что в эти моменты времени градиент функционала (4) или (5) сильно возрастает, вследствие чего нейронная сеть начинает значительно менять свои весовые коэффициенты, а следовательно, и управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Караваев Ю.Л., Килин А.А.* Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой // Нелинейная динам. 2015. **11**, № 1. 187–204.
2. *Иванов А.П.* Об управлении роботом-шаром при помощи двух омниколес // Нелинейная динам. 2015. **11**, № 2. 319–327.
3. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика: Учеб. 3-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань, 2003.
4. *Бураков М.В., Шишлаков В.Ф., Коновалов А.С.* Адаптивный нейросетевой пропорционально-интегрально-дифференцирующий регулятор // Вопросы радиоэлектроники. 2018. № 10. 86–92.
5. *Cai Yao, Zhan Qiang, Xi Xi.* Neural network control for the linear motion of a spherical mobile Robot // Int. J. Adv. Robotic Systems. 2011. **8**, N 4 (DOI:10.5772/45711).
6. *Hernandez-Alvarado R., Garcia-Valdovinos L.G., Salgado-Jimenez T., Gomez-Espinosa A., Fonseca-Navarro F.* Neural network-based self-tuning PID control for underwater vehicles // Sensors. 2016. **16**, N 9.
7. *Marino A., Neri F.* PID tuning with neural networks // Intelligent Information and Database Systems. Springer, 2019. 476–487.

Поступила в редакцию
01.06.2022

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ЛИСТА ИЗ ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

И. М. Цветков[1]

Исследуется напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородного листа из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса–Генки. Боковая граница свободна от напряжений, на торцах заданы продольные скорости. Учитывается возможность утолщения либо утончения сечения по длине листа, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Выявлены два характерных режима растяжения — один связан с достаточно большой скоростью удаления концов листа друг от друга, другой — с ускорением. Во втором случае проведен анализ с использованием метода асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно найти параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: идеальная пластичность, предел текучести, лист, растяжение, шейка, квазистатика, динамика, скорость деформации, напряжение, асимптотические разложения.

The stress-strain state arising under dynamic stretching of a homogeneous sheet of an incompressible ideally rigid–plastic material, which obeys the Mises–Hencky criterion, is studied. The lateral boundary is stress–free and the longitudinal velocities are given at the ends. The possibility of thickening or thinning of the section along the length of the sheet is taken into account, which simulates necking and further development of the neck. Two characteristic stretching regimes are revealed: one of them depends on the velocity at which the end sections move away from each other and the other one depends on their acceleration. For the second regime, the asymptotic integration-based analysis allows one to find the stress–strain state parameters approximately.

[1] *Цветков Иван Максимович* — асп. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: cvetkoviv@yandex.ru.
Tsvetkov Ivan Maksimovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.

Key words: ideal plasticity, yield stress, sheet, tension, neck, quasi-statics, dynamics, strain rate, stress, asymptotic expansions.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2022-6-51-59

Теория идеальной пластичности является одним из фундаментальных разделов механики деформируемого твердого тела. Она тесно связана с технологическими процессами формообразования, такими, как прокатка полосы, выдавливание стержней и труб, волочение проволоки, глубокая вытяжка листа. Различным аспектам динамических постановок краевых задач пластического течения, в том числе растекания тонкого слоя между сближающимися плитами, течения по поверхностям, поведения грунтов при внезапном приложении нагрузки, вопросам устойчивости, а также групповым свойствам уравнений теории пластичности, посвящено большое число исследований [1–6].

При испытании на растяжение большинство цилиндрических образцов из пластичных материалов перед самым моментом разрушения заметно изменяет форму. Подобное явление резкого локального утончения образца называют образованием шейки. В последние годы внимание исследователей концентрируется на таких вопросах, как шейкообразование с учетом краевых эффектов [7], место локализации шейки при растяжении цилиндрического образца [8], развитие новых численных методов для определения полей напряжения и деформации в окрестности утончения образца [9], влияние геометрических несовершенств на множественное шейкообразование при динамическом расширении кольца [10], применение методов линейного анализа устойчивости в задаче динамического растяжения круглого стержня и предсказания локализации шеек [11].

