Математика

УДК 517.98

БЕЗНАДСТРОЕЧНАЯ КАРТИНА E-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

Г. С. Макеев[1]

В работе получена безнадстроечная картина E-теоретической категории. Морфизмы в данной картине определены в терминах достаточно хороших эндофункторов в категории C^*-алгебр и $*$-гомоморфизмов, для которых построен соответствующий категорный формализм.

Ключевые слова: E-теория, гомотопически инвариантный функтор, C^*-алгебры.

An unsuspended picture of the E-theory is obtained in the paper. In this picture, morphisms are given in terms of good enough endofunctors of C^*-algebras for which we construct a categorical formalism.

Key words: E-theory, homotopy invariant functor, C^*-algebras.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-3-14

1. Введение. E-теория Конна–Хигсона [1] представляет собой более комфортную альтернативу KK-теории Каспарова [2], обладающую вдобавок еще и полезным свойством существования длинных точных последовательностей. Как известно, E-теория — это категория, в которой в качестве объектов выступают сепарабельные C^*-алгебры, а в качестве стрелок — классы гомотопности асимптотических гомоморфизмов между надстройками таких алгебр. Напомним [1, 3], опуская некоторые технические детали, что композиция $E(A, B) \times E(B, C) \to E(A, C)$ индуцирована композицией асимптотических гомоморфизмов между надстройками соответствующих алгебр: $SA \to SB$ и $SB \to SC$. В [3] также было предъявлено обобщение понятия асимптотического гомоморфизма на случай, когда алгебра A несепарабельна.

Отдельный интерес представляет проблема так называемого безнадстроечного описания E-теории, т.е. вопрос существования некой картины E-теории, в которой стрелки заданы классами гомотопности $*$-гомоморфизмов без участия надстроек. К примеру, в [4] описана ситуация, в которой от надстройки можно отказаться, оставаясь по-прежнему в рамках E-теории, в то время как в [5] предлагается подход в духе KK-теории. В [6] получена безнадстроечная картина для полугруппы классов гомотопности трансляционно-инвариантных асимптотических гомоморфизмов, которая представляет собой полугруппу классов гомотопности расширений.

В работе [7] предложено безнадстроечное описание E-теории в терминах $*$-гомоморфизмов в алгебру Роу над метрическим пространством $\mathbb{Z}$ с асимптотическими коэффициентами, а именно

$$E(A, B) = \hom(A, \mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{A}SB)/\simeq_{\mathfrak{M}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{A}}$$

(точные определения даны ниже). Однако остался открытым вопрос, каким образом задано спаривание таких $*$-гомоморфизмов или, иными словами, как устроена композиция стрелок E-теоретической категории, записанной с помощью классов таких $*$-гомоморфизмов? В настоящей работе мы явно опишем такое спаривание и предъявим некоторый абстрактный подход к построению категорий типа E-теоретической.

2. Обозначения и предварительные сведения. Будем обозначать через $\mathtt{C}^*$ категорию C^*-алгебр и $*$-гомоморфизмов, а через $\mathtt{EFC}$ — категорию эндофункторов в категории $\mathtt{C}^*$ и естественных преобразований между этими эндофункторами. Отметим, что $\mathtt{EFC}$ можно рассматривать как 2-категорию с одним единственным объектом — категорией $\mathtt{C}^*$, а также эндофункторами и естественными преобразованиями в качестве стрелок и клеток. В дальнейшем под записью $F \in\in \mathtt{EFC}$, $\alpha \in \mathtt{EFC}$, мы будем подразумевать, что F — эндофунктор, а α — естественное преобразование. Если $\alpha, \beta \in \mathtt{EFC}$ — естественные преобразования, то их вертикальное и горизонтальное произведения мы

[1] *Макеев Георгий Сергеевич* — асп. каф. высшей геометрии и топологии мех.-мат. ф-та МГУ; стажер-исслед. Моск. центра фунд. и прикл. матем., e-mail: makeefu@ya.ru.

Makeev Georgii Sergeevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Geometry and Topology; Research Assistant of Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

будем обозначать через $\beta \circ \alpha$ и $\alpha\beta$ соответственно. Компоненту естественного преобразования α на объекте B будем записывать как αB. Всюду далее буквами I и S мы будем обозначать функторы *цилиндра* и *надстройки*, которые определяются как тензорные домножения на C^*-алгебры $C[0,1]$ и $C_0(0,1)$ соответственно. Очевидным образом для любого $t \in [0,1]$ определяется естественное преобразование *вычисления* из цилиндра в тождественный функтор $\mathrm{ev}_t : I \Rightarrow \mathrm{Id}$.

Говорят, что $*$-гомоморфизмы $\varphi_0, \varphi_1 : A \to B$ *гомотопны* (и пишут $\varphi_0 \simeq \varphi_1$), если существует $*$-гомоморфизм $\varphi : A \to IB$, такой, что $\varphi_j = \mathrm{ev}_j B \circ \varphi$ для $j = 0, 1$.

Буквой $\mathbb{K}$ обозначим функтор тензорного произведения с C^*-алгеброй компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, которую мы тоже будем обозначать буквой $\mathbb{K}$. Элементы из $\mathbb{K}B$ можно представить $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-матрицами, которые мы будем записывать как $\mathrm{mat}_{i,j}\{b_{i,j}\}$. C^*-алгебра B называется *стабильной*, если между $\mathbb{K}B$ и B существует изоморфизм $\theta : \mathbb{K}B \to B$.

Определим отображение $\iota_{0,0} : B \to \mathbb{K}B$. Если C^*-алгебра B стабильна, то $\theta \circ \iota_{0,0} \simeq \mathrm{id} : B \to B$ (см., например, [8]).

Пусть A, B — C^*-алгебры. Через $\mathfrak{T}B = C_b(\mathbb{R}_+, B)$ будем обозначать непрерывные ограниченные функции на $\mathbb{R}_+$ со значениями в B, а через $\mathfrak{T}_0 B = C_0(\mathbb{R}_+, B)$ — идеал в $\mathfrak{T}B$, состоящий из функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Асимптотической алгеброй над B будем называть факторалгебру $\mathfrak{A}B = \mathfrak{T}B / \mathfrak{T}_0 B$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\infty B$ $*$-подалгебру в алгебре мультипликаторов $\mathcal{M}(B \otimes \mathbb{K})$, состоящую из всех конечно-диагональных матриц с равномерно ограниченными по норме элементами из B. Замыкание $\mathfrak{M}_\infty B$ в $\mathcal{M}(B \otimes \mathbb{K})$ будем обозначать через $\mathfrak{M}B$.

