Краткие сообщения

УДК 515.162+519.17

ВЕСОВЫЕ СИСТЕМЫ ОСНАЩЕННЫХ ХОРДОВЫХ ДИАГРАММ, ОТВЕЧАЮЩИЕ АЛГЕБРАМ ЛИ

Д. П. Ильютко[1], **И. М. Никонов**[2]

В работе обобщается конструкция Бар-Натана весовых систем, индуцированных представлениями алгебр Ли, на случай оснащенных хордовых диаграмм.

Ключевые слова: оснащенная хордовая диаграмма, 4-членное соотношение, весовая система, алгебра Ли.

The construction of Bar-Natan of weight systems induced by Lie algebra representations is generalized in the paper to the case of framed chord diagrams.

Key words: framed chord diagram, 4-term relation, weight system, Lie algebra.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2022-6-60-64

1. Введение. Хордовые диаграммы и 4-членные соотношения появляются при исследовании инвариантов Васильева, инвариантов конечного порядка, узлов [1, 2]. В свою очередь теория инвариантов Васильева тесно связана с теорией J-инвариантов конечного порядка плоских кривых, которая была разработана В. И. Арнольдом [3, 4]. При изучении этой теории возникают понятия оснащенной хордовой диаграммы и оснащенного 4-членного соотношения [5]. Также оснащенные хордовые диаграммы находят свое применение при описании комбинаторики не общего положения лежандровых узлов в 3-мерных многообразиях [6].

Одно из основных свойств хордовых диаграмм заключается в том, что, рассматривая формальные линейные комбинации хордовых диаграмм по модулю 4-членных соотношений, мы можем определить довольно простым образом умножение этих линейных комбинаций, а именно рассмотрев связную сумму двух диаграмм, а потом продолжив по линейности. В результате мы получим алгебру хордовых диаграмм [1, 2]. Весовые системы, т.е. линейные функции на этой алгебре, согласно теореме Васильева–Концевича, приводят к инвариантам Васильева узлов [1, 2]. В случае же оснащенных хордовых диаграмм взятие связной суммы не является корректной операцией [7] (см. также [8]).

Помимо (оснащенных) хордовых диаграмм и 4-членных соотношений рассматриваются также линейные (оснащенные) диаграммы, которые возникают при вложении или погружении прямой или окружности с фиксированной точкой, а не окружности. На этот случай непосредственно переносятся (оснащенные) 4-членные соотношения. Имея две (оснащенные) линейные диаграммы, мы можем рассмотреть их связную сумму. Возникает естественный вопрос: является ли эта операция коммутативной по модулю 4-членных соотношений? Очевидно, что в случае (обычных) линейных диаграмм эта операция коммутативна, поскольку связная сумму двух хордовых диаграмм корректно определена по модулю 4-членных соотношений. В случае же оснащенных линейных диаграмм ответа на этот вопрос пока нет, по крайней мере он неизвестен авторам. Инвариант, построенный в работе [7], не меняется в результате перестановки слагаемых при взятии связной суммы. Прямые попытки доказать коммутативность связной суммы не увенчались успехом, как и попытки поиска с помощью компьютера базиса в алгебре оснащенных линейных диаграмм и дальнейшей проверки на коммутативность. Для маленького числа хорд оснащенной линейной диаграммы компьютерные методы дают коммутативность операции связной суммы. В связи с этим возникает задача поиска инвариантов оснащенных хордовых и линейных диаграмм, которые существенным образом различают хорды разного оснащения.

2. Основные определения и понятия. Введем понятие оснащенной линейной диаграммы и 4-членных соотношений.

[1] *Ильютко Денис Петрович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: denis.ilyutko@math.msu.ru.

[2] *Никонов Игорь Михайлович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: nikonov@mech.math.msu.su.

