2. *Каспаров Г.Г.* Операторный K-функтор и расширения C^*-алгебр // Изв. РАН. Сер. матем. 1980. **44**, № 3. 571–636.
3. *Guentner E., Higson N., Trout J.* Equivariant E-theory for C^*-algebras // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. **148**, N 703. 1–83.
4. *Dadarlat M., Loring T.A.* K-homology, asymptotic representations, and unsuspended E-theory // J. Funct. Anal. 1994. **126**, N 2. 367–383.
5. *Manuilov V.M.* A KK-like picture for E-theory of C^*-algebras // Stud. Math. 2017. **252**, N 3. 105–129.
6. *Manuilov V.M., Thomsen K.* Extensions of C^*-algebras and translation invariant asymptotic homomorphisms // Math. Scand. 2007. **100**, N 1. 131–160.
7. *Макеев Г.С.* Еще одно описание функтора Конна–Хигсона // Матем. заметки. 2020. **107**, № 3. 561–574.
8. *Jensen K.K., Thomsen K.* Elements of KK-theory. Boston: Birkhäuser, 1991.
9. *McLane S.* Categories for the working mathematician. N.Y.: Springer, 1998.

Поступила в редакцию
29.09.2021

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О ТОЧКАХ ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ l_∞^2

Б. Б. Беднов[1]

Доказывается, что для заданного набора попарно различных точек $x_1, \dots, x_n$ сумма расстояний от этих точек до их точки Штейнера в пространстве l_∞^2 равна максимуму из суммы длин $[\frac{n}{2}]-1$ отдельных отрезков и либо полупериметра треугольника, либо еще одного отрезка с вершинами в этом множестве. Также рассматривается случай совпадающих точек среди $x_1, \dots, x_n$.

Ключевые слова: манхэттенская плоскость, точка Штейнера.

It is proved that for a given set of pairwise distinct points $x_1, \dots, x_n$ the sum of the distances from these points to their Steiner point in l_∞^2 space is equal to the maximum of the sum of lengths of $[\frac{n}{2}]-1$ separate segments and either a semi-perimeter of a triangle, or another segment with vertices in this set. The case of coincident points among $x_1, \dots, x_n$ is also studied.

Key words: Manhattan plane, Steiner point.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-14-19

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера (в англоязычной литературе — медиан) $\mathrm{st}(M_n)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X\right\} =: |\mathrm{st}|(M_n).$$

Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством n.2.I.P. (n.2 Intersection Property [1]), если всякие n попарно пересекающихся замкнутых шаров в X имеют непустое пересечение.

Теорема A (А. Гротендик [2], Й. Линденштраусс [3], см. также [1]). *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*

(1) *X обладает свойством* n.2.I.P. *для всякого $n \geqslant 3$;*

(2) *X обладает свойством* 4.2.I.P.*;*

(3) *X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ;*

---

[1] *Беднов Борислав Борисович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ФН-12 “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана; доцент каф. высшей математики, механики и математического моделирования ПМГМУ им. И.М. Сеченова Минздрава России (Сеченовский Университет), e-mail: noriiii@inbox.ru.

Bednov Borislav Borisovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Fundamental Sciences-12 “Mathematical Modeling”; Associate Professor, I.M. Sechenov First Moscow State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation (Sechenov University), Chair of Higher Mathematics, Mechanics and Mathematical Modeling.

(4) X^{**} 1-*дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве* Z (*т.е. существует линейный проектор* $P: Z \to X^{**}$ *нормы* 1).

Пространства, удовлетворяющие условиям теоремы А, называются предуальными к L_1 или пространствами Линденштраусса. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие, в частности l^2_∞.