Можно показать [3, 7], что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A}$ — точные эндофункторы в категории $\mathtt{C}^*$, которые сохраняют следующие пулбэки:

$$\mathfrak{A}B_1 \underset{\mathfrak{A}B}{\oplus} \mathfrak{A}B_2 \cong \mathfrak{A}\left(B_1 \underset{B}{\oplus} B_2\right),$$

$$\mathfrak{M}B_1 \underset{\mathfrak{M}B}{\oplus} \mathfrak{M}B_2 \cong \mathfrak{M}\left(B_1 \underset{B}{\oplus} B_2\right).$$

Определим несколько важных естественных преобразований, подробно рассмотренных в [3, 7]:

$\mathrm{as} : \mathfrak{T} \Rightarrow \mathfrak{A}$ — естественное преобразование, компоненты которого всякому пути $[t \mapsto x_t] \in \mathfrak{T}B$ сопоставляют его класс в асимптотической алгебре, который нам будет удобно обозначать через $\mathrm{as}_t\, x_t$;

$\mathrm{const} : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{T}$ — естественное преобразование, компоненты которого определены формулой

$$\mathrm{const}\, B(b) = (t \mapsto b);$$

$\alpha = \mathrm{as} \circ \mathrm{const} : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{A}$;

$\varepsilon : S\mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{A}$ — естественное преобразование, компоненты которого определены формулой

$$\varepsilon A : S\mathfrak{M}A \to \mathfrak{A}A : f \otimes m \mapsto \mathrm{as}\left[t \mapsto \theta\left(f\left(D_t\right) m\right)\right],$$

где $f(D_t) = \mathrm{diag}_{j \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{j}{t}\right)$, а $\theta : A \otimes \mathbb{K} \cong A$ — изоморфизм стабильных C^*-алгебр;

$\iota : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{M}S$ — естественное преобразование, компоненты которого определены формулой

$$\iota A : A \to \mathfrak{M}SA : a \mapsto \underset{i,j \in \mathbb{Z}}{\mathrm{mat}} \{\alpha_i \alpha_j \otimes a\},$$

где $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset C_0(\mathbb{R})$ — некоторое фиксированное семейство функций, таких, что $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, $\mathrm{supp}(\alpha_i) \subset \left[i - \frac{2}{3}, i + \frac{2}{3}\right]$ и $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i(x)^2 \equiv 1$.

3. Гомотопии естественных преобразований. Введем понятие гомотопии естественных преобразований между достаточно хорошими эндофункторами из категории $\mathtt{EFC}$.

Определение 1. Пусть $G \in\in \mathtt{EFC}$. Будем называть G *хорошим эндофунктором*, если он удовлетворяет следующим условиям:

(i) G сохраняет эпиморфизмы;

(ii) пусть $\varphi_1 : B_1 \to B$, $\varphi_2 : B_2 \to B$ — два $*$-гомоморфизма, причем один из них эпиморфен, тогда

$$GB_1 \underset{GB}{\oplus} GB_2 \cong G\left(B_1 \underset{B}{\oplus} B_2\right);$$

(iii) существует естественное преобразование $IG \Rightarrow GI$, дополняющее до коммутативных следующие диаграммы в категории $\mathtt{EFC}$:

$$\begin{tikzcd} IG \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{ev}_j G"'] & & GI \arrow[dl, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_j"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

$(j = 0, 1)$.

Легко проверить, что композиция хороших функторов также будет хорошим функтором. Поэтому хорошие функторы и естественные преобразования образуют категорию, которую мы будем обозначать через $\mathtt{GEFC}$. Точно так же, как и $\mathtt{EFC}$, категорию $\mathtt{GEFC}$ можно рассматривать как 2-категорию. В частности, хорошими функторами оказываются $I, S, \mathfrak{M}, \mathfrak{A}$ [7, 3].

Теперь все готово, чтобы ввести понятие гомотопии естественных преобразований. Пусть $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathtt{GEFC}(F, G)$. Будем говорить, что эти естественные преобразования гомотопны, если существует естественное преобразование $\gamma : F \Rightarrow GI$, такое, что в категории $\mathtt{GEFC}$ коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "\gamma"] \arrow[dr, Rightarrow, "\gamma_j"'] & GI \arrow[d, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_j"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$(j = 0, 1)$. Гомотопность является отношением эквивалентности. Действительно, из свойства (ii) для функтора G следует, что левая диаграмма достраивается до правой:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, Rightarrow, "\alpha_2"] \arrow[drr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, "\alpha_0"'] \arrow[ddr, Rightarrow, "\alpha_1"] \arrow[ddrr, Rightarrow] & & G \\ & & GI \arrow[u, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_0"] \\ G & GI \arrow[l, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_0"] \arrow[r, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_1"'] & G, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[rr, Rightarrow, "\alpha_2"] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[drr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow, "\alpha_0"'] \arrow[ddr, Rightarrow] & & G \\ & GI \arrow[r, Rightarrow, "G\chi_0"'] \arrow[d, Rightarrow, "G\chi_1"] & GI \arrow[u, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_1"'] \arrow[d, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_0"] \\ G & GI \arrow[l, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_0"] \arrow[r, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_1"'] & G, \end{tikzcd}$$

где χ_0 и χ_1 — естественные преобразования, действующие по формулам

$$\chi_0 : C[0,1] \to C[0,1] : f \mapsto [x \mapsto f(x/2)],$$
$$\chi_1 : C[0,1] \to C[0,1] : f \mapsto [x \mapsto f(1/2 + x/2)].$$

Транзитивность доказана. Рефлексивность и симметричность тривиальны.

Диаграммы

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] & G \arrow[r, Rightarrow, "\beta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta_{\mathrm{j}}"'] & HI \arrow[d, Rightarrow, "H\,\mathrm{ev}_j"] \\ & & H, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha_j"'] & GI \arrow[r, Rightarrow, "\beta I"] \arrow[d, Rightarrow, "G\,\mathrm{ev}_j"] & HI \arrow[d, Rightarrow, "H\,\mathrm{ev}_j"] \\ & G \arrow[r, Rightarrow, "\beta"] & H \end{tikzcd}$$

$(j = 0, 1)$ показывают, что класс гомотопности вертикального произведения двух хороших естественных преобразований не зависит от классов гомотопности правого и левого сомножителя соответственно.

