

С учетом соотношений (18) и (21) запишем

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + m_{k-1}\pi + A_{k-1} + \frac{\mu x_{k-1}}{2}(A_{k-1} - \frac{1}{2}(\sin(2\varphi_{k-1} + A_{k-1})) - \sin 2\varphi_{k-1}) + O((\mu x_{k-1})^2). \quad (22)$$

Суммируя (21) по k от 1 до n , получим

$$\varphi_n = \varphi_0 + \sum_{k=1}^n (m_{k-1}\pi + A_{k-1} + \frac{\mu x_{k-1}}{2}(A_{k-1} - \frac{1}{2}(\sin(2\varphi_{k-1} + A_{k-1})) - \sin 2\varphi_{k-1})) + O((\mu x_{k-1})^2). \quad (23)$$

Формулы (22), (23) отличаются от соответствующих формул (7) и (8) дополнительными членами, кратными π , и заменой θ на A_{k-1} . Поэтому, используя тот же подход, что и в предыдущем случае, можно доказать существование стационарного распределения для $u_k(\omega)$ и справедливость равенств типа (13), (14) для тригонометрических функций в правой части соотношения (9). Применяв в этом случае усиленный закон больших чисел к правой части соотношения (6), можем записать

$$r_n^2 = r_0^2 \exp \left(n \left(\frac{\mu^2 \sigma^2}{16} \left(1 - \frac{M(x^2 \cos 2A(x))}{\sigma^2} \right) + O((\mu x)^3) + h(n) \right) \right), \quad (24)$$

где $h(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

3. Формулы (17) и (24) показывают, что независимо от значения θ фазовая точка на плоскости (y, z) начиная с некоторого момента времени с вероятностью единица монотонно удаляется от начала координат.

Это означает, что если начальные условия какой-либо моды колебаний жидкости (при любых значениях n и m , см. п. 1) отличны от равновесных, то в рамках линейной теории амплитуда колебаний этой моды с вероятностью единица будет неограниченно расти, т.е. равновесие жидкости при случайной вибрации указанного вида будет неустойчиво с вероятностью единица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Муссеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966.
2. *Doob J.L.* Stochastic Processes. N.Y.: J. Wiley; London: Chapman and Hall, 1953 (*Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956).
3. *Dwight H.V.* Tables of Integrals and Other Mathematical Data. N.Y.: Macmillan, 1961 (*Двайт Г.В.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1964).

Поступила в редакцию
30.03.2022

УДК 551.515+533.6

АТМОСФЕРНЫЙ ВИХРЬ, ВОЗБУЖДАЕМЫЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ

В. Я. Шкадов¹, А. Н. Белоглазкин²

Исследуются температурные условия, при которых оказывается возможным возникновение и саморазвитие вихревого движения в реальной атмосфере.

Ключевые слова: атмосфера, неустойчивость, тропический циклон, сила Кориолиса.

¹ *Шкадов Виктор Яковлевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. аэромеханики и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: shkadov@mech.math.msu.su.

² *Белоглазкин Александр Николаевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. аэромеханики и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bel@mech.math.msu.su.

Shkadov Victor Yakovlevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Aeromechanics and Gas Dynamics.

Beloglazkin Alexander Nikolaevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Aeromechanics and Gas Dynamics.

The temperature conditions under which the emergence and self-development of vortex motion in the real atmosphere are possible.

Key words: atmosphere, instability, tropical cyclone, Coriolis force.

DOI: 10.5959/MSU0579-9368-1-2022-6-38-45

Образование интенсивных и бурно развивающихся вихрей в приэкваториальной зоне атмосферы имеет длительную историю наблюдений. Во многих случаях эти вихри, возникающие над поверхностью океана, при перемещении в прибрежные зоны суши приносят значительные разрушения [1, 2]. Теоретические исследования таких вихрей (тайфунов, ураганов, штормов) основаны главным образом на построении полуэмпирических моделей и последующем численном моделировании [3, 4]. При этом необходимо отразить в модели наиболее возможное число наблюдательных фактов. Такие расчеты могут быть полезны при практической оценке предполагаемого развития вихря, однако они не дают ответа на вопрос о том, как первоначально в спокойной атмосфере такой вихрь возникает. Другой подход связан с рассмотрением частных решений уравнений гидродинамики, из которых можно извлечь информацию о структуре течения в вихре [5–7]. Недостаток такого подхода состоит в том, что в частных решениях не учитываются наиболее существенные процессы, характеризующие атмосферный вихрь, такие, как перенос энергии, влияние сил Кориолиса, сжимаемость среды, сильная зависимость параметров среды от высоты.