Ilyutko Denis Petrovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Nikonov Igor Mikhailovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Определение. *Линейная диаграмма* — это ориентированная прямая с конечным числом дуг (*хорд*), концы которых лежат на этой прямой и являются различными точками прямой. Линейная диаграмма называется *оснащенной*, если задано отображение (*оснащение*) из множества хорд в кольцо $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, т.е. каждой хорде приписывается число 0 или 1. Мы рассматриваем оснащенные линейные диаграммы с точностью до изоморфизма, переводящего одну прямую в другую с сохранением ориентации и оснащения хорд. Часто на рисунках хорды с оснащением 0 изображаются жирными ребрами, а с оснащением 1 — пунктирными (см. рис. 1).

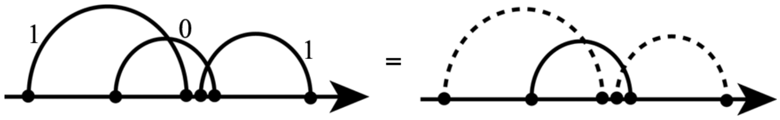

Рис. 1. Оснащенная линейная диаграмма с двумя хордами, имеющими оснащение 1, и одной хордой с оснащением 0

Пусть L^f — свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный всеми оснащенными линейными диаграммами. Таким образом, каждый элемент L^f — это конечная линейная комбинация оснащенных линейных диаграмм с целыми коэффициентами.

Определение. Модуль $\mathcal{L}^f$ оснащенных линейных диаграмм — это фактормодуль модуля L^f по соотношениям из рис. 2 (для каждого соотношения все другие хорды, отличные от изображенных двух, имеют концы на пунктирных участках прямой и расположены одинаково на четырех оснащенных линейных диаграммах). Мы рассматриваем эти соотношения как *оснащенные* 4*-членные соотношения*. Линейную функцию из $\mathcal{L}^f$ в поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ мы будем называть *весовой системой*.

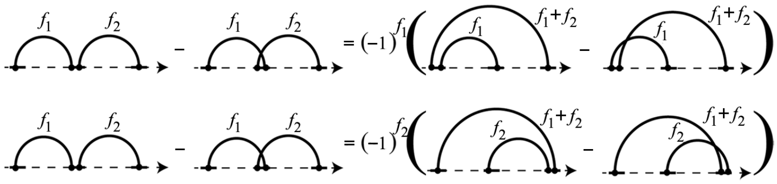

Рис. 2. Оснащенные 4-членные соотношения: $f_1,\ f_2 \in \{0,1\}$ — оснащения хорд

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем F (в качестве F мы будем рассматривать $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), т.е. векторное пространство над F (все пространства имеют конечную размерность), снабженное билинейным отображением $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, которое удовлетворяет равенству $[\mathbf{x},\mathbf{x}]=\mathbf{0}$ и тождеству Якоби $[\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]]+[\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]]+[\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}]]=\mathbf{0}$ для любых $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}\in\mathfrak{g}$, где $\mathbf{0}$ — нейтральный элемент в аддитивной группе алгебры $\mathfrak{g}$.

Определение. *Присоединенным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ называется линейное представление $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ — кольцо линейных операторов в линейном пространстве $\mathfrak{g}$, заданное формулой $\mathbf{x}\mapsto \mathrm{ad}_{\mathbf{x}}$, $\mathrm{ad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})=[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ для любого $\mathbf{y}\in\mathfrak{g}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *метрической*, если на ней задана ad-инвариантная невырожденная симметрическая билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (*ad-инвариантность* означает, что $\langle \mathrm{ad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}),\mathbf{z}\rangle+\langle\mathbf{y},\mathrm{ad}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})\rangle=0$).

Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ — базис алгебры Ли; $c_{ij}^k\in F$ — *структурные константы Ли*, т.е. коэффициенты разложения $[\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j]=c_{ij}^k\mathbf{e}_k$; $(g_{ij})_{n\times n}=(\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\rangle)_{n\times n}$ — матрица билинейной формы в базисе $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$; $(g^{pq})_{n\times n}$ — обратная матрица к матрице (g_{ij}). Тогда из ad-инвариантности билинейной формы вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Для любых трех индексов $i,\ j,\ k$ имеем*

$$c_{ij}^m g_{mk}=g_{jm}c_{ki}^m,\quad g^{mj}c_{ij}^k=g^{kj}c_{ji}^m.$$

Пусть $c^{\alpha\beta\gamma}=g^{i\alpha}g^{j\beta}c_{ij}^{\gamma}$. Поскольку тензор c_{ij}^k кососимметричен по нижним индексам, то $c^{\alpha\beta\gamma}$ является кососимметрическим тензором типа $(3,0)$.

Пусть $h\in\mathrm{End}\,(\mathfrak{g})$ — произвольный линейный самосопряженный оператор линейного пространства $\mathfrak{g}$, т.е. $\langle\mathbf{e}_i,h(\mathbf{e}_j)\rangle=\langle h(\mathbf{e}_i),\mathbf{e}_j\rangle$ и $h([\mathbf{x},\mathbf{y}])=[h(\mathbf{x}),h(\mathbf{y})]$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathfrak{g}$, и пусть $h(\mathbf{e}_i)=a_i^j\mathbf{e}_j$, $a_i^j\in F$.

Лемма 2. *Для любых трех индексов $i,\ j,\ k$ имеем*

$$a_p^i g^{pj}=a_p^j g^{pi},\quad c_{pq}^k a_i^p a_j^q=c_{ij}^r a_r^k.$$

Доказательство. Первое равенство следует из определения самосопряженного оператора, для второго равенства получаем

$$[h(\mathbf{e}_i),h(\mathbf{e}_j)]=[a_i^p\mathbf{e}_p,a_j^q\mathbf{e}_q]=a_i^pa_j^q[\mathbf{e}_p,\mathbf{e}_q]=a_i^pa_j^qc_{pq}^k\mathbf{e}_k,$$
$$h([\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j])=h(c_{ij}^r\mathbf{e}_r)=c_{ij}^ra_r^k\mathbf{e}_k.\ \square$$

$\square$

Дадим еще одно определение.

Определение. *Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$* — это факторалгебра тензорной алгебры $T(\mathfrak{g})$ линейного пространства $\mathfrak{g}$, т.е. свободной ассоциативной алгебры, порожденной пространством $\mathfrak{g}$, по двустороннему идеалу, порожденному элементами $\mathbf{x}\otimes\mathbf{y}-\mathbf{y}\otimes\mathbf{x}-[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ для всех элементов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in\mathfrak{g}$.

3. Инвариант. Пусть $\mathfrak{g}$ — n-мерная метрическая алгебра Ли над полем $F=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$; g_{ij} — матрица ad-инвариантной невырожденной симметрической билинейной формы в этом базисе; $h\in\mathrm{End}\,(\mathfrak{g})$ — линейный сопряженный оператор; D — оснащенная линейная диаграмма. Припишем каждой хорде d два *индекса*, т.е. натуральные числа i_d и j_d, которые меняются от 1 до n. Пометим первый конец хорды d элементом $\mathbf{e}_{i_d}$, а второй конец — элементом $\mathbf{e}_{j_d}$. Запишем произведение всех элементов $\mathbf{e}_{i_d}$ и $\mathbf{e}_{j_d}$ в порядке, в котором они появляются при обходе прямой диаграммы, умножим этот элемент на элемент $g^{i_dj_d}$ для каждой хорды d с оснащением 0 и на элемент $-g^{i_dk_d}a^{j_d}_{k_d}=-g^{j_dk_d}a^{i_d}_{k_d}$ для каждой хорды d с оснащением 1 и возьмем полную свертку. В результате мы получим элемент универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, который мы обозначим $\varphi_{\mathfrak{g},h}(D)$. Продолжая по линейности, мы придем к отображению $\varphi_{\mathfrak{g},h}\colon L^f\to U(\mathfrak{g})$.