На классах гомотопности также корректно определено и горизонтальное произведение. Действительно, имея коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha_j"'] & F_2 I \arrow[d, Rightarrow, "F_2\,\mathrm{ev}_j"] \\ & F_2 \end{tikzcd}$$

$(j = 0, 1)$ и естественное преобразование $\beta : G_1 \Rightarrow G_2$, можно получить следующие коммутативные диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
G_1F_1 \arrow[r, Rightarrow, "G_1\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "G_1\alpha_j"'] & G_1F_2I \arrow[r, Rightarrow, "\beta F_2 I"] \arrow[d, Rightarrow, "G_1F_2\,\mathrm{ev}_j"] & G_2F_2I \arrow[d, Rightarrow, "G_2F_2\,\mathrm{ev}_j"] \\
& G_1F_2 \arrow[r, Rightarrow, "\beta F_2"'] & G_2F_2,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F_2IG_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & F_2G_1I \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & F_2G_2I \arrow[d, Rightarrow] \\
F_1G_1 \arrow[u, Rightarrow, "\alpha G_1"] \arrow[r, Rightarrow, "\alpha_j G_1"'] & F_2G_1 \arrow[r, Rightarrow, "F_2\beta"'] & F_2G_2
\end{tikzcd}
$$

$(j = 0, 1)$, из которых следует независимость класса гомотопности результата горизонтального домножения от классов правого и левого сомножителей. Таким образом, корректно определена 2-категория с одним объектом — категорией C^*-алгебр, хорошими эндофункторами в качестве стрелок и классами гомотопности естественных преобразований в качестве клеток. Назовем ее категорией $\mathtt{hGEFC}$.

Лемма 1. *Пусть $\alpha : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathfrak{A}$ — естественное преобразование, определенное в п. 2. Тогда в категории $\mathtt{hGEFC}$ коммутативны следующие диаграммы:*

$$
\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A} \arrow[dl, Rightarrow, "\mathfrak{A}\alpha"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha\mathfrak{A}"] & \\
\mathfrak{A}^2 \arrow[rr, equal] & & \mathfrak{A}^2,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A}\mathbb{K} \arrow[dl, Rightarrow, "\mathfrak{A}\mathbb{K}\alpha\iota_{0,0}"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha\iota_{0,0}\mathfrak{A}\mathbb{K}"] & \\
(\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 \arrow[rr, equal] & & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2\,.
\end{tikzcd}
$$

Коммутативность левой диаграммы вытекает из [3, предложение 2.8]. Коммутативность правой диаграммы будет доказана в лемме 5.

4. Обобщенные гомотопии. Для того чтобы доказывать коммутативность диаграмм в категории $\mathtt{hGEFC}$, оказывается удобным ввести понятие F-гомотопности.

Пусть A, B — C^*-алгебры, и пусть $F \in\in \mathtt{GEFC}$. Мы будем говорить, что $*$-гомоморфизмы $\varphi_0, \varphi_1 : A \to FB$ F-гомотопны (и писать $\varphi_0 \simeq_F \varphi_1$), если существует $*$-гомоморфизм $\Phi : A \to FIB$, такой, что $F\,\mathrm{ev}_j\, B \circ \Phi = \varphi_j$, $j = 0, 1$. Гомотопность является отношением эквивалентности благодаря тому, что F сохраняет пулбэки. Обозначим $[A, F, B] := \hom(A, FB)/\simeq_F$.

Теперь мы можем доказать два важных утверждения с функторами, определенными во введении.

4.1. Пара коммутативных диаграмм. Приведем формулировки и наброски доказательств двух лемм, представляющих собой более простые аналоги теоремы 1 и предложения 7 из [7].

Лемма 2. *Диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
SB \arrow[r, "S\iota B"] \arrow[dr, "\alpha\iota_{0,0}SB"'] & S\mathfrak{M}SB \arrow[d, "\varepsilon SB"] \\
& \mathfrak{A}\mathbb{K}SB
\end{tikzcd}
$$

коммутативна с точностью до $\mathfrak{A}\mathbb{K}$-гомотопии.

Доказательство. Для всех $s \in (0, +\infty)$ положим $\alpha_i^s(x) := \alpha_i\,(sx)$. Утверждение леммы следует из цепочки $\mathfrak{A}\mathbb{K}$-гомотопий:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0 : f \otimes b \mapsto \mathrm{as}_t\, f\left(\operatorname*{diag}_k \left(\frac{k}{t}\right)\right) \operatorname*{mat}_{i,j} \{\alpha_i\alpha_j \otimes b\} = \mathrm{as}_t \operatorname*{mat}_{i,j}\left\{\alpha_i\alpha_j f\left(\frac{k}{t}\right) \otimes b\right\},\\
&\varphi_1 : f \otimes b \mapsto \mathrm{as}_t\, f\left(\operatorname*{diag}_k \left(\frac{k}{t}\right)\right) \operatorname*{mat}_{i,j} \{\alpha_i^t\alpha_j^t \otimes b\} = \mathrm{as}_t \operatorname*{mat}_{i,j}\left\{\alpha_i^t\alpha_j^t f\left(\frac{k}{t}\right) \otimes b\right\},\\
&\varphi_3 : f \otimes b \mapsto \mathrm{as}_t \operatorname*{mat}_{i,j} \left\{\alpha_i^t\alpha_j^t f \otimes b\right\},\\
&\varphi_4 : f \otimes b \mapsto \mathrm{as}_t \operatorname*{mat}_{i,j\in\mathbb{Z}} (\alpha_i\alpha_j f \otimes b),\\
&\varphi_5 : f \otimes b \mapsto \mathrm{as}_t\, f \otimes b \otimes \epsilon_{0,0}.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M}B \arrow[r, "\iota\mathfrak{M}B"] \arrow[dr, "\mathfrak{M}\alpha\iota_{0,0}B"'] & \mathfrak{M}S\mathfrak{M}B \arrow[d, "\mathfrak{M}\varepsilon B"] \\ & \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathbb{K}B \end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до $\mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathbb{K}$-гомотопии.

Доказательство. Утверждение леммы следует из цепочки $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$-гомотопий:

$$\Phi_0 : \operatorname*{mat}_{i,j} m_{i,j} \mapsto \operatorname*{mat}_{i,j} \left\{ \mathrm{as}_t \left(\operatorname*{mat}_{i',j'} \left\{ \alpha_i \left(\frac{i'}{t} \right) m_{i',j'} \alpha_j \left(\frac{j'}{t} \right) \right\} \right) \right\},$$

$$\Phi_1 : \operatorname*{mat}_{i,j} m_{i,j} \mapsto \operatorname*{mat}_{i,j} \left\{ \mathrm{as}_t \left(\operatorname*{mat}_{i',j'} \left\{ \alpha_i \left(i' \right) m_{i',j'} \alpha_j \left(j' \right) \right\} \right) \right\} = \operatorname*{mat}_{i,j} \mathrm{as}_t \left(m_{i,j} \otimes \epsilon_{i,j} \right),$$

$$\Phi_2 : \operatorname*{mat}_{i,j} m_{i,j} \mapsto \operatorname*{mat}_{i,j} \left\{ \mathrm{as}_t \left(m_{i,j} \otimes \epsilon_{0,0} \right) \right\}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *В категории* hGEFC *коммутативны следующие диаграммы:*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, Rightarrow, "S\iota"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha\iota_{0,0}S"'] & S\mathfrak{M}S \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon S"] \\ & \mathfrak{A}\mathbb{K}S, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{M} \arrow[r, Rightarrow, "\iota\mathfrak{M}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathfrak{M}\alpha\iota_{0,0}"'] & \mathfrak{M}S\mathfrak{M} \arrow[d, Rightarrow, "\mathfrak{M}\varepsilon"] \\ & \mathfrak{M}\mathfrak{A}\mathbb{K}. \end{tikzcd}$$

Доказательство. Коммутативность левой диаграммы следует из леммы 2, правой — из леммы 3.