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M_n)$ непусто [4] для произвольного множества $M_n \subset X$, а само множество $\mathrm{st}(M_n)$ можно охарактеризовать [5] (см. также [6]) при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a и b в банаховом пространстве X есть множество $m[a,b] = \{x \in X : \|x-a\| + \|x-b\| = \|a-b\|\}$). Точнее, верна

Теорема В [6, 5]. *Пусть пространство* X *предуально к* L_1. *Для множества* $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *из* X *имеет место формула*

$$|\mathrm{st}|(M) = \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{j=1}^{k} L(N_j) : N_1 \cup \cdots \cup N_k = M \right\},$$

где максимум берется по всем не менее чем двухточечным подмножествам $N_j \subset M$, *причем если точка* x_i *имеет кратность* p_i *в множестве* M, *то* x_i *содержится в* p_i *различных множествах из* $\{N_j\}_{j=1}^k$. *Число* $L(N_j)$ *обозначает максимальную сумму длин ребер цикла, обходящего все вершины из* N_j *по одному разу. При этом*

$$\mathrm{st}(M) = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{st}(N_j^*) = \bigcap m[x_p, x_q], \tag{1}$$

где $\{N_j^*\}_{j=1}^k$ — *такие не менее чем двухточечные подмножества множества* M, *для которых* $\sum_{j=1}^k L(N_j^*) = 2|\mathrm{st}|(M)$, *а последнее пересечение берется по тем парам индексов* p, q, *для которых* $x_p, x_q \in N_j^*$ *соединены ребром в цикле длиной* $L(N_j^*)$, *обходящем множество* N_j^*, $j = 1, \ldots, k$.

Заметим, что для двухточечного множества N_j цикл состоит из одного ребра, посчитанного дважды.

Цель настоящей работы — упростить формулу (1) для точек Штейнера в пространстве l^2_∞, а именно показать, что для произвольного множества $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset l^2_\infty$ одно из разбиений $\{N_j^*\}$ в формуле (1) состоит из $[\frac{n}{2}]$ подмножеств множества M: $[\frac{n}{2}] - 1$ двухточечных подмножеств и либо трехточечного, либо еще одного двухточечного подмножества.

Далее считаем, что $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset l^2_\infty$. Напомним, что l^2_∞ есть плоскость Y с декартовой системой координат $0u_1u_2$, где расстояние вычисляется по формуле $\|x\| = \max\{|u_1|, |u_2|\}$. Считаем, что точки $x_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$, имеют координаты (u_1^i, u_2^i) и точка $0 = (0,0) \in \mathrm{st}(M)$.

Цикл максимальной длины среди всех циклов, обходящих все вершины из M по одному разу без повторений, обозначим $\mathcal{Z}(M)$, его длину обозначим $|\mathcal{Z}|(M)$.

Начнем с частного случая, когда для множества M разбиение $\{N_j^*\}$ одноэлементно. Согласно теореме В в этом случае все элементы множества M различны и среди всех циклов, обходящих все вершины из M по одному разу, существует цикл длиной $2|\mathrm{st}|(M)$, т.е. $|\mathcal{Z}|(M) = 2|\mathrm{st}|(M)$.

Для некоторого подмножества K вершин из M назовем компонентой связности такое подмножество $K' \subseteq K$, что все вершины K' графом $\mathcal{Z}(M)$ обходятся последовательно и концевые вершины полученной цепи в $\mathcal{Z}(M)$ соединяются с точками не из K.

Лемма 1. *Пусть множество* M *в предуальном к* L_1 *пространстве таково, что* $0 \in \mathrm{st}(M)$ *и* $|\mathcal{Z}|(M) = 2|\mathrm{st}|(M)$. *Тогда для двух соседних в цикле* $\mathcal{Z}(M)$ *вершин* x_i *и* x_j *выполнено равенство*

$$\|x_i\| + \|x_j\| = \|x_i - x_j\|, \tag{2}$$

т.е. $0 \in m[x_i, x_j]$.

Лемма 1 непосредственно следует из формулы (1) и определения метрического отрезка.

Заметим, что метрический отрезок $m[a,b]$ в пространстве l^2_∞ — это прямоугольник (возможно, вырожденный в отрезок), две противоположные вершины которого совпадают с точками a и b, а стороны параллельны прямым $u_1 = \pm u_2$. Пространство l^2_1 (двумерная плоскость с нормой $\|x\| = |u_1| + |u_2|$) изометрически изоморфно l^2_∞. На плоскости $0u_1u_2$ в координатах $(v_1, v_2) = (u_1 + u_2, u_1 - u_2)$

метрический отрезок $m[a,b]$ есть прямоугольник со сторонами, параллельными новым координатным осям. Далее под четвертями будем подразумевать координатные четверти относительно координат (v_1, v_2). При этом соседние четверти называются четвертями разной четности, а четверти, расположенные через одну, — четвертями одной четности.