В настоящей работе исследуются условия, при которых оказывается возможным возникновение и саморазвитие вихревого движения в модели среды, соответствующей реальной атмосфере.

1. Математическая постановка. Представим уравнения осесимметричного движения тяжелого совершенного газа в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , связанной с поверхностью вращающейся Земли:

$$\begin{aligned} \frac{du^*}{dt^*} - v^* \left(l + \frac{v^*}{r^*} \right) &= -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*}, \\ \frac{dv^*}{dt^*} + u^* \left(l + \frac{v^*}{r^*} \right) &= 0, \\ \frac{dw^*}{dt^*} &= -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - g, \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial \rho^* r^* u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial \rho^* r^* w^*}{\partial z^*} \right) &= 0, \\ \frac{ds^*}{dt^*} &= 0, \quad s^* = T^* p^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad p^* = R \rho^* T^*, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w — компоненты скорости в цилиндрической системе координат; p, ρ, T, s — давление, плотность, температура и энтропия газа соответственно; g — ускорение свободного падения; γ — показатель адиабаты; R — универсальная газовая постоянная. Индекс * означает, что величина размерная, полная производная по времени вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dt^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial}{\partial z^*}.$$

Здесь принято, что плоскость $z^* = 0$ — касательная к поверхности Земли и на рассматриваемых масштабах по r^* можно считать, что эта плоскость совпадает с поверхностью Земли (влияние кривизны мало). Вращение Земли учитывается параметром Кориолиса $l = 2\omega \cos \phi$, где ω — угловая скорость вращения, ϕ — географическая широта точки $r^* = 0$, совпадающей с началом координат. Система (1) описывает адиабатические состояния идеального газа в движущейся или неподвижной атмосфере Земли.

Допустим, что термодинамическое состояние первоначально неподвижной атмосферы описывается следующими функциями вертикальной координаты z^* : $p_1^*(z^*), \rho_1^*(z^*), T_1^*(z^*), s_1^*(z^*)$.

Пусть $p_a, \rho_a, T_a, s_a, a_a$ — значения термодинамических величин в первоначально неподвижной атмосфере в точке $z^* = 0, r^* = 0$. Положим, что h, b — характерные размеры возникающего вихря

соответственно по координатам z^* и r^* . Перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} p^* &= p_a p, & \rho^* &= \rho_a \rho, & T^* &= T_a T, \\ u^* &= U u, & v^* &= U v, & w^* &= U \frac{h}{b} w, \\ t^* &= \frac{1}{l} t, & r^* &= b r, & z^* &= h z, & U &= lb. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - v \left(1 + \frac{v}{r} \right) &= -\frac{1}{M} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{dv}{dt} + u \left(1 + \frac{v}{r} \right) &= 0, \\ \left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{M} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{N}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \rho r u}{\partial r} + \frac{\partial \rho r w}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{ds}{dt} = 0, & \quad s = T p^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad p = \rho T. \end{aligned} \tag{2}$$

В систему (2) входят безразмерные параметры $M = \frac{\rho_a U^2}{p_a}$, $N = \frac{U^2}{gh}$, $\frac{h}{b}$. Здесь M , N — аналоги чисел Маха и Фруда. Для оценки значений этих параметров выберем исходные величины, характерные для условий движения газа в тропическом циклоне: $b = 600$ км, $\omega = 7.3 \cdot 10^{-5}$ 1/с, $\varphi = 20^\circ$, $l = 5 \cdot 10^{-5}$ 1/с, $h = 15$ км. Отсюда находим $M = 0.011$, $N = 0.006$, $\frac{h}{b} = 0.025$. Будем считать далее эти параметры малыми, а отношение $\frac{M}{N}$ — конечным.