4.2. Конструкции со степенями функторов. Понятие F-гомотопий оказывается вовсе не новым. В частности, если положить $F = \mathfrak{A}$, то мы получим в точности определение гомотопии асимптотических гомоморфизмов. Напомним, что гомотопической категорией асимптотических гомоморфизмов [3] называется категория, объекты которой — C^*-алгебры. В роли стрелок из A в B выступают элементы множества $\mathrm{colim}_n\, [A, \mathfrak{A}^n, B]$, в котором копредел берется по диаграмме

$$[A, \mathrm{Id}, B] \to \ \ldots \ \to [A, \mathfrak{A}^n, B] \xrightarrow{\alpha\mathfrak{A}^n B \circ \cdot} \left[A, \mathfrak{A}^{n+1}, B\right] \to \ldots .$$

Мы опустим проверку корректности данного определения, так как далее сделаем это для гораздо более общей конструкции.

Напомним [3], что E-теоретической категорией называется категория, объекты которой суть стабильные C^*-алгебры, а стрелки определены как $E(A, B) = \mathrm{colim}_n\, [SA, \mathfrak{A}^n, SB]$.

Важно отметить, что для случая сепарабельной C^*-алгебры A существует [3] изоморфизм множеств

$$[A, \mathfrak{A}, B] \cong \operatorname*{colim}_n\, [A, \mathfrak{A}^n, B].$$

Поэтому E-теория для сепарабельных алгебр определяется как $E\,(A, B) = [SA, \mathfrak{A}, SB]$.

Оказывается, что справедливо аналогичное, хотя и несколько более сложное утверждение, доказательство которого мы пока отложим.

Предложение 1. *Справедливо соотношение*

$$[A, \mathfrak{A}\mathbb{K}, B] \cong \operatorname*{colim}_n\, [A, (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n, B].$$

Простым следствием является

Теорема 1. *Пусть C^*-алгебра A сепарабельна. Тогда*

$$E(A, B) \cong \operatorname*{colim}_n\, [SA, (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n, SB].$$

Доказательство. Воспользовавшись предложением 1, получаем

$$\begin{aligned} E(A, B) &\cong \operatorname*{colim}_n\, [SA, \mathfrak{A}^n, \mathbb{K}SB] \cong [SA, \mathfrak{A}, \mathbb{K}SB] \cong \\ &\cong [SA, \mathfrak{A}\mathbb{K}, SB] \cong \operatorname*{colim}_n\, [A, (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n, B]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

5. Абстрактное построение E-подобных категорий. Представим абстрактный подход к построению категорий наподобие гомотопической категории асимптотических гомоморфизмов.

Определение 2. Строго моноидальной категорией называется тройка $\langle C, \square, e\rangle$, где C — категория, $\square : C \times C \to C$ — бифунктор, удовлетворяющий аксиоме ассоциативности:

$$\square\,(\square \times 1) = \square\,(1 \times \square) : C \times C \times C \to C,$$

и e — объект категории C, являющийся левой и правой единицей для $\square$:

$$\square\,(e \times 1) = \mathrm{id}_C = \square\,(1 \times e)\,,$$

где $e \times 1$ и $1 \times e$ обозначают функторы из C в $C \times C$, заданные формулами $b \mapsto (b, e)$ и $b \mapsto (e, b)$ соответственно.

Определение 3. Пусть $\langle M, \square, e\rangle$ и $\langle M', \square', e'\rangle$ — пара строго моноидальных категорий. Моноидальным функтором из M в M' называется тройка (F, F_2, F_0), где

$F : M \to M'$ — функтор;

F_2 — семейство морфизмов в M':

$$F_2(a, b) : F(a)\square' F(b) \to F(a\square b),$$

естественных по a и b;

$F_0 : e' \to Fe$ — морфизм в M', причем должна коммутировать следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
Fa\square' Fb\square' Fc \arrow[r] \arrow[d] & F\,(a\square b)\,\square' Fc \arrow[d] \\
Fa\square' F\,(b\square c) \arrow[r] & F\,(a\square b\square c)\,.
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Определение моноидальной категории, а также общее определение моноидального функтора можно найти, например, в [9].

Легко проверить, что $\langle \mathtt{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle$ — строго моноидальная категория ($\cdot$ обозначает композицию функторов).

Пусть $\langle J, \square, e\rangle$ — некоторая малая строго моноидальная категория, и пусть $\Gamma = (F, \gamma, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}}) : \langle J, \square, e\rangle \to \langle \mathtt{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle$ — моноидальный функтор, где $\mathrm{id}_{\mathrm{Id}} \in \mathtt{hGEFC}$ — тождественная стрелка на объекте Id. В дальнейшем для краткости мы будем обозначать Fj через F_j и $\gamma(Fj, Fk)$ через $\gamma_{j,k}$ для всех $j, k \in\in J$. Для любых C^*-алгебр A и B определим функтор $P(A, B) : J \to \mathbf{Set}_*$ по формуле

$$P(A, B) : \left(j \xrightarrow{f} k\right) \mapsto \left([A, F_j, B] \xrightarrow{Ff\circ} [A, F_k, B]\right).$$

Введем категорию $\mathcal{F}_\Gamma$, в которой в качестве объектов выступают стабильные C^*-алгебры, а в качестве стрелок — множества $\mathcal{F}_\Gamma(A, B) = \operatorname{colim} P(A, B)$. Композиция в такой категории задается следующим образом. Если $\varphi : A \to F_j B$, $\psi : B \to F_k C$, то

$$[\psi]_\Gamma \circ [\varphi]_\Gamma = [\zeta]_\Gamma\,,$$

где ζ определяется как композиция

$$A \xrightarrow{\varphi} F_j B \xrightarrow{F_j\psi} F_j F_k C \xrightarrow{\hat\gamma_{j,k}C} (F_j \square F_k)\,C,$$

в которой $\hat\gamma_{j,k} \in \mathtt{GEFC}$ — естественное преобразование, гомотопический класс которого в $\mathtt{hGEFC}$ совпадает с $\gamma_{j,k}$. Очевидно, что $[\zeta]_\Gamma$ не зависит от выбора $\hat\gamma_{j,k}$. Легко проверить, что в категории $\mathcal{F}_\Gamma$ единичной стрелкой из A в A является класс тождественного $*$-гомоморфизма $\mathrm{id} : A \to A$.