В настоящей работе в задаче о растяжении идеально жесткопластического листа с использованием метода асимптотического интегрирования показано, что при переходе от квазистатики к динамическому деформированию прослеживаются два характерных сценария растяжения. Каждый из них связан с достижением некоторой безразмерной функцией времени определенного порядка малости по отношению к малому геометрическому параметру, характеризующему форму листа. Одна из этих функций представляет собой обратное число Эйлера, другая зависит от ускорения, с которым удаляются друг от друга торцевые сечения. При реализации режима, связанного с достижением ускорения своих критических значений, приближенно вычислены параметры напряженно-деформированного состояния, в частности получена аппроксимация формы границы листа, позволяющая моделировать шейкообразование.

1. Постановка задачи о динамическом растяжении листа. Рассмотрим деформирование во времени бесконечного вдоль оси x_3 листа из однородного несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки, с плотностью ρ и пределом текучести σ_s. В плоских задачах удобнее использовать предел текучести при сдвиге $\tau_s = \sigma_s/\sqrt{2}$. В силу того что деформируемое состояние плоское, достаточно рассмотреть произвольное сечение листа. Сечение в момент времени t является вытянутой симметричной областью с неизменной во времени площадью $|\Omega|$ и в прямоугольной системе координат, связанной с осью симметрии листа, имеет вид

$$\Omega_t = \{(x_1, x_2)| - l(t) \leqslant x_1 \leqslant l(t), \quad -h(t, x_1) \leqslant x_2 \leqslant h(t, x_1)\}, \tag{1}$$

$$|\Omega| = 4h(0)l(0) = 2\int\limits_{-l(t)}^{l(t)} h(t,x)\,dx = 4h^*(t)l(t). \tag{2}$$

Средняя по длине ширина сечения h^* определяется в (2) таким образом, чтобы площадь прямоугольного сечения длины $2l(t)$ и ширины $2h^*(t)$ равнялась $|\Omega|$.

Боковая поверхность $x_2 = h(x_1, t)$ свободна от напряжений, а на торцах $x_1 = l$ и $x_1 = -l$ заданы продольные скорости:

$$x_1 = \pm l(t): \quad v_1 = \pm V(t), \quad V(t) > 0. \tag{3}$$

Итак, рассматривается растяжение листа с заданной кинематикой движения его концов. Функции $l(t)$ и $h^*(t)$ являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей. Поле вектора скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = (v_1,v_2)$ порождает тензор скоростей деформации $\underset{\sim}{v}$ с ненулевыми компонентами

$$v_{11} = v_{1,1}, \quad v_{12} = \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}), \quad v_{22} = v_{2,2}. \tag{4}$$

В силу несжимаемости $\operatorname{tr}\underset{\sim}{v} = 0$.

Представим симметричный тензор напряжений $\underset{\sim}{\sigma}(\mathbf{x},t)$ как сумму шаровой и девиаторной частей: $\underset{\sim}{\sigma} = -p\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{s}$, где p — давление, $\underset{\sim}{I}$ — единичный тензор второго ранга, $\operatorname{tr}\underset{\sim}{s} = 0$. Определим интенсивности скоростей деформаций v_u и напряжений σ_u:

$$v_u = \sqrt{\underset{\sim}{v} : \underset{\sim}{v}}, \quad \sigma_u = \sqrt{\underset{\sim}{s} : \underset{\sim}{s}}. \tag{5}$$

Векторные определяющие соотношения идеально жесткопластической среды

$$v_u \underset{\sim}{s} = \sigma_u \underset{\sim}{v} \tag{6}$$

тензорно линейны, следовательно, ненулевыми у девиатора $\underset{\sim}{s}$ будут те же компоненты, что и у тензора $\underset{\sim}{v}$. Тогда определяющее соотношение $\sigma_u = \sigma_s$, являющееся условием пластичности Мизеса–Генки, запишется следующим образом:

$$s_{11}^2 + s_{12}^2 = \tau_s^2. \tag{7}$$

Исключая интенсивности σ_u и v_u, из соотношений (6) можно создать пропорцию $s_{11}v_{12} = s_{12}v_{11}$, которая с учетом связей (4) преобразуется к виду, где запятая в индексе обозначает дифференцирование по соответствующей переменной:

$$s_{11}(v_{1,2} + v_{2,1}) = 2s_{12}v_{1,1}. \tag{8}$$

Выпишем условие несжимаемости, а также два уравнения движения в плоском случае:

$$v_{1,1} + v_{2,2} = 0, \tag{9}$$

$$-p_{,1} + s_{11,1} + s_{12,2} = \rho(v_{1,t} + v_1 v_{1,1} + v_2 v_{1,2}), \tag{10}$$

$$-p_{,2} - s_{11,2} + s_{12,1} = \rho(v_{2,t} + v_1 v_{2,1} + v_2 v_{2,2}). \tag{11}$$