Замечание 1. Равенство (2) в пространстве l^2_∞ означает, что либо $|u^i_1| = \|x_i\|, |u^j_1| = \|x_j\|$ и u^i_1 с u^j_1 противоположных знаков, либо $|u^i_2| = \|x_i\|, |u^j_2| = \|x_j\|$ и u^i_2 с u^j_2 противоположных знаков, т.е. точки x_i и x_j лежат в различных замкнутых четвертях одной четности.

Лемма 2. *Пусть множество M в l^2_∞ таково, что $0 \in \mathrm{st}(M)$, $|\mathcal{Z}|(M) = 2|\mathrm{st}|(M)$ и $\mathcal{Z}(M)$ — нечетный цикл. Тогда среди элементов M есть хотя бы один, достигающий нормы в каждой координате, т.е. лежащий либо на прямой $u_1 = u_2$, либо на прямой $u_1 = -u_2$.*

Доказательство. Поскольку две соседние по циклу вершины должны находиться в различных *замкнутых* четвертях одной четности, а цикл нечетный, то хотя бы один элемент находится в двух замкнутых четвертях разной четности, т.е. соседних, следовательно, лежит либо на прямой $u_1 = u_2$, либо на прямой $u_1 = -u_2$. Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Если $|\mathcal{Z}|(M) = 2|\mathrm{st}|(M)$, $\mathcal{Z}(M)$ — нечетный цикл, $x_n = 0 \in \mathrm{st}(M)$ и все элементы, отличные от x_n, достигают нормы на одной координате (т.е. находятся в двух открытых четвертях одной четности), то множество $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ можно разбить на пары элементов, для которых сумма расстояний между элементами из пары равна $|\mathrm{st}|(M)$, а именно если $\mathcal{Z}(M)$ последовательно обходит вершины $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, то такими парами будут x_{2k-1}, x_{2k}, $k = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$. Сумма длин отрезков $[x_1, x_2], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}]$ совпадает с $|\mathrm{st}|(M)$. При этом полупериметр треугольника $x_{n-2}x_{n-1}x_n$ равен

$$\frac{1}{2}(\|x_{n-2} - x_{n-1}\| + \|x_{n-2} - x_n\| + \|x_{n-1} - x_n\|) = \frac{1}{2}(\|x_{n-2} - x_{n-1}\| + \|x_{n-2}\| + \|x_{n-1}\|) =$$

$$= \|x_{n-2}\| + \|x_{n-1}\| = \|x_{n-2} - x_{n-1}\|$$

в силу (2).

Лемма 3. *Пусть множество M в l^2_∞ таково, что $0 \notin M$, $0 \in \mathrm{st}(M)$, $|\mathcal{Z}|(M) = 2|\mathrm{st}|(M)$ и $\mathcal{Z}(M)$ — нечетный цикл. Тогда существуют два элемента x_i, x_j в M, для которых выполнены равенства*

$$\|x_i - x_j\| = \|x_i + x_j\| = \|x_i\| + \|x_j\|. \tag{3}$$

Заметим, что если $0 \notin M$, $0 \in \mathrm{st}(M)$, то $\|x_i\| \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом из (3) следует, что каждый из элементов x_i, x_j достигает нормы в двух координатах, причем элемент x_i лежит на прямой $u_1 = u_2$, а элемент x_j — на прямой $u_1 = -u_2$.

Доказательство. Хотя бы один элемент среди $\{x_k\}_1^n$ лежит на прямой $u_1 = u_2$, поскольку две соседние по циклу вершины должны находиться в разных (замкнутых) полуплоскостях относительно этой прямой и количество ребер нечетно. Аналогично хотя бы один элемент среди $\{x_k\}_1^n$ лежит на прямой $u_1 = -u_2$. Эти элементы не совпадают, поскольку $0 \notin M$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть множество M в l^2_∞ таково, что $0 \notin M$, $0 \in \mathrm{st}(M)$, $|\mathcal{Z}|(M) = 2|\mathrm{st}|(M)$ и $\mathcal{Z}(M)$ — нечетный цикл, а x_i, x_j удовлетворяют равенствам* (3). *Тогда найдется такой элемент $x_k \in M \setminus \{x_i, x_j\}$, что $0 \in \mathrm{st}(\{x_i, x_j, x_k\})$, а элементы множества $M \setminus \{x_i, x_j, x_k\}$ разбиваются на пары так, что для каждой пары* 0 *является точкой Штейнера.*

Доказательство. Считаем, что цикл $\mathcal{Z}$ обходит вершины $x_1, x_2, \dots, x_n$ последовательно.