Лемма 4. *Категория $\mathcal{F}_\Gamma$ определена корректно.*

Доказательство. В диаграмме

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] & F_j B \arrow[r] \arrow[d, "F_f B"] & F_j F_k C \arrow[r] \arrow[d, "F_f F_k C"] & F\,(j\square k)\,C \arrow[d, "F(f\square k)C"] \\
& F_{j'} B \arrow[r] & F_{j'} F_k C \arrow[r] & F\,(j'\square k)\,C
\end{tikzcd}$$

левый прямоугольник очевидно коммутативен. Правый прямоугольник коммутативен благодаря условию естественности для γ. Отсюда следует независимость композиции от выбора φ. Независимость от выбора класса гомотопности левого сомножителя следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & F_jIB \arrow[r] \arrow[d] & F_jIF_kC \arrow[r] \arrow[d] & F_jF_kIC \arrow[r] \arrow[d] & F\,(j\square k)\,IC \arrow[d] \\
& F_jB \arrow[r] & F_jF_kC \arrow[r, "="] & F_jF_kC \arrow[r] & F\,(j\square k)\,C,
\end{tikzcd}$$

в которой стрелка сверху по центру существует благодаря условию (iii) из определения 1.

Рассуждения для ψ и правого сомножителя аналогичны. Ассоциативность следует из диаграммы (1). Лемма доказана.

5.1. Примеры. Пусть ω — следующий граф:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \dots,$$

и пусть C_ω — свободная категория, порожденная этим графом [9]. Легко проверить, что $\langle C_\omega, +, 0\rangle$ — малая строго моноидальная категория.

Через U обозначим забывающий функтор из категории малых категорий в категорию графов. Определим функтор $\mu : \omega \to U\mathtt{hGEFC}$ следующим образом:

$$\mu : (n \to n+1) \mapsto U\left(\alpha\mathfrak{A}^n : \mathfrak{A}^n \Rightarrow \mathfrak{A}^{n+1}\right).$$

Из универсального свойства свободной категории следует, что существует единственный функтор $F : C_\omega \to \mathtt{hGEFC}$, такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r] \arrow[dr, "\mu"'] & UC_\omega \arrow[d] \\
& U\mathtt{hGEFC}.
\end{tikzcd}$$

Пусть $\mathrm{id}_{\mathrm{Id}} \in \mathtt{hGEFC}$ — тождественная стрелка на объекте Id, и пусть $\cdot$ — горизонтальное произведение эндофункторов из $\mathtt{hGEFC}$. Несложно проверить, что

$$\Gamma = (F, \cdot, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}}) : \langle C_\omega, +, 0\rangle \to \langle \mathtt{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle$$

— моноидальный функтор (естественность следует из того факта, что $\mathfrak{A}\alpha = \alpha\mathfrak{A}$ в категории $\mathtt{hGEFC}$).

В данном примере категория $\mathcal{F}_\Gamma$ не что иное, как гомотопическая категория асимптотических гомоморфизмов, а следовательно, E-теория задается соотношением $E(A,B) = \mathcal{F}_\Gamma(SA, SB)$.

Рассмотрим теперь функтор $\mu' : \omega \to U\mathtt{hGEFC}$, заданный формулой

$$\mu' : (n \to n+1) \mapsto U\left(\tilde{\alpha}\tilde{\mathfrak{A}}^n : \tilde{\mathfrak{A}}^n \Rightarrow \tilde{\mathfrak{A}}^{n+1}\right),$$

где $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\mathbb{K}$, а $\tilde{\alpha} = \alpha\iota_{0,0}$. Дословно повторяя предыдущие рассуждения, получаем функтор $F' : C_\omega \to \mathtt{hGEFC}$, моноидальный функтор

$$\Gamma' = \left(F', \cdot, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}}\right) : \langle C_\omega, +, 0\rangle \to \langle \mathtt{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle$$

и категорию $\mathcal{F}_{\Gamma'}$. Если через $s\mathcal{F}_{\Gamma'}$ обозначить полную подкатегорию категории $\mathcal{F}_{\Gamma'}$, объекты которой — сепарабельные стабильные C^*-алгебры, то из теоремы 1 следует, что категория E', определенная соотношением $E'(A,B) = s\mathcal{F}_{\Gamma'}(SA, SB)$, совпадает с классической E-теоретической категорией.

И, наконец, приведем пример, играющий ключевую роль в нашем подходе безнадстроечного описания E-теории. Определим функтор $\mu'' : \omega \to U\mathtt{hGEFC}$ соотношением

$$\mu'' : (n \to n+1) \mapsto \begin{cases} U(\varepsilon), & n = 0; \\ U\left(\mathfrak{M}\tilde{\alpha}\tilde{\mathfrak{A}}^{n-1}S\right), & n \geqslant 1, \end{cases}$$

где ε определено в конце п. 2. Действуя, как и в предыдущих примерах, получаем функтор $F'' : C_\omega \to \mathtt{hGEFC}$. Положим

$$\gamma_{j,k} = \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j-1}\varepsilon\tilde{\mathfrak{A}}^{k-1}S : \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j-1}S\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{k-1}S \Rightarrow \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j+k-1}S.$$

Для доказательства естественности γ по j и k достаточно проверить, что в категории $\mathtt{hGEFC}$ коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j-1}S\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{k-1}S \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j+k-1}S \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j}S\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{k-1}S \arrow[r, Rightarrow] & \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j+k}S,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j-1}S\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{k-1}S \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j+k-1}S \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j-1}S\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{k}S \arrow[r, Rightarrow] & \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j+k}S.
\end{tikzcd}$$

Левая диаграмма очевидно коммутативна. В правой диаграмме композиции стрелок, протянутые через левый нижний и правый верхний углы, равны $\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{j-1}\varepsilon\tilde{\alpha}\tilde{\mathfrak{A}}^{k-1}S$ и $\mathfrak{M}\tilde{\alpha}\tilde{\mathfrak{A}}^{j-1}\varepsilon\tilde{\mathfrak{A}}^{k-1}S$ соответственно. По лемме 1 стрелки $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\mathfrak{A}}$ коммутируют в категории $\mathtt{hGEFC}$, поэтому остается доказать, что $\tilde{\mathfrak{A}}$ коммутирует с ε. Но этот факт следует из закона чередования [9, с. 43]:

$$\varepsilon\tilde{\alpha} = (\tilde{\mathfrak{A}}\tilde{\alpha}) \circ (\varepsilon\,\mathrm{Id}) = (\tilde{\alpha}\tilde{\mathfrak{A}}) \circ (\mathrm{Id}\,\varepsilon) = \tilde{\alpha}\varepsilon.$$

Таким образом, корректно определен моноидальный функтор

$$\Gamma'' = \big(F'', \gamma, \mathrm{id}_{\mathrm{Id}}\big) : \langle C_\omega, +, 0\rangle \to \langle \mathtt{hGEFC}, \cdot, \mathrm{Id}\rangle\,,$$

а вместе с ним и категория $\mathcal{F}_{\Gamma''}$, которая, как мы покажем далее, совпадает с E-теоретической категорией.