Нелинейная система пяти уравнений (7)–(11) замкнута относительно пяти функций v_1, v_2, p, s_{11}, s_{12}, зависящих от x_1, x_2 и t, в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $x_2 = \pm h(x_1,t)$, которая характеризуется нормалью $\mathbf{n}$:

$$n_1 = -\frac{\partial h/\partial x_1}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial x_1)^2}}, \quad n_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial x_1)^2}}.$$

На этой части границы выполнены условия равенства нулю двух компонент вектора напряжений:

$$x_2 = \pm h(x_1,t): \quad (p - s_{11})\,\frac{\partial h}{\partial x_1} \pm s_{12} = 0, \quad s_{12}\,\frac{\partial h}{\partial x_1} \pm (p + s_{11}) = 0. \tag{12}$$

Также выполняются два кинематических граничных условия на торцах листа.

Для строгой постановки начально-краевой задачи, рассматриваемой при $t > 0$, необходимо задать функцию $h(x_1,0) \equiv h_0(x_1)$, $-l_0 < x_1 < l_0$, удовлетворяющую интегральному условию

$$\frac{|\Omega|}{2} = \int\limits_{-l_0}^{l_0} h_0(x)\,dx.$$

При $t = 0$ определенная в (2) средняя ширина h^* принимает свое максимальное значение h_0^*:

$$h_0^* = \frac{1}{2l_0}\int\limits_{-l_0}^{l_0} h_0(x)\,dx = \frac{|\Omega|}{4l_0}.$$

Кроме того, предположим, что функции s_{11}, p, v_2 симметричны по x_1, а s_{12} и v_1 антисимметричны по x_1. Из симметричности области Ω_t следует, что функции s_{11}, p, v_1 симметричны по x_2 и s_{12}, v_2 антисимметричны по x_2.

2. Квазистатический режим растяжения. Квазистатическая постановка задачи о растяжении идеально жесткопластического листа отличается от динамической тем, что в правых частях уравнений (10), (11) стоят нули, т.е. время t становится параметром, входящим в решения неявно через V, h и l. Уравнения (10) и (11) превращаются в уравнения равновесия.

Аналитическое решение квазистатической задачи несложно получить, если в начальный момент времени сечение имело прямоугольную форму, т.е. $h_0^* = \text{const}$. Будем обозначать параметры этого решения верхним индексом qs. Имеем

$$v_1^{qs} = \frac{V}{l}x_1, \quad v_2^{qs} = -\frac{V}{l}x_2, \tag{13}$$

$$s_{12}^{qs} = 0, \quad s_{11}^{qs} = \tau_s, \quad p^{qs} = -\tau_s. \tag{14}$$

Напряженное состояние (14) однородно и не зависит от заданной скорости V.

Интегрируя задачу Коши

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1^{qs}(x_1), \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2^{qs}(x_2); \quad x_1|_{t=0} = a, \quad x_2|_{t=0} = b,$$

найдем лагранжев закон движения частиц (при интегрировании полагаем, что V и l постоянны):

$$x_1^{qs} = a\exp\left(\frac{Vt}{l}\right), \quad x_2^{qs} = b\exp\left(-\frac{Vt}{l}\right).$$

Траектории частиц — семейство гипербол $x_1x_2 = ab$. Независимость x_1^{qs} от b и x_2^{qs} от a свидетельствует о том, что Ω_t представляет собой вытягивающийся со временем прямоугольник.

Кинематика (13) обеспечивает отсутствие жестких зон в Ω_t, так как согласно (4) и (5) во всех точках листа $v_u^{qs} = \sqrt{2}\,\frac{V}{l} > 0$.

Исследуем далее вопрос о том, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) выписанное выше квазистатическое приближение является главным и им можно ограничиться в технологических расчетах, а когда инерционные эффекты, вызванные слагаемыми в правых частях уравнений (10) и (11), начинают играть соизмеримую роль в распределении напряжений и движений точек внутри листа.

3. Асимптотическое разложение. Обратимся к динамическим уравнениям (10), (11) и образуем три явно зависящих от времени безразмерных параметра:

$$\alpha(t) = \frac{h^*(t)}{l(t)} \ll 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho V^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho \dot{V}(t) h^*(t)}{\tau_s}. \tag{15}$$

Первый из них — малый геометрический параметр, второй — обратное число Эйлера. На разных интервалах процесса растяжения порядок малости α по отношению к ε_1 и ε_2 может меняться. От этого зависит вклад инерционных слагаемых в уравнения движения.