Далее индексы, нумерующие точки множества M, считаем по модулю n.

Пусть $B \subseteq M$ — множество тех вершин, которые достигают нормы в двух координатах. В множестве B рассмотрим три множества: G, T, C.

Вершина $x_i \in B$ принадлежит множеству G, если для нее и хотя бы одной соседней с ней вершины выполнены равенства (3), т.е. $\|x_i - x_j\| = \|x_i + x_j\| = \|x_i\| + \|x_j\|$ при $j = i+1$ или $j = i-1$.

Вершина $x_i \in B$ принадлежит множеству T, если существуют такие числа $s, t \in \mathbb{N}$, что элементы $x_{i-s}, x_{i+t} \notin B$ лежат в соседних четвертях (открытых, поскольку не из B) и $x_{i-s+u} \in B \setminus G$ при $u = 1, 2, \dots, s+t-1$ (т.е. все точки между x_{i-s}, x_{i+t} лежат на одной прямой — либо $u_1 = u_2$, либо $u_1 = -u_2$).

Вершина $x_i \in B$ принадлежит множеству C, если существуют такие числа $s, t \in \mathbb{N}$, что $x_{i-s}, x_{i+t} \notin B$ лежат в четвертях одной четности и $x_{i-s+u} \in B \setminus G$ при $u = 1, 2, \dots, s+t-1$.

Заметим, что $G \cup T \cup C \neq B$, а если $G = \emptyset$, то $T \cup C = B$.

1) Пусть множество G непусто и $x_i, x_{i+1} \in G$. Для этих элементов выполнены равенства (3). Без ограничения общности считаем, что в первой координате знаки у них совпадают и положительны.

Если либо x_{i+2}, либо x_{i-1} достигает нормы в первой координате и имеет в первой координате отрицательный знак, то точка x_k найдена. Действительно, пусть без ограничения общности такой точкой является x_{i+2}. Тогда $\|x_{i+2}\|+\|x_{i+1}\| = \|x_{i+2}-x_{i+1}\|$, $\|x_{i+2}\|+\|x_i\| = \|x_{i+2}-x_i\|$, $\|x_i\|+\|x_{i+1}\| = \|x_i - x_{i+1}\|$.

Теперь напомним лемму, характеризующую точку Штейнера для трех точек в предуальном к L_1 пространстве.

Лемма C [7, 5]. *Пусть пространство X предуально к L_1, $x_1, x_2, x_3 \in X$. Тогда множество* $\mathrm{st}(\{x_1, x_2, x_3\}) = m[x_1, x_2] \cap m[x_2, x_3] \cap m[x_3, x_1]$.

Таким образом, $s \in \mathrm{st}(\{x_i, x_j, x_k\})$ в предуальном к L_1 пространстве тогда и только тогда, когда $\|x_i - s\| + \|x_j - s\| = \|x_i - x_j\|$.

Согласно лемме C для точек x_i, x_{i+1}, x_{i+2} точка 0 является точкой Штейнера. Оставшееся четное число точек множества M последовательно разбивается на пары (следуя по циклу $\mathcal{Z}(M)$) при помощи леммы B.

Если ни x_{i+2}, ни x_{i-1} не достигает нормы в первой координате с отрицательным знаком, то докажем просто существование точки x_k, которая достигает нормы в первой координате с отрицательным знаком, от противного. Действительно, если такой точки нет, то все точки из M достигают нормы во второй координате (в силу (2)), причем знаки вторых координат чередуются. Такого в нечетном цикле не может быть. Значит, $\|x_i\| + \|x_j\| = \|x_i - x_j\|$, $\|x_i\| + \|x_k\| = \|x_i - x_k\|$, $\|x_j\| + \|x_k\| = \|x_j - x_k\|$ и $0 \in \mathrm{st}(\{x_i, x_j, x_k\})$.