6. $\tilde{E}$-теоретическая категория. Для большего удобства определенную в п. 5 категорию $\mathcal{F}_{\Gamma''}$ будем обозначать через $\tilde{E}$. Стрелки данной категории представлены классами $*$-гомоморфизмов вида $A \to \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB$, поэтому следующая теорема описывает безнадстроечную картину E-теории.

Теорема 2. *Категории E и $\tilde{E}$ изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим два функтора

$$\begin{aligned}
\hat{S} : \tilde{E} \to E &: [[A \to \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB]] \mapsto [[SA \to S\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB \to \tilde{\mathfrak{A}}^{n+1}SB]],\\
\hat{\mathfrak{M}} : E \to \tilde{E} &: [[SA \to \tilde{\mathfrak{A}}^n SB]] \mapsto [[A \to \mathfrak{M}SA \to \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB]].
\end{aligned}$$

Покажем, что эти функторы осуществляют изоморфизм категорий E и $\tilde{E}$. Действительно, пусть $\varphi : SA \to \tilde{\mathfrak{A}}^n SB$. Тогда в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & S\mathfrak{M}SA \arrow[r, "S\mathfrak{M}\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon SA"] & S\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB \arrow[d, "\varepsilon\tilde{\mathfrak{A}}^n SB"] \\
 & \tilde{\mathfrak{A}}SA \arrow[r, "\tilde{\mathfrak{A}}\varphi"] & \tilde{\mathfrak{A}}^{n+1}SB \\
SA \arrow[uur, "S\iota A"] \arrow[ur, "\tilde{\alpha}SA"'] \arrow[r, "\varphi"'] & \tilde{\mathfrak{A}}^n SB \arrow[ur, "\tilde{\alpha}(\tilde{\mathfrak{A}}^n SB)"'] &
\end{tikzcd}$$

параллелограммы очевидно коммутативны. Треугольник коммутативен с точностью до 1-гомотопии ввиду следствия 1. Отсюда легко получить, что

$$\hat{S}\hat{\mathfrak{M}}[[\varphi]] = [[\varepsilon\tilde{\mathfrak{A}}^n SB \circ S\mathfrak{M}\varphi \circ S\iota A]] = [[\tilde{\alpha}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB \circ \varphi]],$$

а значит, $\hat{S}\hat{\mathfrak{M}} = 1_E$.

Таким же образом из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{M}SA \arrow[r, "\mathfrak{M}S\Phi"] & \mathfrak{M}S\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB \arrow[dr, "\mathfrak{M}\varepsilon\tilde{\mathfrak{A}}^n SB"] & \\
A \arrow[ur, "\iota A"] \arrow[r, "\Phi"'] & \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB \arrow[ur, "\iota\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB"] \arrow[rr, "\mathfrak{M}\tilde{\alpha}\tilde{\mathfrak{A}}^n SB"'] & & \mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{n+1}SB,
\end{tikzcd}$$

в которой ввиду следствия 1 треугольник коммутативен с точностью до $\mathfrak{M}\tilde{\mathfrak{A}}^{n+1}S$-гомотопии, получаем, что $\hat{\mathfrak{M}}\hat{S} = 1_{\tilde{E}}$. Теорема доказана.

7. Доказательства технических лемм. Далее под функтором $\mathbb{K}$ мы будем понимать функтор тензорного домножения на C^*-алгебру $\mathbb{K}(l_2(\mathbb{Z}))$.

Определение 4. Пусть X — счетное дискретное метрическое пространство, B — C^*-алгебра, и пусть $m = \mathrm{mat}_{x,y\in X}(m_{x,y}) \in \mathcal{L}_B\left(B \otimes l_2(X)\right)$. Носителем оператора m будем называть множество

$$\mathrm{supp}(m) = \left\{(x, y) \in X \times X : m_{x,y} \neq 0\right\}.$$

Нам понадобится некоторое удобное описание алгебры $(\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 B$ в терминах вложения:

$$\kappa : (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 \subset \mathfrak{A}^2\mathbb{K}^2 B \cong \mathfrak{A}^2\left(B \otimes \mathbb{K}(l_2(\mathbb{Z}^2))\right).$$

Несложно убедиться, что всякий элемент образа данного вложения можно приблизить по норме элементами вида $\mathrm{as}_{t_1}\,\mathrm{as}_{t_2}\, f(t_1, t_2)$, где $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to B \otimes \mathbb{K}(l_2(\mathbb{Z}^2)$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) функция f непрерывна;

2) функция $t_1 \mapsto f(t_1, \cdot)$ непрерывна;

3) носитель $\mathrm{supp}\, f(t_1, t_2)$ ограничен для любых t_1, t_2;

4) для всякого t_1

$$\sup_{t_2} \mathrm{diam}\, \mathrm{pr}_1\, \mathrm{supp}\, f(t_1, t_2) < \infty,$$

где $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : (x, y) \mapsto x$ — отображение проекции.

Теперь мы можем завершить доказательство леммы 1.

Лемма 5. *Пусть B — C^*-алгебра. Тогда $*$-гомоморфизмы*

$$\alpha\iota_{0,0}\mathfrak{A}\mathbb{K} : \mathfrak{A}\mathbb{K} \to (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 B, \qquad \mathfrak{A}\mathbb{K}\alpha\iota_{0,0} : \mathfrak{A}\mathbb{K} \to (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 B$$

$(\mathfrak{A}\mathbb{K})^2$*-гомотопны.*

Доказательство. Для произвольной C^*-алгебры B рассмотрим следующие $*$-гомоморфизмы из $\mathfrak{A}\mathbb{K}B$ в $\mathfrak{A}\mathbb{K}\mathfrak{A}\mathbb{K}B$:

$$\begin{aligned}
\alpha\iota_{0,0}\mathfrak{A}\mathbb{K} : \mathrm{as}_t \operatorname*{mat}_{i,j}\left\{m_{i,j}(t)\right\} &\mapsto \mathrm{as}_{t_1}\,\mathrm{as}_{t_2} \operatorname*{mat}_{(i,i'),(j,j')}\left\{\delta_{i,0}\delta_{i',0}m_{(j,j')}(t_2)\right\},\\
\mathrm{as}_t \operatorname*{mat}_{i,j}\left\{m_{i,j}(t)\right\} &\mapsto \mathrm{as}_{t_1}\,\mathrm{as}_{t_2} \operatorname*{mat}_{(i,i'),(j,j')}\left\{\delta_{i,0}\delta_{i',0}m_{(j,j')}(t_1)\right\},\\
\mathfrak{A}\mathbb{K}\alpha\iota_{0,0} : \mathrm{as}_t \operatorname*{mat}_{i,j}\left\{m_{i,j}(t)\right\} &\mapsto \mathrm{as}_{t_1}\,\mathrm{as}_{t_2} \operatorname*{mat}_{(i,i'),(j,j')}\left\{\delta_{j,0}\delta_{j',0}m_{(i,i')}(t_1)\right\},
\end{aligned}$$