Представим разложения пяти неизвестных функций в виде регулярных асимптотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α (в [6] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе растяжения осесимметричного стержня, в [4, 5] — в анализе задачи Прандтля):

$$\begin{gathered}
v_1(x_1,x_2,t) = V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)v_{\eta_1}^{\{n\}}(\eta_1,\eta_2,\tau), \\
v_2(x_1,x_2,t) = V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)v_{\eta_2}^{\{n\}}(\eta_1,\eta_2,\tau), \\
s_{(11;12)}(x_1,x_2,t) = \tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)s_{(\eta_1\eta_1;\eta_1\eta_2)}^{\{n\}}(\eta_1,\eta_2,\tau), \\
p(x_1,x_2,t) = \tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t)p^{\{n\}}(\eta_1,\eta_2,\tau),
\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\eta_1 = \frac{\alpha(t)x_1}{h^*(t)} = \frac{x_1}{l(t)}, \quad \eta_2 = \frac{x_2}{h^*(t)}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{t}{h^*(t)}.$$

Безразмерные коэффициенты рядов (16) (с верхними индексами) зависят от новых безразмерных координат η_1, η_2 и безразмерного времени τ. Область сечения Ω_t (1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_\tau = \{(\eta_1, \eta_2) | -1 \leqslant \eta_1 \leqslant 1, -\xi(\tau, \eta_1) \leqslant \eta_2 \leqslant \xi(\tau, \eta_1)\},$$

где

$$\xi(\tau, \eta_1) = \frac{h(t, x_1)}{h^*(t)}, \quad \int\limits_{-1}^{1} \xi(\tau, \eta_1)\, d\eta_1 = 2, \quad \frac{\partial h}{\partial x_1} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial \eta_1}. \tag{17}$$

Отметим, что порядок малости по α безразмерных производных $\partial h/\partial x_1$ и $\partial\xi/\partial\eta_1$ разный. Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан замены переменных $\partial(\eta_1, \eta_2, \tau)/\partial(x_1, x_2, t)$ отличен от нуля, т.е. она не вырождена. Нижние пределы суммирования в (16) для v_1 обусловлены граничными условиями (3), а для компонент девиатора — критерием пластичности. Имеет место замена дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{l(t)}\frac{\partial}{\partial \eta_1} = \frac{\alpha(t)}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial \eta_2}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{V\eta_1}{l}\frac{\partial}{\partial \eta_1} + \frac{V\eta_2}{l}\frac{\partial}{\partial \eta_2} + \left(\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{1}{h^*} + \frac{V\tau}{l}\right)\frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{19}$$

Из определения малого параметра (15) и средней ширины сечения (2) следуют кинетические соотношения

$$\dot{\alpha} = -\frac{2\alpha V}{l}, \quad \dot{h^*} = -\frac{h^* V}{l}. \tag{20}$$

Подставим ряды (16) в пять уравнений (7)–(11) и в граничные условия (3), (12). С учетом формул (17)–(20) получим систему, состоящую из уравнений движения (10), (11):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(-\alpha p^{\{n\}}_{,\eta_1} + \alpha s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_1,\eta_1} + s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_2,\eta_2}) =$$
$$= \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1}(-2n\upsilon^{\{n\}}_{\eta_1} - \eta_1\upsilon^{\{n\}}_{\eta_1,\eta_1} + \eta_2\upsilon^{\{n\}}_{\eta_1,\eta_2} + \tau\upsilon^{\{n\}}_{\eta_1,\tau}) +$$
$$+ \sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\upsilon^{\{n\}}_{\eta_1,\tau} + \varepsilon_1\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}\upsilon^{\{j\}}_{\eta_1}\upsilon^{\{n-j\}}_{\eta_1,\eta_1} + \varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}\upsilon^{\{j\}}_{\eta_2}\upsilon^{\{n-j\}}_{\eta_1,\eta_2} + \varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\upsilon^{\{n\}}_{\eta_1}, \tag{21}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(-p^{\{n\}}_{,\eta_2} - s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_1,\eta_2} + \alpha s^{\{n\}}_{\eta_1\eta_2,\eta_1}) =$$
$$= \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1}(-2n\upsilon^{\{n\}}_{\eta_2} - \eta_1\upsilon^{\{n\}}_{\eta_2,\eta_1} + \eta_2\upsilon^{\{n\}}_{\eta_2,\eta_2} + \tau\upsilon^{\{n\}}_{\eta_2,\tau}) +$$
$$+ \sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\upsilon^{\{n\}}_{\eta_2,\tau} + \varepsilon_1\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}\upsilon^{\{j\}}_{\eta_1}\upsilon^{\{n-j\}}_{\eta_2,\eta_1} + \varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}\upsilon^{\{j\}}_{\eta_2}\upsilon^{\{n-j\}}_{\eta_2,\eta_2} + \varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\upsilon^{\{n\}}_{\eta_2}, \tag{22}$$

