $n \in B'\}$ не принадлежит p, тогда его дополнение $A = \{n : U_n \cap E_{B'} = \varnothing\}$ принадлежит p. Имеем $D_A \cap \overline{E}_{B'} = \varnothing$, так как $D_A \subset \bigcup_{n\in A} U_n$. Поскольку по предположению $E_Q \cap \overline{D} = \varnothing$, видим, что для $C = Q \cap B' \in q$ множества D_A и E_C отделены в противоречие с тем, что X — R_2-пространство (действительно, $x \in \overline{D}_A \cap \overline{E}_C$ и множество D_A дискретно).

2.2. Если $B \notin q$, то $\omega \setminus B \in q$ и, очевидно, $\overline{E}_{\omega\setminus B} \cap D = \varnothing$, так что множества $E_{\omega\setminus B}$ и D отделены и мы снова приходим к противоречию с тем, что X — R_2-пространство.

3. Если $E_Q \cap X \setminus \overline{D} \neq \varnothing$ для всех $Q \in q$, то $\omega \setminus \{n : e_n \in \overline{D}\} \in q$, поскольку q — ультрафильтр, так что в этом случае выполнено условие 2. □

В статье [10] Е. А. Резниченко доказал, что однородные подпространства третьей степени X^3 произвольного F-пространства X не могут содержать бесконечных компактов. При этом он использовал предположение о том, что X — F-пространство, лишь в одном месте — при доказательстве предложения 19 [10], существенно опирающемся на теорему Кунена о сравнимости ультрафильтров, по которым сходятся последовательности в F-пространстве, во всех остальных местах достаточно требовать, чтобы X являлось $\beta\omega$-пространством. С помощью доказанного выше усиления теоремы Кунена мы получаем следующее обобщение теоремы Резниченко.

Теорема 3. *Пусть Y — R_2-пространство и $X \subset Y^3$ — его однородное подпространство. Тогда любое компактное подпространство пространства X конечно.*

Авторы приносят глубокую благодарность Е. А. Резниченко за стимулирующие беседы. В настоящей статье мы выбрали обозначения $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ для введенных классов пространств в его честь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gleason A.M.* Projective topological spaces // Ill. J. Math. 1958. **2**, N4A. 482–489.
2. *Пономарев В.И.* Об абсолюте топологического пространства // Докл. АН СССР. 1963. **149**. 26–29.
3. *Johnstone P.T.* Stone Spaces. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.
4. *Gillman L., Jerison M.* Rings of Continuous Functions. N.Y.: Springer, 1960.
5. *Van Douwen E.K.* Prime Mappings, Number of Factors and Binary Operations // Dissertationes Math. Vol. **199**. Warszawa: PWN, 1981.
6. *Comfort W.W.* Ultrafiters: some old and some new results // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. **83**. 417–455.
7. *Husek M.* Continuous mappings on subspaces of products // Symp. Math. 1976. **17**. 25–41.
8. *Kunen K.* Weak P-points in N^* // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1978. **23**. 741–749.
9. *Frolik Z.* Maps of extremally disconnected spaces, theory of types, and applications // General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra: Proc. Kanpur Topological Conf. 1968. Praha: Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1971. 133–142.
10. *Reznichenko E.* Homogeneous subspaces of products of extremally disconnected spaces // Topol. and Appl. 2020. **284**. 107403.
11. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
12. *Verner J.L.* Lonely points revisited // Comment. Math. Univ. Carolin. 2013. **54**. 105–110.
13. *Levy R.* Semi-F-spaces // Bull. Canad. Math. 1988. **31**. 385–393.
14. *Comfort W.W., Negrepontis S.* The Theory of Ultrafilters. Berlin: Springer-Verlag, 1974.
15. *Frolík Z.* Sums of ultrafilters // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. **73**. 87–91.

16. *Kunen K.* Large homogeneous compact spaces // Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990. 262–270.

Поступила в редакцию
27.10.2021

УДК 517.938.5

ПАРАБОЛИЧНОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ ЭЙЛЕРА С ГИРОСТАТОМ

В. А. Кибкало [1]

Изучаются вырожденные особенности известного многопараметрического семейства интегрируемых систем динамики твердого тела — систем Жуковского, т.е. волчков Эйлера с добавленным постоянным вектором гиростатического момента. Для осесимметричного твердого тела и близких к нему систем доказано, что вырожденные локальные и полулокальные особенности являются параболическими и каспидальными особенностями соответственно для всех значений набора параметров системы, исключая некоторые гиперповерхности. Установлено, что эти особенности, лежащие в прообразе точки возврата бифуркационной кривой, удовлетворяют критерию параболичности А.В. Болсинова, Л. Гульелми и Е.А. Кудрявцевой. Как следствие они являются структурно-устойчивыми при малых возмущениях системы в классе интегрируемых систем, в частности при малом изменении главных моментов инерции, компонент вектора гиростатического момента и значения интеграла площадей.

Ключевые слова: гамильтонова система, интегрируемость, твердое тело, гиростат, особенность, слоение Лиувилля, параболические особенности, структурная устойчивость.

We study degenerate singularities of the well-known multiparametric family of integrable Zhukovsky cases of rigid body dynamics, i.e., Euler tops with added constant gyrostatic moment. For an axisymmetric rigid body and systems close to it, it is proved that degenerate local and semilocal singularities are parabolic and cuspidal singularities, respectively, for all values of the set of system parameters, excluding some hypersurfaces. It was checked that these singularities belonging to the preimage of the cusp of the bifurcation curve satisfy the parabolicity criterion of A. V. Bolsinov, L. Guglielmi, and E. A. Kudryavtseva. Therefore, they are structurally stable for small perturbations of the system in the class of integrable systems, in particular, for a small change in the principal moments of inertia, the components of the gyrostatic moment, and the values of the area integral.

Key words: Hamiltonian system, integrability, rigid body, gyrostat, singularity, Liouville foliation, parabolic singularity, structural stability.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-25-33

1. Топологические инварианты интегрируемых систем. Изучение гамильтоновых систем путем описания топологических свойств их поверхностей уровня энергии H в фазовом пространстве было начато в известной работе С. Смейла [1]. Как оказалось, вопрос о классе гомеоморфности таких изоэнергетических поверхностей при разных значениях энергии и других параметров системы (таким параметром системы может быть, например, значение ее интеграла площадей f_2) тесно связан с результатами и подходами из теории Морса.

Если система интегрируема, т.е. обладает "достаточно большим" числом скрытых симметрий, то изоэнергетическая поверхность сама может быть расслоена на совместные уровни дополнительных интегралов системы. На фазовом пространстве системы (являющемся симплектическим многообразием) возникает структура слоения Лиувилля (подробнее см. монографию [2]).

[1] *Кибкало Владислав Александрович* — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; мл. науч. сотр. Моск. центра фунд. и прикл. матем., e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Junior Researcher, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.