Поскольку $x_k \neq x_{i-1}, x_k \neq x_{i+2}$, вершины $M \setminus \{x_i, x_{i+1}, x_k\}$ делятся в графе $\mathcal{Z}(M)$ на две компоненты связности. Если каждая из этих компонент связности состоит из четного числа вершин, то все множество $M \setminus \{x_i, x_{i+1}, x_k\}$ последовательно делится на пары по циклу $\mathcal{Z}(M)$.

Если каждая из этих компонент связности состоит из нечетного числа вершин, то поскольку ни x_{i+2}, ни x_{i-1} не достигает нормы в первой координате с отрицательным знаком ($x_k \neq x_{i-1}, x_k \neq x_{i+2}$), то x_i и x_{i+1} достигают нормы во второй координате с разными знаками. Применяя (2) для пар x_i, x_{i-1} и x_{i+1}, x_{i+2}, имеем $\|x_{i+2}\| + \|x_{i-1}\| = \|x_{i+2} - x_{i-1}\|$. При этом каждая из компонент связности в $\mathcal{Z}(M)$ множества $M \setminus \{x_i, x_{i+1}, x_k, x_{i-1}, x_{i+2}\}$ последовательно делится на пары.

2) Пусть теперь множество G пусто. Заметим, что тогда множество T непусто, поскольку иначе все вершины из M достигали бы нормы в одной и той же координате (следуя равенству (2)), причем знаки в этой координате у всех вершин в цикле чередовались бы, чего не может быть в нечетном цикле.

Заметим теперь, что отдельная компонента связности множества $M \setminus T$ состоит из элементов, лежащих в четвертях одной четности, причем элементы двух соседних компонент связности этого множества лежат в четвертях разной четности. Это означает, что количество компонент связности множества T четно.

Пусть $T_1, \ldots, T_k$ — все компоненты связности множества T, последовательно расположенные в графе $\mathcal{Z}(M)$. Напомним, что k четно. Обозначим $T' = \{x_{i_j} : x_{i_j} \in T_j, x_{i_j-1} \in M \setminus B\}$. Заметим, что x_{i_k-1} и $x_{i_{k+1}-1}$ находятся в соседних открытых четвертях.

Элементы из T' разбивают цикл $\mathcal{Z}(M)$ на k частей $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_k$: множество $\mathcal{Z}_j$ лежит между точками x_{i_j} и $x_{i_{j+1}}$ и их не содержит, причем $x_{i_{k+1}} = x_{i_1}$. Поскольку множество T' состоит из четного числа элементов, количество элементов в объединении множеств $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \ldots, \mathcal{Z}_k$ нечетно.

Докажем, что среди $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ найдутся две точки, для которых выполнены равенства (3). Предположим, что это не так. Обозначим через $a_p(i_l)$ знак p-й координаты точки x_{i_l}, через σ_j мощность множества $\mathcal{Z}_j$ по модулю 2. Невыполнение равенства (3) означает, что для каждой пары элементов u_1 и u_2 из T (достигающих нормы в каждой координате) знаки в первой координате и во второй координате либо одновременно совпадают, либо одновременно обратны. Тогда $a_p(i_l) = (-1)^{\sigma_j} a_p(i_{l+1})$, что влечет равенства $a_p(i_1) = (-1)^{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k} a_p(i_{k+1}) = -a_p(i_1)$. Поскольку $a_p(i_l) \neq 0$ для каждого $l = 1, \ldots, k$, полученное противоречие означает, что найдутся точки $x_i, x_j \in T'$, для которых выполнены равенства (3).

Заметим, что точки $x_{i_l}/\|x_{i_l}\|$ и $x_{i_{l+1}}/\|x_{i_{l+1}}\|$ либо пропорциональны, либо удовлетворяют равенствам (3). Поэтому считаем, что точки $x_i, x_j = x_{i+\alpha} \in T'$ выбраны так, чтобы каждая точка $x_{i+\beta}, \beta = 1, \ldots, \alpha - 1$, не содержалась в T', т.е. $x_i = x_{i_l}, x_j = x_{i_{l+1}}$.

Для определенности считаем, что x_{j-1} достигает нормы (только) в первой координате.