из условия несжимаемости (9), которое в силу линейности может быть записано в виде рекуррентной цепочки (коэффициенты с отрицательными индексами считаются равными нулю):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\upsilon^{\{n-1\}}_{\eta_1,\eta_1} + \upsilon^{\{n\}}_{\eta_2,\eta_2})\alpha^n = 0 \iff \upsilon^{\{0\}}_{\eta_2,\eta_2} = 0, \quad \upsilon^{\{n-1\}}_{\eta_1,\eta_1} + \upsilon^{\{n\}}_{\eta_2,\eta_2} = 0, \quad n \geqslant 1, \tag{23}$$

критерия Мизеса–Генки (7):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}}s_{\eta_1\eta_1}^{\{n-j\}}+s_{\eta_1\eta_2}^{\{j\}}s_{\eta_1\eta_2}^{\{n-j\}})\alpha^n=1 \iff \tag{24}$$

$$(s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}})^2+(s_{\eta_1\eta_2}^{\{0\}})^2=1, \quad \sum_{j=0}^{n}(s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}}s_{\eta_1\eta_1}^{\{n-j\}}+s_{\eta_1\eta_2}^{\{j\}}s_{\eta_1\eta_2}^{\{n-j\}})=0, \quad n\geqslant 1,$$

условия соосности девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций (8):

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\eta_1\eta_1}^{\{n\}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n \upsilon_{\eta_1,\eta_2}^{\{n\}}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\upsilon_{\eta_2,\eta_1}^{\{n\}}\right)=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\eta_1\eta_2}^{\{n\}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}\upsilon_{\eta_1,\eta_1}^{\{n\}}\right) \iff \tag{25}$$

$$s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}\upsilon_{\eta_1,\eta_2}^{\{0\}}=0, \quad \sum_{j=0}^{n}s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}}\upsilon_{\eta_1,\eta_2}^{\{n-j\}}+\sum_{j=0}^{n-1}s_{\eta_1\eta_1}^{\{j\}}\upsilon_{\eta_2,\eta_1}^{\{n-1-j\}}=2\sum_{j=0}^{n-1}s_{\eta_1\eta_2}^{\{j\}}\upsilon_{\eta_1,\eta_1}^{\{n-1-j\}}, \quad n\geqslant 1.$$

Граничные условия (3) имеют вид

$$\eta_1=\pm 1: \quad \upsilon_{\eta_1}^{\{0\}}=\pm 1, \quad \upsilon_{\eta_1}^{\{n\}}=0, \quad n\geqslant 1. \tag{26}$$

Условия того, что верхняя и нижняя границы свободны от напряжений (12), следующие:

$$\begin{gathered}\eta_2=\pm\xi(\eta_1,\tau): \ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}(p^{\{n\}}-s_{\eta_1\eta_1}^{\{n\}})\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}\pm\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\eta_1\eta_2}^{\{n\}}=0,\\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}s_{\eta_1\eta_2}^{\{n\}}\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}\pm\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(p^{\{n\}}+s_{\eta_1\eta_1}^{\{n\}})=0.\end{gathered} \tag{27}$$

Безразмерные параметры $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ входят только в уравнения (21) и (22). На тех или иных временных интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может меняться. От этого зависит учет или неучет слагаемых в правых частях уравнений в процессе приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра.

4. Метод асимптотического интегрирования. Воспользуемся методом асимптотического интегрирования [4–6, 12] задачи (21)–(27), заключающимся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $\upsilon_{\eta_1}^{\{n\}}$, $\upsilon_{\eta_2}^{\{n\}}$, $s_{\eta_1\eta_1}^{\{n\}}$, $s_{\eta_1\eta_2}^{\{n\}}$, $p^{\{n\}}$, где $n\geqslant 0$, в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $\eta_2=\pm\xi(\eta_1,\tau)$.

Обратимся к первому уравнению (23): $\upsilon_{\eta_2,\eta_2}^{\{0\}}=0$. Из этого уравнения следует, что $\upsilon_{\eta_2}^{\{0\}}=\upsilon_{\eta_2}^{\{0\}}(\eta_1,\tau)$, а с учетом требования антисимметричности по η_2 получаем $\upsilon_{\eta_2}^{\{0\}}=0$.