Теорема. *Для любого линейного самосопряженного оператора $h\in\mathrm{End}\,(\mathfrak{g})$ отображение $\varphi_{\mathfrak{g},h}$ не зависит от выбора базиса и удовлетворяет оснащенным 4-членным соотношениям.*

Доказательство. Независимость от выбора базиса следует из правила изменения координат тензора при замене базиса.

Проверим выполнение 4-членных соотношений. Пусть хорды d_1 и d_2 выделены в 4-членном соотношении и имеют оснащения $f_1=f_2=1$ (остальные случаи оснащений рассматриваются аналогично). Используя лемму 2, для левых частей соотношений имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{g},h}(D_1)-\varphi_{\mathfrak{g},h}(D_2)&=\ldots g^{i_{d_1}k_{d_1}}a^{j_{d_1}}_{k_{d_1}}g^{i_{d_2}k_{d_2}}a^{j_{d_2}}_{k_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_1}}\mathbf{e}_{i_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_2}}\ldots-\\&-\ldots g^{i_{d_1}k_{d_1}}a^{j_{d_1}}_{k_{d_1}}g^{i_{d_2}k_{d_2}}a^{j_{d_2}}_{k_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_2}}\mathbf{e}_{j_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_2}}\ldots=\\&=\ldots c^k_{j_{d_1}i_{d_2}}g^{i_{d_1}k_{d_1}}a^{j_{d_1}}_{k_{d_1}}g^{i_{d_2}k_{d_2}}a^{j_{d_2}}_{k_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_k\ldots\mathbf{e}_{j_{d_2}}\ldots=\ldots a^\beta_kc^{\alpha\gamma k}\ldots\mathbf{e}_\alpha\ldots\mathbf{e}_\beta\ldots\mathbf{e}_\gamma\ldots\end{aligned}$$

и для правых частей

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{g},h}(D_3)-\varphi_{\mathfrak{g},h}(D_4)&=\ldots(-g^{i_{d_1}k_{d_1}}a^{j_{d_1}}_{k_{d_1}})g^{i_{d_2}j_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_1}}\mathbf{e}_{i_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_2}}\ldots-\\&-\ldots(-g^{i_{d_1}k_{d_1}}a^{j_{d_1}}_{k_{d_1}})g^{i_{d_2}j_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_2}}\mathbf{e}_{i_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_2}}\ldots=\\&=\ldots c^k_{i_{d_1}i_{d_2}}(-g^{i_{d_1}k_{d_1}}a^{j_{d_1}}_{k_{d_1}})g^{i_{d_2}j_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_k\ldots\mathbf{e}_{j_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_2}}\ldots=\ldots(-a^\beta_kc^{k\gamma\alpha})\ldots\mathbf{e}_\alpha\ldots\mathbf{e}_\beta\ldots\mathbf{e}_\gamma\ldots\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{g},h}(D_3)-\varphi_{\mathfrak{g},h}(D_4)&=\ldots g^{i_{d_1}j_{d_1}}(-g^{i_{d_2}k_{d_2}}a^{j_{d_2}}_{k_{d_2}})\ldots\mathbf{e}_{i_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_1}}\mathbf{e}_{j_{d_2}}\ldots-\\&-\ldots g^{i_{d_1}j_{d_1}}(-g^{i_{d_2}k_{d_2}}a^{j_{d_2}}_{k_{d_2}})\ldots\mathbf{e}_{i_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_{j_{d_2}}\mathbf{e}_{j_{d_1}}\ldots=\\&=\ldots c^k_{j_{d_1}j_{d_2}}g^{i_{d_1}j_{d_1}}(-g^{i_{d_2}k_{d_2}}a^{j_{d_2}}_{k_{d_2}})\ldots\mathbf{e}_{i_{d_1}}\ldots\mathbf{e}_{i_{d_2}}\ldots\mathbf{e}_k\ldots=\ldots(-a^\beta_kc^{\alpha k\gamma})\ldots\mathbf{e}_\alpha\ldots\mathbf{e}_\beta\ldots\mathbf{e}_\gamma\ldots.\end{aligned}$$