где δ — символ Кронекера. Для доказательства леммы достаточно показать, что эти $*$-гомоморфизмы $\mathfrak{A}\mathbb{K}\mathfrak{A}\mathbb{K}$-гомотопны. Действительно, гомотопия между первым и вторым $*$-гомоморфизмами порождается функцией

$$(t_1, t_2, s) \mapsto \begin{cases} \mathrm{mat}_{(i,i'),(j,j')}\left\{\delta_{i,0}\delta_{i',0}m_{(j,j')}(t_1)\right\} & \text{при } t_1 > st_2,\\ \mathrm{mat}_{(i,i'),(j,j')}\left\{\delta_{i,0}\delta_{i',0}m_{(j,j')}(st_2)\right\} & \text{при } t_1 \leqslant st_2,\end{cases}$$

в то время как гомотопия между вторым и третьим получается с помощью унитарного преобразования в $l_2(\mathbb{Z}^2)$, меняющего местами (i, j)-й и (j, i)-й орты. Легко проверить, что данная гомотопия задана корректно, так как удовлетворяет условиям 1–4. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству предложения 1. Дословно повторяя рассуждения из работы [3, утверждение 2.18], получаем следующую лемму.

Лемма 6. *Для любой сепарабельной C^*-подалгебры $\tilde{E} \subset (\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 D$ существует непрерывное отображение $r_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $\lim_{t\to\infty} r_0(t) = \infty$;

2) *пусть $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция, такая, что $r(x) \leqslant r_0(t)$ при всех t, тогда для всех $F \in \tilde{E}$ выполнено соотношение*

$$\limsup_{t\to\infty} \|F(r(t), t)\| \leqslant \limsup_{t_1\to\infty} \limsup_{t_2\to\infty} \|F(t_1, t_2)\|.$$

Лемма 7. *Пусть D, E — C^*-алгебры, причем E сепарабельна, и пусть существует вложение $\iota : E \hookrightarrow (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 D$. Тогда существует $*$-гомоморфизм ψ, дополняющий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\psi"'] & & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 D \\ & \mathfrak{A}\mathbb{K}D \arrow[ur, "\alpha\iota_{0,0}\mathfrak{A}\mathbb{K}D"'] & \end{tikzcd}$$

до коммутативной с точностью до $(\mathfrak{A}\mathbb{K})^2$-гомотопии.

Доказательство. Пусть $\zeta : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ — некоторая биекция. Определим изометрию $U : l_2(\mathbb{Z}^2) \to l_2(\mathbb{Z}^2)$, заданную на базисных векторах соотношением $U(e_{(i,j)}) = e_{(0,\zeta(i,j))}$.

Для E существует сепарабельное поднятие $\tilde{E} \subset (\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 D$. Выбрав репараметризацию r, как в лемме 6, определим $*$-гомоморфизм

$$\tilde{\psi} : (\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 D \to \mathfrak{T}\mathbb{K}D : ((t_1, t_2) \mapsto m(t_1, t_2)) \mapsto (t \mapsto U(m(r(t), t)U^*)\,,$$

который в свою очередь благодаря лемме 6 порождает $*$-гомоморфизм $\psi : E \to \mathfrak{A}\mathbb{K}D$.

Рассмотрим $*$-гомоморфизмы из $(\kappa \circ \iota)\, E$ в $\mathfrak{A}^2\mathbb{K}^2 D$, которые заданы формулами

$$\begin{aligned} \iota : \operatorname{as}_{t_1} \operatorname{as}_{t_2} m(t_1, t_2) &\mapsto \operatorname{as}_{t_1} \operatorname{as}_{t_2} m(t_1, t_2), \\ \operatorname{as}_{t_1} \operatorname{as}_{t_2} m(t_1, t_2) &\mapsto \operatorname{as}_{t_1} \operatorname{as}_{t_2} (1 \otimes U) m(t_1, t_2)(1 \otimes U)^*, \\ \alpha\iota_{0,0}\mathfrak{A}\mathbb{K}D : \operatorname{as}_{t_1} \operatorname{as}_{t_2} m(t_1, t_2) &\mapsto \operatorname{as}_{t_1} \operatorname{as}_{t_2} (1 \otimes U) m(r(t_2), t_2)(1 \otimes U)^*. \end{aligned}$$

Из существования непрерывного в строгой топологии пути, соединяющего U с тождественным оператором [8], следует $\mathfrak{A}^2\mathbb{K}^2$-гомотопность первого и второго $*$-гомоморфизмов. В свою очередь функция

$$H(t_1 t_2, s) = \begin{cases} m(t_1, t_2), & \text{если } t_1 > sr(t_2); \\ m(sr(t_2), t_2), & \text{если } t_1 < sr(t_2), \end{cases}$$

порождает $\mathfrak{A}^2\mathbb{K}^2$-гомотопию, соединяющую второй и третий $*$-гомоморфизмы

Нетрудно убедиться, что эти две гомотопии удовлетворяют условиям 1–4, а следовательно, могут быть рассмотрены как $(\mathfrak{A}\mathbb{K})^2$-гомотопии. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть D_1, D_2 — C^*-алгебры и $\varepsilon : D_1 \to D_2$ — $*$-гомоморфизм. Пусть E_1 — сепарабельная C^*-подалгебра $(\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 D_1$, а $E_2 := (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 \varepsilon(E_1) \subset (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 D_1$, и пусть $C_2 \subset \mathfrak{A}\mathbb{K}D_2$ — сепарабельная C^*-подалгебра, такая, что $\alpha\iota_{0,0}\mathfrak{A}\mathbb{K}C_2 \subset E_2$. Тогда существуют $*$-гомоморфизмы ψ_1,ψ_2, такие, что коммутирует следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d] & \mathfrak{A}\mathbb{K}D_1 \arrow[d, "\mathfrak{A}\mathbb{K}\varepsilon"] \\ (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 D_2 & E_2 \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\psi_2"] & \mathfrak{A}\mathbb{K}D_2 \\ & & C_2. \arrow[ul] \arrow[u, hook] \arrow[llu, bend left, "\alpha\iota_{0,0}\mathfrak{A}\mathbb{K}C_2"] \end{tikzcd}$$

Доказательство. Для E_1, E_2, C_2 найдем сепарабельные поднятия $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{C}_2$ в $(\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 D_1$, $(\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 D_2$ и $\mathfrak{T}\mathbb{K}D_2$ соответственно. Введем естественное преобразование $\rho : (\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 \Rightarrow \mathfrak{T}\mathbb{K}$ с компонентами

$$\rho D : (\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 D \to \mathfrak{T}\mathbb{K}D : [(t_1, t_2) \mapsto m(t_1, t_2)] \mapsto [t \mapsto Um(r(t), t)U^*]\,,$$

где U и r определены так же, как и в предыдущей лемме. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{E}_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & (\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 D_1 \arrow[r, "\rho D_1"] \arrow[d, "(\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 \varepsilon"'] & \mathfrak{T}\mathbb{K} D_1 \arrow[d, "\mathfrak{T}\mathbb{K}\varepsilon"] \\
\tilde{E}_2 \arrow[r, hook] & (\mathfrak{T}\mathbb{K})^2 D_2 \arrow[r, "\rho D_2"] & \mathfrak{T}\mathbb{K} D_2 \\
 & & \tilde{C}_2 \arrow[u, hook] \arrow[ul, "\mathrm{const}\, \iota_{0,0} \mathfrak{T}\mathbb{K} D_2"'] \arrow[ull, bend left]
\end{tikzcd}$$

будет коммутативной. Теперь остается лишь воспользоваться леммой 6, чтобы завершить доказательство.