Из рекуррентной цепочки (23) при $n=1$ и из первого уравнения (25) имеем

$$\upsilon_{\eta_1,\eta_1}^{\{0\}}+\upsilon_{\eta_2,\eta_2}^{\{1\}}=0, \quad s_{\eta_1\eta_1}^{\{0\}}\upsilon_{\eta_1,\eta_2}^{\{0\}}=0, \tag{28}$$

а с учетом нечетности $\upsilon_{\eta_2}^{\{1\}}$ по η_2

$$\upsilon_{\eta_1}^{\{0\}}=\upsilon_{\eta_1}^{\{0\}}(\eta_1,\tau), \quad \upsilon_{\eta_2}^{\{1\}}=-\upsilon_{\eta_1,\eta_1}^{\{0\}}(\eta_1,\tau)\eta_2.$$

Уравнения (28) выполняются для любой нечетной по η_1 функции $\upsilon_{\eta_1}^{\{0\}}(\eta_1,\tau)$, удовлетворяющей граничным условиям (26). Предположим, что

$$\upsilon_{\eta_1}^{\{0\}}=\eta_1, \quad \upsilon_{\eta_2}^{\{1\}}=-\eta_2. \tag{29}$$

В таком случае главные по α компоненты вектора скорости совпадают с компонентами (13) в квазистатике. Линейные зависимости (29) имеют место для любых соотношений порядков малости по α

параметров $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$. Рассмотрев первое уравнение в (24) и уравнение из (25) при $n = 1$, выпишем незамкнутую систему уравнений относительно $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}$, $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}$, $v^{\{1\}}_{\eta_1}$:

$$(s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1})^2 + (s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2})^2 = 1, \quad s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1} v^{\{1\}}_{\eta_1,\eta_2} = 2s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}. \tag{30}$$

Для замыкания системы (30) необходимо рассмотреть конкретный режим растяжения. Из (21) и (22) следует, что на временных интервалах, где одновременно $\varepsilon_1\alpha^2 = o(1)$ и $\varepsilon_2 = o(1)$, после приравнивания к нулю коэффициентов при α^0 в (21) с учетом (29) будем иметь следующую систему уравнений:

$$(s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1})^2 + (s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2})^2 = 1, \quad s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1} v^{\{1\}}_{\eta_1,\eta_2} = 2s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}, \quad s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2,\eta_2} = 0.$$

Из последнего уравнения видно, что $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2} = s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}(\eta_1, \tau)$, а с учетом требования нечетности $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}$ по η_2 получаем

$$s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2} = 0, \quad s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1} = 1.$$

Таким образом, пришли к напряженному состоянию, соответствующему квазистатическому растяжению листа с горизонтальной границей. Также приравнивая коэффициенты при α^0, из (22) заключаем, что $p^{\{0\}}_{,\eta_2} + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1,\eta_2} = 0$.

Итак, динамические эффекты начинают играть роль, внося вклад в напряженно-деформированное состояние, сопоставимый с квазистатикой, если выполняется хотя бы одно из требований: а) параметр ε_1 порядка α^n, $n \geqslant -2$; б) параметр ε_2 порядка α^m, $m \geqslant 0$.

Остановимся в настоящей работе на случае, когда $\varepsilon_2 = O(1)$ и $\varepsilon_1 = o(\alpha^{-2})$. Рассмотрев коэффициенты при α^0 в (21) и (22) и добавив полученные уравнения к (30), придем к замкнутой системе относительно $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}$, $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}$, $v^{\{1\}}_{\eta_1}$:

$$s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2,\eta_2} = \varepsilon_2\eta_1, \quad p^{\{0\}}_{,\eta_2} + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1,\eta_2} = 0. \tag{31}$$

Первое уравнение в (31) замыкает систему, а второе служит для определения давления $p^{\{0\}}$. Решение системы (31) следующее:

$$s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2} = \varepsilon_2\eta_1\eta_2, \quad s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1} = \sqrt{1 - \varepsilon_2^2\eta_1^2\eta_2^2}, \tag{32}$$

$$v^{\{1\}}_{\eta_1} = -2\frac{\sqrt{1 - \varepsilon_2^2\eta_1^2\eta_2^2}}{\varepsilon_2\eta_1} + f(\eta_1, \tau),$$

где функция $f(\eta_1, \tau)$ определяется из последующих по α приближений. Заметим, что если формально устремить $\varepsilon_2 \to 0$, то компоненты девиатора (32) будут стремиться к квазистатическому решению.

