

УДК 531.396

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СФЕРИЧЕСКОГО РОБОТА В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ ПРИ ПОМОЩИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Н. В. Нор¹

Рассматривается плоская модель сферического робота, внутри которого расположена платформа с одним колесом. Для данного робота выводятся уравнения движения и оговариваются предположения, при которых они будут выведены. Строится управление с помощью многослойной нейронной сети.

Ключевые слова: управление, сферический робот, многослойная нейронная сеть.

A plane model of a spherical robot containing a platform with a wheel is considered. Dynamic equations are derived for this robot and some assumptions concerning these equations are also discussed. A control is proposed using a multilayer neural network.

Key words: control, spherical robot, deep neural network.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2022-6-46-51

1. Введение. Прежде чем приступить к построению управления для сферического робота [1, 2], представим его реальную модель (рис. 1, *а*). Внутри сферической оболочки находится платформа, соединенная с колесом. На платформе расположены инерциальные датчики, мотор, который может поворачивать колесо вокруг его вертикальной оси, и мотор на колесе, поворачивающий последнее относительно оси, перпендикулярной плоскости колеса.

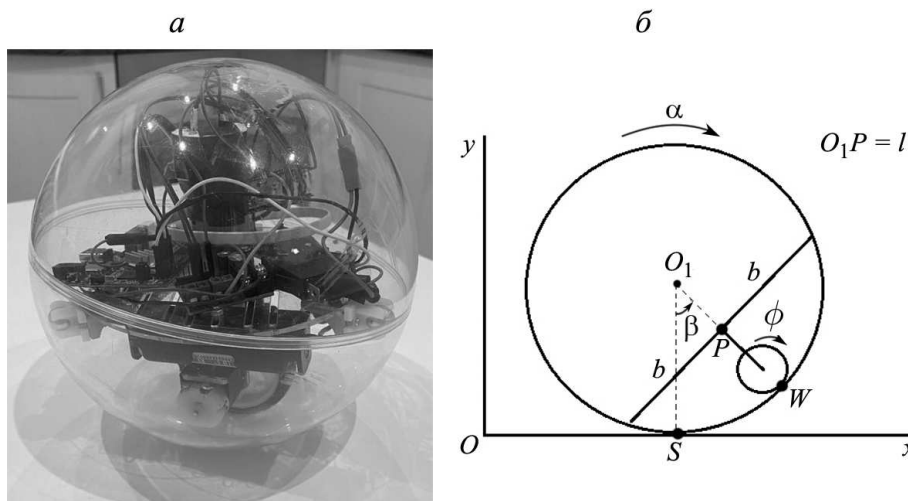


Рис. 1. Фотография робота (*а*) и плоская модель (*б*)

Ввиду сложности трехмерной модели для описания ее динамическими уравнениями было принято решение рассмотреть движение робота в плоскости, соответствующая плоская модель показана на рис. 1, *б*, где b — радиус платформы, точка O_1 — центр сферической оболочки, W — точка контакта колеса и сферической оболочки, S — точка контакта оболочки с поверхностью, P — точка крепления вилки колеса к платформе робота, Oxy — неподвижная система координат, относительно которой происходит движение. Координаты, однозначно задающие положение робота: x — координата точки O_1 , α — угол поворота оболочки, β — угол поворота платформы, ϕ — угол поворота колеса. Вектор из обобщенных координат обозначим через $\mathbf{q} = (x, \alpha, \beta, \phi)$. Будем считать, что оболочка катится по плоскости без проскальзывания, что эквивалентно тому, что скорость точки контакта сферической оболочки с плоскостью равна нулю: $v_s = 0$, и колесо движется внутри сферы по

¹ Нор Никита Вячеславович — асп. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: nor.nikit@yandex.ru.

Nor Nikita Vyacheslavovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

сферической оболочке без проскальзывания, что также эквивалентно тому, что $v_{W \in \text{кол.}} = v_{W \in \text{сф.}}$. Платформа внутри сферы движется без трения. Условия непроскальзывания можно отразить в виде системы неголономных связей

$$\begin{cases} \dot{x} - R\dot{\alpha} = 0, \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} - \frac{r}{R}\dot{\phi} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, что неголономные связи системы (1) интегрируемы. Поэтому для описания движения робота будем использовать динамические уравнения Рауса с неопределенными множителями [3]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + B^T \boldsymbol{\lambda},$$

где

$$T = \frac{(m_s + m_p + m_k)}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_s R^2 \dot{\alpha}^2 + (ml + (R - r)m_k) \cos \beta \dot{x} \dot{\beta} + J_\beta \dot{\beta}^2 + J_\phi (\dot{\beta} - \dot{\phi})^2$$

— кинетическая энергия, $B = \begin{pmatrix} 1 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{r}{R} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\mathbf{Q} = (0, 0, -dg \sin \beta + u(t), -u(t))^T$ — вектор обобщенных сил.