С помощью леммы 1 мы получаем справедливость теоремы. □

Любое линейное представление $T\colon\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$, где V — конечномерное линейное пространство, естественным образом продолжается до гомоморфизма $U(T)\colon U(\mathfrak{g})\to\mathrm{End}(V)$. Рассматривая след оператора, мы получаем отображение $\mathrm{Tr}\colon\mathrm{End}(V)\to F$.

Следствие. *Отображение $\mathrm{Tr}\circ U(T)\circ\varphi_{\mathfrak{g},h}$ является весовой системой.*

4. Примеры. Пусть $\mathfrak{g}=gl(N,F)=\mathrm{End}(F^N)$ — общая линейная алгебра Ли с коммутатором $[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\mathbf{xy}-\mathbf{yx}$ и ad-инвариантной невырожденной симметрической билинейной формой $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\mathrm{Tr}(\mathbf{xy})$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathfrak{g}$. Рассмотрим два линейных оператора из $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$: $h_1(\mathbf{x})=A\mathbf{x}A^{-1}$ для всех $\mathbf{x}\in\mathfrak{g}$, где $A\in GL(N,F)$, и $h_2(\mathbf{x})=-\mathbf{x}^\top$ (здесь $\top$ — операция транспонирования).

Условие самосопряженности оператора h_1 равносильно равенству $A^2=\lambda E$, где E — тождественный оператор. Из вида оператора h_1 ясно, что $A^2=E$. Тогда в некотором базисе пространства F^N оператор A диагонализируем с ±1 на диагонали. Пусть $A=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_N)$, где $a_i=1$ при

$1 \leqslant i \leqslant p$ и $a_i = -1$ при $p < i \leqslant N$ для некоторого p, $0 \leqslant p \leqslant N$. Фиксируем этот базис и будем задавать операторы матрицами в этом базисе.

Рассмотрим фундаментальное представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве F^n и опишем соответствующие весовые системы $\mathrm{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_1}$ и $\mathrm{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_2}$.

Рис. 3. Операции удвоения хорды диаграммы

Для оснащенной линейной диаграммы D определим два способа *удвоения хорды*, состоящие в замене хорды на две параллельные ей дуги или на две пересекающие дуги и удалении участков ориентированной прямой, разделяющих данные дуги (см. рис. 3). В результате удвоения всех хорд диаграммы и шевеления дуг при разведении вторым способом мы получим одномерное многообразие в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $s(D)$ — число связных компонент многообразия, полученного в результате удвоения всех хорд диаграммы D первым способом; $s_{\mathrm{odd}}(D)$ — число компонент многообразия при удвоении (первым способом) хорд диаграммы D, которые содержат нечетное число дуг, соответствующих хордам с оснащением 1, и $s_f(D)$ — число связных компонент многообразия, полученного в результате удвоения всех хорд с оснащением 0 диаграммы D первым способом и всех хорд с оснащением 1 вторым способом. Заметим, что число $s_{\mathrm{odd}}(D)$ всегда четно. Пусть $n_1(D)$ — число хорд с оснащением 1 в диаграмме D.

Утверждение. *Для любой оснащенной линейной диаграммы D значение весовой системы* $\mathrm{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_1}(D)$ *равно* $(-1)^{n_1(D)} \cdot N^{s(D)-s_{\mathrm{odd}}(D)} \cdot (N-2p)^{s_{\mathrm{odd}}(D)}$, *а значение весовой системы* $\mathrm{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_2}(D)$ *равно* $N^{s_f(D)}$.