Если α четно, то знаки первой координаты у x_i и x_j совпадают (в силу (3)), а знаки первой координаты у x_i и x_{i+1} различны. При $x_k = x_{i+1}$ имеем $\|x_i\| + \|x_j\| = \|x_i - x_j\|, \|x_i\| +$

$\|x_k\| = \|x_i - x_k\|, \|x_j\| + \|x_k\| = \|x_j - x_k\|$ и $0 \in \mathrm{st}(\{x_i, x_j, x_k\})$. Количество элементов в множестве $M \setminus \{x_i, x_{i+1}, x_{i+\alpha}\}$ четно, количество элементов $\{x_{i+2}, \dots, x_{i+\alpha-1}\}$ четно, значит, элементы $M \setminus \{x_i, x_{i+1}, x_{i+\alpha}\}$ последовательно разбиваются на пары.

Если же α нечетно, то знаки первой координаты у x_i и x_j различны, а знаки второй координаты совпадают в силу (3). При этом знаки второй координаты у x_{i-1} и x_i различны. Полагаем $x_k = x_{i-1}$ и аналогично предыдущему получаем требуемое разбиение множества M. Лемма 4 доказана.

Теорема 1. *Пусть* $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset l^2_\infty$. *Тогда*

$$|\mathrm{st}|(M) = \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{j=1}^{[n/2]} L(N_j) : N_1 \cup \dots \cup N_{[n/2]} = M \right\}, \tag{4}$$

где $N_j \subset M$, $j = 1, \dots, [n/2]$, *двухточечны при четном* n *или* $N_j \subset M$, $j = 1, \dots, [n/2] - 1$, *двухточечны и* $N_{[n/2]}$ *трехточечно при нечетном* n, *причем если точка* x_i *имеет кратность* p_i *в множестве* M, *то* x_i *содержится в* p_i *различных множествах из* $\{N_j\}_{j=1}^{[n/2]}$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $0 \in \mathrm{st}(M)$.

Для множества M есть разбиение $\{N_j^*\}$ из теоремы B. Следуя формуле (1), считаем, что для каждого множества N_j^* точка 0 является точкой Штейнера. При этом элементы в каждом из N_j^* различны.

Если цикл $\mathcal{Z}(N_j^*)$ является четным циклом, то для каждой пары соседних вершин из этого цикла выполнено равенство (2). Граф $\mathcal{Z}'(N_j^*)$, состоящий из ребер цикла $\mathcal{Z}(N_j^*)$, взятых через одно, имеет ту же длину, что и $\mathcal{Z}(N_j^*)$ (подробнее см. замечание 1 из [5]). При этом для каждой пары точек, соединенных ребром в $\mathcal{Z}'(N_j^*)$, точка 0 является точкой Штейнера.

Замечание 2 и лемма 4 позволяют заменить нечетный цикл $\mathcal{Z}(N_j^*)$ с количеством вершин больше 3 на граф $\mathcal{Z}'(N_j^*)$, состоящий из отдельных ребер и треугольника. При такой замене длина сохраняется, поскольку у каждой компоненты связности нового графа точка 0 является точкой Штейнера.

Компоненты связности $\mathcal{Z}'(N_j^*)$ задают разбиение множества N_j^*, удовлетворяющее теореме B, примененной к N_j^*.

Объединяя новые разбиения каждого множества из $\{N_j^*\}$, получаем разбиение множества M на двухточечные или трехточечные подмножества.

Рассмотрим два из трехточечных подмножеств, скажем $x_1x_2x_3$ и $x_4x_5x_6$. Заметим, что эти треугольники могут иметь общие вершины. Применим лемму 4 к каждому из них. Без ограничения общности считаем, что для каждой из пар x_2, x_3 и x_4, x_5 выполнены равенства (3). Простейшим перебором расположения знаков по двум координатам нетрудно доказать, что есть пара элементов x_r, x_t, $r \in \{2, 3\}$, $t \in \{4, 5\}$, для которых $\|x_r - x_t\| = \|x_r\| + \|x_t\|$. При этом $\|x_1 - x_v\| = \|x_1\| + \|x_v\|, \|x_u - x_6\| = \|x_u\| + \|x_6\|$, $\{v\} = \{2, 3\} \setminus \{r\}$, $\{u\} = \{4, 5\} \setminus \{t\}$. То есть найдутся три отрезка с концами в точках $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, сумма длин которых равна сумме полупериметров $x_1x_2x_3$ и $x_4x_5x_6$. Поэтому из всех треугольников, возможно, останется только один. Теорема доказана.

Для полученного разбиения множества M выпишем формулу (1).