Выпишем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + d \cos \beta \ddot{\beta} - d \sin \beta \dot{\beta}^2 = \lambda_1, \\ m_s R \ddot{\alpha} = -\lambda_1 + \lambda_2, \\ 2J_\beta \ddot{\beta} + 2J_\phi (\ddot{\beta} - \ddot{\phi}) + d \cos \beta \ddot{x} = -dg \sin \beta + R\lambda_2 + u(t), \\ 2J_\phi (\ddot{\phi} - \ddot{\beta}) = -r\lambda_2 - u(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $m_s = 0.137$ кг; $m_p = 0.65$ кг; $m_k = 0.05$ кг — масса сферической оболочки, платформы и колеса соответственно; $R = 0.081$ м, $r = 0.026$ м — радиусы сферы и колеса; $l = 0.01$ м — расстояние от центра сферы до платформы; $M = m_s + m_p + m_k$; $d = m_p l + (R - r)m_k$; $b = \sqrt{R^2 - l^2}$ — радиус платформы; $J_\beta = \frac{mb^2}{6} + \frac{m_k(R-r)^2}{2} + \frac{ml^2}{2}$, $J_\phi = \frac{m_k r^2}{4}$ — момент инерции платформы и колеса; λ_1, λ_2 — множители Лагранжа; $u(t)$ — момент (Н · м), подаваемый на колесо робота, — искомое управление.

Разрешив нашу систему (1) и (2) относительно старших производных, в результате будем иметь

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \omega, \\ \dot{\omega} = \frac{-d \sin \beta (g(2J_\phi + r^2(m_s + M)) + (2J_\phi(R-r) + dr^2 \cos \beta)\omega^2)}{\det(\beta)} + \frac{r((R-r)(m_s + M) - d \cos(\beta))u(t)}{\det(\beta)}, \\ \dot{\phi} = \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{d \sin \beta (-g(2J_\phi + rR(m_s + M)) - dr \cos \beta) + (2J_\beta r - 2J_\phi(r+R) - drR \cos \beta)\omega^2}{\det(\beta)} + \\ + \frac{(2J_\beta - 4J_\phi + (R-r)R(m_s + M) + d(r-2R) \cos \beta)u(t)}{\det(\beta)}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\det(\beta) = J_\beta(2J_\phi + r^2(m_s + M)) - 2J_\phi(4J_\phi + (r^2 + 2rR - R^2)(m_s + M)) + 4dJ_\phi(r - R) \cos \beta - d^2r^2 \cos^2 \beta$. Из системы (3) следует, что независимых координат в системе две — это β, ϕ , а x и α находятся путем интегрирования по времени системы уравнений (1) для связей.

2. Построение алгоритма управления с помощью нейронной сети. Основная цель работы — построение управления таким образом, чтобы робот двигался по заданной заранее траектории. Если рассматривать плоский случай, то координата центра сферической оболочки $x(t)$ должна изменяться по требуемому закону движения $x^d(t)$. Для построения управления [4–7] будем использовать многослойную нейронную сеть, на вход которой подается некоторый вектор, какой именно, будет оговорено позже, а на выходе будет управление $u(t)$. Поскольку управление в действительности дискретное, то будем обозначать его через u_i , где i — дискретный момент времени.