В частности, для оснащенной линейной диаграммы, изображенной на рис. 1, имеем $s(D) = 2$, $s_{\mathrm{odd}}(D) = 0$, $s_f(D) = 2$, $n_1(D) = 2$, так что значения весовых систем на ней равны N^2.

Доказательство. Рассмотрим базис $\mathbf{e}_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$, алгебры $\mathfrak{g}$, состоящий из матричных элементов, которые имеют 1 на (i,j)-м месте и остальные нули. Тогда $\langle \mathbf{e}_{ij}, \mathbf{e}_{kl} \rangle = \delta_{jk}\delta_{il}$, $h_1(\mathbf{e}_{ij}) = a_i a_j \mathbf{e}_{ij}$ и $h_2(\mathbf{e}_{ij}) = -\mathbf{e}_{ji}$, где δ_{jk} — символ Кронекера, $a_i = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant p$ и $a_i = -1$ при $p < i \leqslant N$.

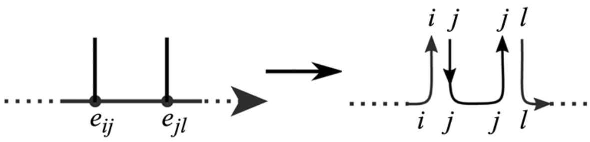

Рис. 4. Индексы на дугах удвоенной диаграммы

После свертки с метрическим тензором каждая хорда с оснащением 0 дает вклад вида $\ldots \mathbf{e}_{ij} \ldots \mathbf{e}_{ji} \ldots$ в выражения для $\varphi_{\mathfrak{g},h_1}(D)$ и $\varphi_{\mathfrak{g},h_2}(D)$, а хорда с оснащением 1 — вклад вида $\ldots (-1) a_i a_j \mathbf{e}_{ij} \ldots \mathbf{e}_{ji} \ldots$ в выражение для $\varphi_{\mathfrak{g},h_1}(D)$ и вклад вида $\ldots \mathbf{e}_{ij} \ldots \mathbf{e}_{ij} \ldots$ в выражение для $\varphi_{\mathfrak{g},h_2}(D)$, где по индексам i, j подразумевается суммирование от 1 до N. Тогда каждое из слагаемых $\ldots \mathbf{e}_{ij} \ldots \mathbf{e}_{ji} \ldots$ и $\ldots \mathbf{e}_{ij} \ldots \mathbf{e}_{ij} \ldots$ в сумме задает метки i и j на дугах многообразия $\tilde{D}$, получаемого из D удвоением хорд (см. рис. 4).

Так как в фундаментальном представлении имеет место равенство $\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{kl} = \delta_{jk}\mathbf{e}_{il}$, то слагаемое, содержащее произведение $\ldots \mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{kl} \ldots$, может давать ненулевой вклад в $U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_m}(D)$, $m = 1, 2$, только в случае $j = k$. Значит, индексы элементов, соответствующих соседним хордам в диаграмме D, должны быть согласованы. Отсюда следует, что индексы всех дуг в одной связной компоненте многообразия $\tilde{D}$ равны между собой (см. рис. 4). Таким образом, слагаемые весовых систем $\mathrm{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_m}(D)$, $m = 1, 2$, соответствуют расстановкам индексов от 1 до N на компонентах многообразия $\tilde{D}$. Произведение матричных элементов в каждом слагаемом дает элемент вида $\mathbf{e}_{ii}$, след которого равен 1. Поэтому для оператора h_1 слагаемое равно произведению коэффициентов $-a_i a_j$, соответствующих хордам с оснащением 1. Знаки минус в совокупности дают множитель $(-1)^{n_1(D)}$. Для h_2 все слагаемые равны единице.