Вид функции $v^{\{1\}}_{\eta_1}$ позволяет сделать следующие выводы.

1) Точно однородным граничным условиям на торцах листа $\eta_1 = \pm 1$ удовлетворить не удается.

2) Когда $|\eta_1| \to 0$, т.е. при стремлении к середине листа, $|v^{\{1\}}_{\eta_1}| \to \infty$. Это говорит о потере асимптотичности в смысле Пуанкаре вблизи точки $\eta_1 = 0$ ряда (16) для продольной скорости v_1.

Из этих выводов следует, что использование асимптотических рядов (16) вблизи торцов $\eta_1 = \pm 1$ листа и в середине $\eta_1 = 0$ неправомерно. По своей геометрии область неприменимости асимптотического разложения напоминает задачу Прандтля [4, 5].

5. Уравнение для определения формы границы листа. Обратимся к граничным условиям (27) на неизвестной границе сечения $\eta_2 = \pm\xi(\eta_1, \tau)$. Порядок малости по α производной $\dfrac{\partial \xi}{\partial \eta_1}$ заранее неизвестен. Предположим сначала, что $\dfrac{\partial \xi}{\partial \eta_1} \sim 1$, т.е. $\dfrac{\partial h}{\partial x_1} \sim \alpha$. Тогда в главном по α приближении

$$\eta_2 = \xi(\eta_1, \tau): \quad p^{\{0\}} + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1} = 0, \quad s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2} = 0.$$

Но согласно (32) компонента $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}$ равна нулю только при $\xi = 0$ или при $\eta_1 = 0$. Ни одно из этих уравнений форму границы описывать не может, что говорит о неправомерности предположения $\dfrac{\partial \xi}{\partial \eta_1} \sim 1$.

Пусть $\dfrac{\partial \xi}{\partial \eta_1} \sim \dfrac{1}{\alpha}$, т.е. $\dfrac{\partial h}{\partial x_1} \sim 1$. Тогда в главном по α приближении условия (27) имеют вид

$$\eta_2 = \pm\xi(\eta_1,\tau): \quad \alpha s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} \pm (p^{\{0\}} + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}) = 0, \quad \alpha\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1}(p^{\{0\}} - s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}) \pm s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2} = 0. \tag{33}$$

Будем рассматривать только верхнюю часть границы $\eta_2 = \pm\xi(\eta_1,\tau)$, так как нижняя часть получается отражением относительно оси η_1, поэтому в уравнениях (33) оставим только знак "+". Исключая $p^{\{0\}}$ из равенств (33) и подставляя в полученное выражение из (32) компоненты девиатора напряжений, запишем нелинейное уравнение первого порядка для определения функции $\xi(\eta_1,\tau)$:

$$2\alpha\sqrt{1-\varepsilon_2^2\eta_1^2\xi^2}\,\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1} = \varepsilon_2\eta_1\xi\left(1-\alpha^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1}\right)^2\right). \tag{34}$$

Необходимо учесть также интегральное условие нормировки (17). Частную производную можно заменить на обыкновенную, так как время в уравнение входит как параметр через известную функцию ε_2 (15).

Для приближенного интегрирования уравнения заметим, что если положить $\varepsilon_2 = 0$, то с учетом (17) будем иметь $\xi \equiv 1$, что соответствует горизонтальной боковой границе в квазистатическом решении. Представив функцию $\xi(\eta_1,\tau)$ в виде ряда по ε_2:

$$\xi(\eta_1,\tau) = 1 + \varepsilon_2\xi_1 + \varepsilon_2^2\xi_2 + \ldots\,, \quad \varepsilon_2 < 1,$$

подставим ее в (34) и в интегральное условие (17). В линейном приближении по ε_2 для ξ_1 получим уравнение $\dfrac{d\xi_1}{d\eta_1} = \dfrac{\eta_1}{2\alpha}$, откуда после интегрирования и нормировки следует параболическая зависимость

$$\xi = 1 + \frac{\varepsilon_2}{4\alpha}\left(\eta_1^2 - \frac{1}{3}\right), \tag{35}$$

моделирующая утончение сечения в середине листа и утолщение вблизи его концов, т.е. шейкообразование при динамическом растяжении.