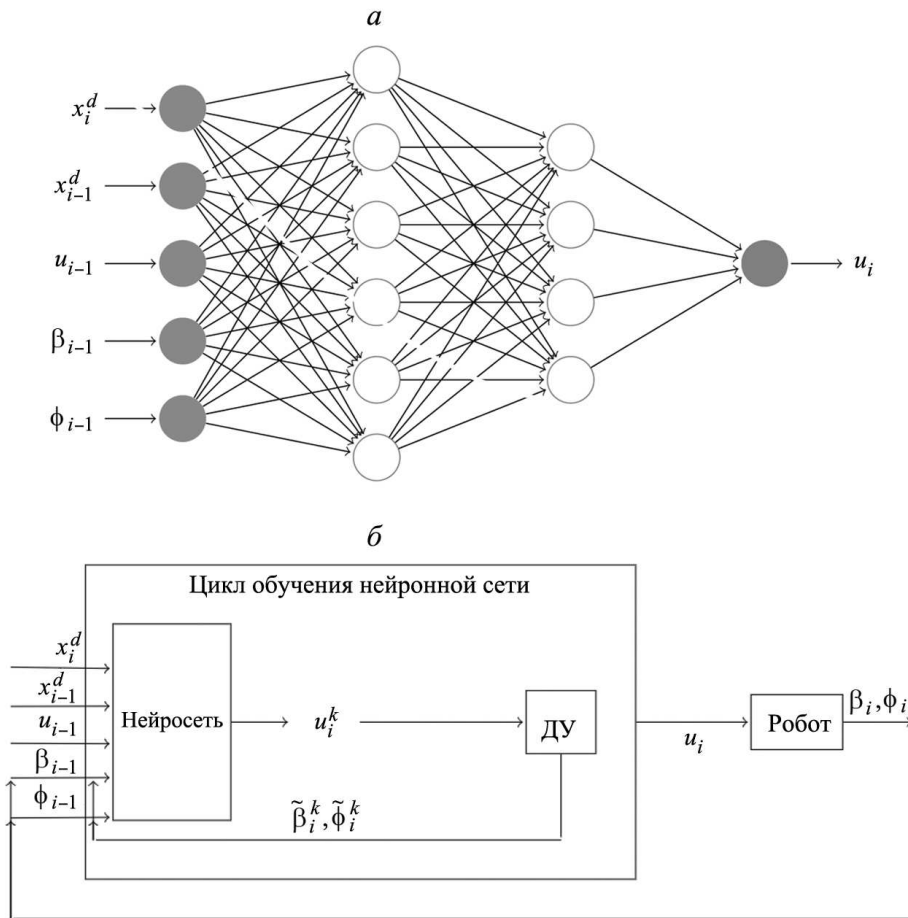


Рис. 2. Нейронная сеть (а) и контур управления (б): $k = 0 \dots n - 1$, n — количество итераций в одном цикле обучения нейронной сети

Одним из входов должна быть желаемая координата x_i^d , в которую мы хотим перевести робота. Другой вход — желаемая координата с предыдущего шага x_{i-1}^d , третий — предыдущее управление u_{i-1} , четвертый — угол отклонения платформы от вертикали β_{i-1} , пятый — угол поворота колеса ϕ_{i-1} . Нейронная сеть изображена схематично на рис. 2, а. Число слоев между ними может быть любым, и их количество подбирается экспериментально. В качестве функции активации был взят обратный квадратный корень $\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$ при $k = 0.0001$. Весь контур управления схематически изображен на рис. 2, б.

Для реализации нейронной сети необходимо знать, какому функционалу будет доставляться минимум. Когда робот движется с ненулевой скоростью, минимизируем квадратичную ошибку:

$$J_i = \frac{1}{2} (x_i - x_i^d)^2 \rightarrow \min, \quad \text{где } v_i \neq 0. \tag{4}$$

В случае, когда робот остановится, функционал качества следующий:

$$J_i = |\beta_i| \rightarrow \min, \quad \text{где } v_i = 0. \tag{5}$$

Выбор функционала (5) мотивирован тем, что в момент времени, когда скорость робота становится нулевой, угол отклонения платформы, вообще говоря, будет ненулевым, вследствие чего могут возникать свободные колебания. Поэтому, чтобы робот полностью покоился, необходимо “погасить” эти колебания с помощью управления.

Коэффициенты сети будут корректироваться при помощи градиентного спуска:

$$\Theta_{pj}^{(l)} \leftarrow \Theta_{pj}^{(l)} + \kappa \frac{\partial J_i}{\partial \Theta_{pj}^{(l)}}, \quad l = 0, \dots, L - 2, \tag{6}$$

где Θ_{pj}^l — значение p -го веса нейронной сети от j -го нейрона на l -м слое, κ — скорость обучения, L — количество слоев в нейронной сети.