Теорема 2. *Пусть* $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset l^2_\infty$, $\{N_j\}_{j=1}^{[n/2]}$ — *разбиение множества* M *на подмножества из теоремы* 1, *для которых достигается максимум в формуле* (4). *Тогда*

$$\mathrm{st}(M) = \bigcap_{j=1}^{[n/2]} \mathrm{st}(N_j) = \bigcap m[x_p, x_q],$$

причем последнее пересечение берется по тем парам индексов p, q, *для которых* $x_p, x_q \in N_j$ $j = 1, \dots, [n/2]$.

Автор приносит благодарность О. Н. Косухину и П. А. Бородину за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lima Å.* Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. **227**. 1–62.
2. *Grothendieck A.* Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 // Can. J. Math. 1955. **7**, N 4. 552–561.
3. *Lindenstrauss J.* Extension of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc. 1964. **48**. 1–112.

4. *Беднов Б.Б., Бородин П.А.* Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. 2014. **205**, № 4. 3–19.
5. *Беднов Б.Б.* Длина минимального заполнения типа звезды // Матем. сб. 2016. **207**, № 8. 31–46.
6. *Wolfe D.* A minimal point of a finite metric set // J. Combin. Theory. 1967. **2**. 514–522.
7. *Беднов Б.Б.* О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2011. № 6. 26–31.

Поступила в редакцию
31.10.2021

УДК 515.12

НОВЫЕ СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, ОБОБЩАЮЩИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНУЮ НЕСВЯЗНОСТЬ

А. Ю. Грознова[1], **О. В. Сипачёва**[2]

Вводятся новые классы топологических пространств R_1, R_2, R_3, обобщающие класс F-пространств. Доказано, что все однородные компактные подпространства пространств из этих классов и их некоторых произведений конечны. Получены результаты о сравнимости в смысле Рудин–Кейслера ультрафильтров, по которым в R_2- и R_3-пространствах сходятся разные последовательности к одной и той же точке.

Ключевые слова: F-пространство, $\beta\omega$-пространство, R_1-пространство, R_2-пространство, R_3-пространство, однородный компакт, ультрафильтр, порядок Рудин–Кейслера.

New classes R_1, R_2, R_3 of topological spaces generalizing the class of F-spaces are introduced. It is proved that all homogeneous compact subspaces of spaces in these classes and of some of their products are finite. Results on the Rudin–Keisler comparability of ultrafilters along which distinct sequences converge to the same point in R_2- and R_3-spaces are obtained.

Key words: F-space, $\beta\omega$-space, R_1-space, R_2-space, R_3-space, homogeneous compact space, ultrafilter, Rudin–Keisler order.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-19-25

Всюду ниже под пространствами подразумеваются вполне регулярные топологические пространства.

Мы рассматриваем обобщения классов экстремально несвязных пространств и F-пространств. Пространство X называется *экстремально несвязным*, если непересекающиеся открытые подмножества X имеют непересекающиеся замыкания, и F*-пространством*, если непересекающиеся функционально открытые подмножества X функционально отделимы. На первый взгляд эти пространства могут показаться экзотическими, однако они играют центральную роль в теории непрерывных отображений компактных пространств [1, 2] и в теории двойственности между топологическими пространствами [3], а также в теории колец непрерывных функций [4]. В частности, F-пространства характеризуются тем свойством, что кольцо непрерывных функций на таком пространстве является F-кольцом, т.е. все конечно порожденные идеалы в нем являются главными. Основные топологические свойства экстремально несвязных и F-пространств можно найти в основополагающей книге [4] Л. Гиллмана и М. Джерисона по теории колец непрерывных функций.

Однако класс F-пространств (и тем более экстремально несвязных пространств) довольно узок, и важной задачей является поиск более широких классов пространств, обладающих теми или иными полезными свойствами F-пространств. Так, ван Дауэн в своей диссертации [5] ввел понятие $\beta\omega$-пространства. Этот класс оказался весьма полезным при изучении свойств ультрафильтров [6]

---

[1]*Грознова Анастасия Юрьевна* — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: avsav999@mail.ru.

Groznova Anastasiya Yur'evna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

[2]*Сипачёва Ольга Викторовна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: o-sipa@yandex.ru.

Sipacheva Ol'ga Viktorovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.