Найдем последний из неопределенных коэффициентов главного по α приближения (16) — давление $p^{\{0\}}$. Из второго уравнения (31) следует, что $p^{\{0\}} + s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}$ не зависит от η_2, а из первого граничного условия (33), что эта же комбинация на границе равна $-\alpha s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}\dfrac{\partial \xi}{\partial \eta_1}$. Следовательно, всюду в области Ω_τ получаем уравнение

$$p^{\{0\}} = -s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1} - \alpha s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1}\bigg|_{\eta_2=\xi} = -\sqrt{1-\varepsilon_2^2\eta_1^2\eta_2^2} - \alpha\varepsilon_2\eta_1\xi\frac{\partial \xi}{\partial \eta_1}, \tag{36}$$

в которое из (32) подставлены компоненты $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_1}$, $s^{\{0\}}_{\eta_1\eta_2}$ девиатора напряжений. В (36) входит функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (34). В качестве ее приближенного значения может быть использована аппроксимация квадратичным трехчленом (35).

Вернемся к размерным переменным, зависящим от x_1, x_2, t:

$$v_1 = \frac{Vx_1}{l} - \frac{2V\tau_s}{\rho\dot{V}x_1}\sqrt{1-\frac{\rho^2\dot{V}^2x_1^2x_2^2}{\tau_s^2l^2}} + Vf(x_1,t)\frac{h^*}{l} + O((h^*/l)^2),$$

$$v_2 = -\frac{Vx_2}{l} + O((h^*/l)^2),$$

$$s_{11} = \tau_s\sqrt{1-\frac{\rho^2\dot{V}^2x_1^2x_2^2}{\tau_s^2l^2}} + O(h^*/l), \quad s_{12} = \frac{\rho\dot{V}x_1x_2}{l} + O(h^*/l).$$

Аппроксимируем границу $h(x_1,t)$ квадратичным трехчленом:

$$h(t,x_1) = h^*\left(1 + \frac{\rho\dot{V}l}{4\tau_s}\left(\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{1}{3}\right)\right), \quad \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\rho\dot{V}h^*x_1}{2\tau_s l}. \tag{37}$$

Используя вместо h и $\partial h/\partial x_1$ их выражения из (37), можем выписать давление p:

$$p = -\tau_s\sqrt{1 - \frac{\rho^2\dot{V}^2x_1^2x_2^2}{\tau_s^2l^2}} - \frac{\rho\dot{V}x_1}{l}h\frac{\partial h}{\partial x_1} + O(h^*/l).$$

Таким образом, в настоящей работе установлено, что переход от квазистатики к динамическому режиму растяжения листа, характеризующийся достижением ускорения $\dot{V}$ своих критических значений, влечет образование и рост шейки в средней части листа. Найдены параметры напряженно-деформированного состояния и других инерционных эффектов точно или приближенно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Труды. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009.
2. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001.
3. *Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашов С.И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985.
4. *Георгиевский Д.В.* Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2009. № 1. 83–89.
5. *Georgievskii D.V., Müller W.H., Abali B.E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // Z. Angew. Math. und Mech. 2019. **99**, N 12. 1–11.
6. *Георгиевский Д.В.* Динамические режимы растяжения стержня из идеально жесткопластического материала // Прикл. механ. и техн. физ. 2021. **62**, № 5. 119–130.
7. *Баженов В.Г., Осетров С.Л., Осетров Д.Л.* Анализ закономерностей растяжения упругопластических образцов и образования шейки с учетом краевых эффектов // Прикл. механ. и техн. физ. 2018. **59**, № 4. 133–140.
8. *Осинцев А.В., Плотников А.С., Морозов Е.М., Лубкова Е.Ю.* К вопросу о месте образования шейки при растяжении цилиндрических образцов // Письма о материалах. 2017. **7**, № 3. 260–265.
9. *Shahbeyk S., Rahiminejad D., Petrinic N.* Local solution of the stress and strain fields in the necking section of cylindrical bars under uniaxial tension // Europ. J. Mech. A/Solids. 2010. **29**, N 2. 230–241.
10. *Marvi-Mashhadi M., Rodriguez-Martinez J.A.* Multiple necking patterns in elasto-plastic rings subjected to rapid radial expansion: The effect of random distributions of geometric imperfections // Int. J. Impact Engng. 2020. **144**. 103661.
11. *El Maï S., Mercier S., Petit J., Molinari A.* An extension of the linear stability analysis for the prediction of multiple necking during dynamic extension of round bar // Int. J. Solids and Struct. 2014. **51**, N 21–22. 3491–3507.
12. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984 (*Nayfeh A.H.* Introduction To Perturbation Techniques. N.Y.: Wiley, 1981).

Поступила в редакцию
08.07.2022