Для того чтобы реализовать градиентный спуск (6), следует определить вид формулы для градиента. Поскольку все происходит в дискретном времени, постараемся получить общую формулу для координаты x_i . Подставим в систему дифференциальных уравнений (1), (3) все значения постоянных параметров и разрешим ее относительно старших производных. В дискретном времени она запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + (0.026\theta_i - 0.081\omega_i) \cdot \Delta t, \\ \alpha_i = \alpha_{i-1} + (0.32\phi_i - \beta_i) \cdot \Delta t, \\ \beta_i = \beta_{i-1} + \omega_i \cdot \Delta t, \\ \omega_i = \omega_{i-1} + \frac{1059.5 \sin \beta_{i-1} + (-24080.5 + 4158 \cos \beta_{i-1})u_i + (0.15 \sin \beta + 0.5 \sin 2\beta)\omega_{i-1}^2}{-19.34 + 0.3 \cos \beta_{i-1} + \cos^2 \beta_{i-1}} \cdot \Delta t, \\ \phi_i = \phi_{i-1} + \theta_i \cdot \Delta t, \\ \theta_i = \theta_{i-1} + \frac{3244.6 \sin \beta_{i-1} - 188.65 \sin 2\beta_{i-1} + (-102377 + 21749.6 \cos \beta_{i-1})u_i + (-6.43 \sin \beta_{i-1} + 1.56 \sin 2\beta_{i-1})\omega_{i-1}^2}{(-19.34 + 0.3 \cos \beta_{i-1} + \cos^2 \beta_{i-1})} \cdot \Delta t, \end{cases} \quad (7)$$

где Δt — приращение времени.

Как видно из системы (7), можно получить итерационную формулу для координаты x_i . Она будет иметь следующий вид:

$$x_i = \tilde{x}_{i-1} + k_u(\beta_i, \beta_{i-1})u_i(\Theta_{kj}^l),$$

где через \tilde{x}_{i-1} обозначены все члены, которые получились в процессе выражения x_i из системы (7) и которые не зависят от весов нейронной сети; через k_u обозначен коэффициент, стоящий перед управлением и зависящий от угла поворота платформы:

$$k_u = \frac{711.28 - 228.69 \cos \beta_{i-1}}{19.34 - 0.3 \cos \beta_{i-1} - \cos^2 \beta_{i-1}} \Delta t^2.$$

Теперь можно выписать общую формулу для частных производных функционала (4) по Θ_{mj}^l для l -го слоя. Начнем с самого последнего слоя нейронной сети, где мы имеем управление

$$\frac{\partial J}{\partial \Theta_{mj}^l} = -(x_i - x_i^d) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \Theta_{mj}^l} = -k_u(x_i - x_i^d) \frac{\partial u_i}{\partial \Theta_{mj}^l}.$$

Распишем подробнее последний множитель:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \Theta_{mj}^l} = \frac{\partial \left(g \left(\Theta_{11}^{(l)} a_1^{l-1} + \Theta_{12}^{(l)} a_2^{l-1} + \dots + \Theta_{1n}^{(l)} a_n^{l-1} \right) \right)}{\partial \left(\Theta_{11}^{(l)} \Theta_{12}^{(l)} \dots \Theta_{1n}^{(l)} \right)} = \left(g'_{\Theta_{11}^{(l)}} a_1^{l-1} \dots g'_{\Theta_{1n}^{(l)}} a_n^{l-1} \right).$$

Также стоит отметить, что производные $g'_{\Theta_{11}^{(l)}} = \dots = g'_{\Theta_{1n}^{(l)}} = g'_1$. Поэтому итоговая формула для последнего слоя будет иметь вид

$$\frac{\partial J}{\partial \Theta_{ij}^l} = -k_u (x_i - x_i^d) g'_{1l} \left(\Theta_{11}^{(l)} a_1^{l-1} \dots \Theta_{1n}^{(l)} a_n^{l-1} \right).$$

По индукции и следуя правилу дифференцирования сложной функции, можем получить общую формулу для вычисления частных производных по Θ_{ij}^{l-k} для произвольного слоя, где $1 \leq k \leq l - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Theta_{mj}^{(l-k)}} &= g'_1 \times \left(\Theta_{11}^{(l)} \dots \Theta_{1n}^{(l)} \right) \times \begin{pmatrix} g'_{1(l-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g'_{2(l-1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g'_{n_l(l-1)} \end{pmatrix} \times \left(\Theta_{mj}^{(l-1)} \right) \times \dots \\ &\dots \times \begin{pmatrix} g'_{\Theta_{11}^{(l-k)}} a_1^{l-k-1} \dots g'_{\Theta_{1m_{n-k}}^{(l-k)}} a_m^{l-k-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g'_{\Theta_{n_1}^{(l-k)}} a_1^{l-k-1} \dots g'_{\Theta_{n_{l-k} m_{n-k}}^{(l-k)}} a_n^{l-k-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