Доказательство следующей теоремы — дословное повторение рассуждения из [3, теорема 2.16], где вместо соответствующих лемм необходимо воспользоваться только что доказанными нами аналогами. Для удобства мы воспроизведем доказательство целиком.

Теорема 3. *Если A — сепарабельная C^*-алгебра, то естественное отображение*

$$[A, (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n, B] \to \left[A, (\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n+1}, B\right]$$

является биекцией.

Доказательство. Пусть $\varphi : A \to (\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n+1} B$. Положим $D := (\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n-1}$ и $E := \varphi(A) \subset (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 D$. C^*-алгебра E сепарабельна, а значит, по лемме 7 существует $*$-гомоморфизм $\psi : E \to \mathfrak{A}\mathbb{K}D$, который дополняет диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & E \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\psi"'] & & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^2 D \\
 & & \mathfrak{A}\mathbb{K}D \arrow[ur, "\alpha\iota_{0,0}\mathfrak{A}\mathbb{K}D"'] &
\end{tikzcd}$$

до коммутативной по модулю $(\mathfrak{A}\mathbb{K})^2$-гомотопии. Из условия (iii) определения 1 следует, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & E \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi"'] & & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n+1} B \\
 & & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна с точностью до $(\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n+1}$-гомотопии, что и доказывает сюръективность отображения.

Докажем теперь инъективность. Предположим, что $*$-гомоморфизмы $\varphi_0, \varphi_1 : A \to (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n B$ становятся $(\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n+1}$-гомотопными после композиции с $\alpha\iota_{0,0} (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n$. Применяя лемму 8, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi_j"'] & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n+1} IB \arrow[r, dashed, "\psi_1"'] \arrow[d, "(\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n+1} \mathrm{ev}_j"'] & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n IB \arrow[d, "(\mathfrak{A}\mathbb{K})^n \mathrm{ev}_j"'] \\
(\mathfrak{A}\mathbb{K})^n B \arrow[r] & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^{n+1} B \arrow[r, dashed, "\psi_2"'] & (\mathfrak{A}\mathbb{K})^n B
\end{tikzcd}$$

$(j = 0, 1)$, в которой пунктирными стрелками обозначены $*$-гомоморфизмы, определенные лишь на соответствующих сепарабельных C^*-подалгебрах. Из этой диаграммы следует инъективность. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 21–11–00080.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Connes A., Higson N.* Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante // C.r. Acad. sci. Paris. Sér. I. Math. 1990. **311**, N 2. 101–106.

2. *Каспаров Г.Г.* Операторный K-функтор и расширения C^*-алгебр // Изв. РАН. Сер. матем. 1980. **44**, № 3. 571–636.
3. *Guentner E., Higson N., Trout J.* Equivariant E-theory for C^*-algebras // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. **148**, N 703. 1–83.
4. *Dadarlat M., Loring T.A.* K-homology, asymptotic representations, and unsuspended E-theory // J. Funct. Anal. 1994. **126**, N 2. 367–383.
5. *Manuilov V.M.* A KK-like picture for E-theory of C^*-algebras // Stud. Math. 2017. **252**, N 3. 105–129.
6. *Manuilov V.M., Thomsen K.* Extensions of C^*-algebras and translation invariant asymptotic homomorphisms // Math. Scand. 2007. **100**, N 1. 131–160.
7. *Макеев Г.С.* Еще одно описание функтора Конна–Хигсона // Матем. заметки. 2020. **107**, № 3. 561–574.
8. *Jensen K.K., Thomsen K.* Elements of KK-theory. Boston: Birkhäuser, 1991.
9. *McLane S.* Categories for the working mathematician. N.Y.: Springer, 1998.

Поступила в редакцию
29.09.2021

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О ТОЧКАХ ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ l_∞^2

Б. Б. Беднов[1]

Доказывается, что для заданного набора попарно различных точек $x_1, \ldots, x_n$ сумма расстояний от этих точек до их точки Штейнера в пространстве l_∞^2 равна максимуму из суммы длин $[\frac{n}{2}]-1$ отдельных отрезков и либо полупериметра треугольника, либо еще одного отрезка с вершинами в этом множестве. Также рассматривается случай совпадающих точек среди $x_1, \ldots, x_n$.

Ключевые слова: манхэттенская плоскость, точка Штейнера.

It is proved that for a given set of pairwise distinct points $x_1, \ldots, x_n$ the sum of the distances from these points to their Steiner point in l_∞^2 space is equal to the maximum of the sum of lengths of $[\frac{n}{2}]-1$ separate segments and either a semi-perimeter of a triangle, or another segment with vertices in this set. The case of coincident points among $x_1, \ldots, x_n$ is also studied.

Key words: Manhattan plane, Steiner point.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-14-19

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера (в англоязычной литературе — медиан) $\mathrm{st}(M_n)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\mathrm{st}|(M_n).$$

Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством n.2.I.P. (n.2 Intersection Property [1]), если всякие n попарно пересекающихся замкнутых шаров в X имеют непустое пересечение.

Теорема А (А. Гротендик [2], Й. Линденштраусс [3], см. также [1]). *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*

(1) *X обладает свойством* n.2.I.P. *для всякого $n \geqslant 3$;*

(2) *X обладает свойством* 4.2.I.P.*;*

(3) *X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ;*

---

[1] *Беднов Борислав Борисович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. ФН-12 "Математическое моделирование" МГТУ им. Н.Э. Баумана; доцент каф. высшей математики, механики и математического моделирования ПМГМУ им. И.М. Сеченова Минздрава России (Сеченовский Университет), e-mail: noriiii@inbox.ru.

Bednov Borislav Borisovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Fundamental Sciences-12 "Mathematical Modeling"; Associate Professor, I.M. Sechenov First Moscow State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation (Sechenov University), Chair of Higher Mathematics, Mechanics and Mathematical Modeling.