Найдем значение произведения коэффициентов $a_i a_j$. Их можно сгруппировать по компонентам многообразия $\tilde{D}$. Вклад компоненты, помеченной индексом i, равен a_i^q, где q — число дуг в компоненте, соответствующих хордам с оснащением 1. Вклад равен -1, если $i > p$ и q нечетно, и равен 1 в противном случае. Поскольку индексы компонент выбираются независимо друг от друга и $s_{\mathrm{odd}}(D)$ всегда четно, в итоге получаем

$$\operatorname{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_1}(D) = (-1)^{n_1(D)} \cdot (p \cdot 1 + (N-p) \cdot (-1))^{s_{\mathrm{odd}}(D)} \cdot N^{s(D)-s_{\mathrm{odd}}(D)} = \\ = (-1)^{n_1(D)} \cdot N^{s(D)-s_{\mathrm{odd}}(D)} \cdot (N-2p)^{s_{\mathrm{odd}}(D)} \quad \text{и} \quad \operatorname{Tr} \circ U(T) \circ \varphi_{\mathfrak{g},h_2}(D) = N^{s_f(D)}. \ \square$$

Авторы приносят благодарность академику РАН А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

Работа Д. П. Ильютко выполнена в МГУ имени М. В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда, проект № 21–11–00355.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bar-Natan D.* On the Vassiliev knot invariants // Topology. 1995. **34**. 423–472.
2. *Chmutov S.V., Duzhin S., Mostovoy J.* Introduction to Vassiliev knot invariants. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
3. *Arnold V.I.* Topological invariants of plane curves and caustics // Univ. Lect. Ser. 5. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1994.
4. *Arnold V.I.* Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications // Singularities and Bifurcations. Adv. Sov. Math. Vol. 21. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1994. 33–91.
5. *Ландо С.К.* J-инварианты орнаментов и оснащенные хордовые диаграммы // Функц. анализ и его прил. 2006. **40**, № 1. 1–13.
6. *Goryunov V.V.* Finite order invariants of framed knots in a solid torus and in Arnold's $(J+)$-theory of plane curves // Lect. Notes Pure and Appl. Math. Vol. 184. Geometry and Physics / Ed. by J.E. Andersen, J. Dupont, H. Pedersen and A. Swann. N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1997. 549–556.
7. *Ilyutko D.P., Manturov V.O.* A parity map of framed chord diagrams // J. Knot Theory and Its Ramifications. 2015. **24**, N 13. 1541006-1–15.
8. *Karev M.* The space of framed chord diagrams as a Hopf module // J. Knot Theory and Its Ramifications. 2015. **24**, N 3. 1550014-1–17.

Поступила в редакцию
19.05.2022

УДК 511

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕДУРЫ ПОСТОБРАБОТКИ БЫСТРОГО АЛГОРИТМА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО КОДИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ АРХИТЕКТУРЫ CUDA

Г. В. Носовский[1], А. Ю. Чекунов[2]

В статье представлено улучшение алгоритма распознавания контуров. Идея алгоритма основана на вычислении геометрических характеристик двумерной поверхности в R^3, кодирующей данное изображение. Для получения результирующей картины контуров вычисляется фрактальная размерность Минковского по всему изображению. Описывается алгоритм постобработки предварительно полученных контуров цифровых изображений в части их утончения. Также представлена оценка скорости работы алгоритма с учетом новой процедуры в сравнении с широко известной реализацией алгоритма Канни (Canny), использующей библиотеку компьютерного зрения OpenCV и параллельную архитектуру CUDA. Приведены примеры, демонстрирующие работоспособность новой процедуры алгоритма.

Ключевые слова: распознавание образов, геометрическое кодирование, кодирующая поверхность, контурный анализ, распознавание контуров, компьютерное зрение, обработка изображений, склейка изображений.

[1] *Носовский Глеб Владимирович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb.nosovskiy@gmail.com.

[2] *Чекунов Алексей Юрьевич* — e-mail: chekunov.alexey@gmail.com.

Nosovskii Gleb Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Chekunov Aleksei Yurievich.