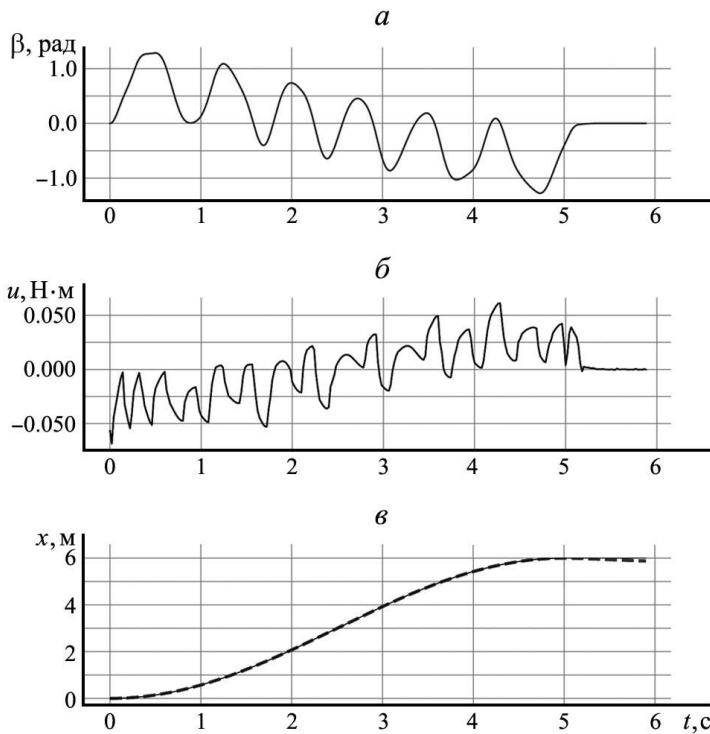


Рис. 3. Результаты моделирования для закона (8): *a* — угол отклонения платформы, *б* — управление, построенное при помощи нейронной сети; *в* — требуемый $x^d(t)$ (сплошная линия) и полученный $x(t)$ (пунктирная линия) законы движения, $d(x, x^d) \approx 0.658$ м

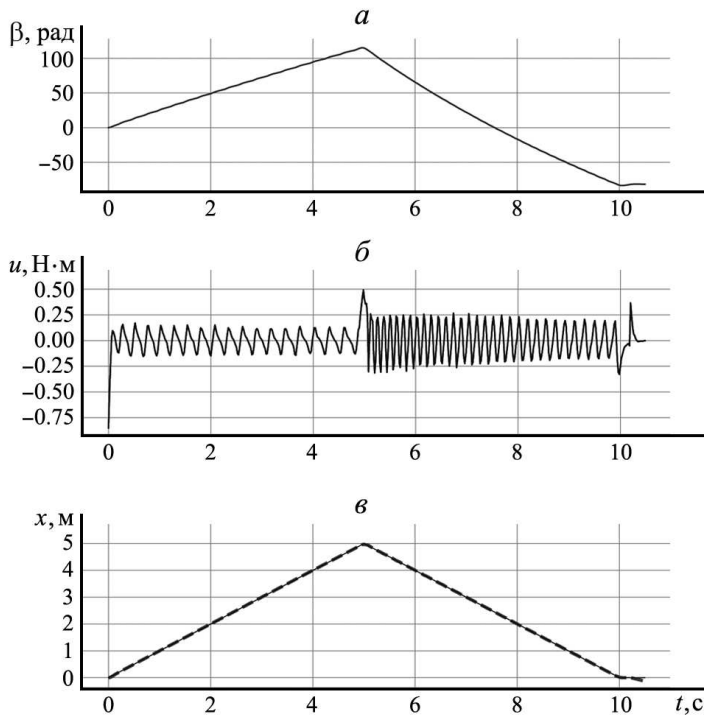


Рис. 4. Результаты моделирования для закона (9): *a* — угол отклонения платформы; *б* — управление, построенное при помощи нейронной сети; *в* — требуемый $x^d(t)$ (сплошная линия) и полученный $x(t)$ (пунктирная линия) законы движения, $d(x, x^d) \approx 0.372$ м

Аналогично получают выражения для производных, если в качестве функционала рассматривать (5) или любой другой функционал.

3. Результаты моделирования управления с помощью нейронной сети. Теперь можно перейти непосредственно к построению управления с помощью нейронной сети для плоской модели робота. Зададим несколько разных по характеру движений программных траекторий (законов движения). В качестве сравнения полученного закона движения с требуемым будем использовать L_2 -норму $d(x, x^d) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^d)^2}$.

По закону движения

$$x^d(t) = \begin{cases} 6 \sin^2(\frac{\pi}{10}t) & \text{при } 0 \leq t \leq 5, \\ 6 & \text{при } 5 < t \leq 6 \end{cases} \quad (8)$$

робот движется с ускорением, затем должен остановиться при $t = 5$ с. Результаты моделирования для траектории (8) приведены на рис. 3.

Зададим другой характер движения, где робот движется с постоянной скоростью, затем изменяет ее скачком, а потом в конце движения останавливается:

$$x^d(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t < 5, \\ -t + 10 & \text{при } 5 \leq t < 10, \\ 0 & \text{при } 10 \leq t < 10.6. \end{cases} \quad (9)$$

Результаты моделирования для траектории (9) приведены на рис. 4.

4. Выводы. Наша задача состояла в построении для плоской модели данного робота нейросетевого управления, чтобы в дальнейшем, используя этот подход, построить управление уже для реального робота.

Из результатов численного моделирования видно, что предложенный подход с использованием нейронной сети дает хороший результат в построении управления для отслеживания требуемого закона движения: для закона (8) $d(x, x^d) \approx 0.658$ м, для закона (9) $d(x, x^d) \approx 0.372$ м. Также на рис. 3, 4 видны скачки на графиках управления в моменты времени, когда начинается движение и когда оно меняет свой характер, например 5-я секунда на рис. 3, б или пятая секунда на рис. 4, б. Это связано с тем,

что в эти моменты времени градиент функционала (4) или (5) сильно возрастает, вследствие чего нейронная сеть начинает значительно менять свои весовые коэффициенты, а следовательно, и управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Караваяев Ю.Л., Килин А.А.* Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой // Нелинейная динам. 2015. **11**, № 1. 187–204.
2. *Иванов А.П.* Об управлении роботом-шаром при помощи двух омниколес // Нелинейная динам. 2015. **11**, № 2. 319–327.
3. *Вильке В.Г.* Теоретическая механика: Учеб. 3-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань, 2003.
4. *Бураков М.В., Шишляков В.Ф., Коновалов А.С.* Адаптивный нейросетевой пропорционально-интегрально-дифференцирующий регулятор // Вопросы радиоэлектроники. 2018. № 10. 86–92.
5. *Cai Yao, Zhan Qiang, Xi Xi.* Neural network control for the linear motion of a spherical mobile Robot // Int. J. Adv. Robotic Systems. 2011. **8**, N 4 (DOI:10.5772/45711).
6. *Hernandez-Alvarado R., Garcia-Valdovinos L.G., Salgado-Jimenez T., Gomez-Espinosa A., Fonseca-Navarro F.* Neural network-based self-tuning PID control for underwater vehicles // Sensors. 2016. **16**, N 9.
7. *Marino A., Neri F.* PID tuning with neural networks // Intelligent Information and Database Systems. Springer, 2019. 476–487.

Поступила в редакцию
01.06.2022

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ЛИСТА ИЗ ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

И. М. Цветков¹

Исследуется напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородного листа из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса–Генки. Боковая граница свободна от напряжений, на торцах заданы продольные скорости. Учитывается возможность утолщения либо утончения сечения по длине листа, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Выявлены два характерных режима растяжения — один связан с достаточно большой скоростью удаления концов листа друг от друга, другой — с ускорением. Во втором случае проведен анализ с использованием метода асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно найти параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: идеальная пластичность, предел текучести, лист, растяжение, шейка, квазистатика, динамика, скорость деформации, напряжение, асимптотические разложения.

The stress-strain state arising under dynamic stretching of a homogeneous sheet of an incompressible ideally rigid–plastic material, which obeys the Mises–Hencky criterion, is studied. The lateral boundary is stress-free and the longitudinal velocities are given at the ends. The possibility of thickening or thinning of the section along the length of the sheet is taken into account, which simulates necking and further development of the neck. Two characteristic stretching regimes are revealed: one of them depends on the velocity at which the end sections move away from each other and the other one depends on their acceleration. For the second regime, the asymptotic integration-based analysis allows one to find the stress–strain state parameters approximately.

¹ *Цветков Иван Максимович* — асп. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: cvetkoviv@yandex.ru.
Tsvetkov Ivan Maksimovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Elasticity Theory.