Функции $p_1(z)$, $T_1(z)$, $s_1(z)$, ρ_1 , описывающие первоначальное состояние неподвижной атмосферы, удовлетворяют следующим уравнениям:

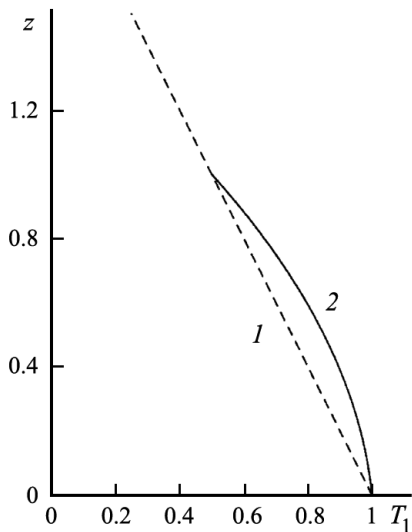


Рис. 1. Исходное изэнтропическое 1 ($\delta = 0$) и мало отличающееся от него неизэнтропическое 2 ($\delta = 0.1$) состояния атмосферы (6) для $g(z) = 4z(1 - z)$

$$\frac{dp_1}{dz} = -\frac{M}{N} \rho_1, \quad p_1 = \rho_1 T_1, \quad s_1 = T_1 p_1^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \tag{3}$$

из которых можно вывести уравнение, связывающее функции $s_1(z)$ и $T_1(z)$:

$$\frac{d \ln s_1}{dz} = \frac{1}{T_1} \left(\frac{dT_1}{dz} + q \right), \tag{4}$$

где

$$q = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{M}{N} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_a g h}{p_a} = (\gamma - 1) \frac{g h}{a_a^2}.$$

Здесь $a_a = \sqrt{\gamma p_a / \rho_a}$ — скорость звука.

Система (3) содержит, вообще говоря, произвольную функцию распределения энтропии $s_1(z)$, для вычисления которой следует рассматривать полную задачу переноса тепла, влаги, радиации и т.д. В случае изэнтропической атмосферы $s_1 = \text{const}$, и из (3), учитывая условия $T_1 = 1$, $p_1 = 1$, $\rho_1 = 1$ при $z = 0$, находим

$$T_1 = 1 - q z, \quad p_1 = \left(\frac{T_1}{s_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_1 = \frac{p_1}{T_1}. \tag{5}$$

Будем рассматривать неизэнтропические исходные состояния атмосферы, мало отличающиеся от (5), задавая распределение температуры в виде

$$T_1 = 1 - qz + \delta g(z), \tag{6}$$

где δ — малый параметр, $g(z)$ — произвольная функция порядка единицы. На рис. 1 представлен пример используемого распределения температуры $T_1(z)$. Из (4) получаем связь $g(z)$ с распределением энтропии по высоте в покоящейся атмосфере:

$$\frac{d \ln s_1}{dz} = \delta \frac{g'}{T_1}. \tag{7}$$

Исследуем теперь адиабатические движения, которые могут развиваться в неизэнтропической атмосфере при малых отклонениях от изэнтропичности, задаваемых выражением (7). Отклонения распределения температуры от изэнтропической могут быть связаны с переносом влаги, испаряющейся с теплой поверхности океана. Известно, что сухая и насыщенная влажная адиабаты характеризуются падением с высотой температуры примерно до $-1^\circ\text{C}/100$ м и $-0.5^\circ\text{C}/100$ м соответственно. В случае движущейся атмосферы положим

$$p = p_1 + p_2, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \quad T = T_1 + T_2,$$

где

$$p_2 = p_1 M \pi, \quad T_2 = T_1 N \theta.$$

Тогда из (2) получаем выражение для ρ_2

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{M \pi - N \theta}{1 + N \theta}$$

и систему уравнений для компонент скорости u, v, w , давления π , температуры θ :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - v \left(1 + \frac{v}{r} \right) &= -\frac{p_1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial r}, \\ \frac{dv}{dt} + u \left(1 + \frac{v}{r} \right) &= 0, \\ \left(\frac{h}{b} \right)^2 \frac{dw}{dt} &= -\frac{p_1}{\rho} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \theta \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \rho r u}{\partial r} + \frac{\partial \rho r w}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{d\theta}{dt} - q \frac{1 + N\theta}{1 + M\pi} \cdot \frac{d\pi}{dt} + \frac{1 + N\theta}{N} \cdot \frac{d \ln s_1}{dz} w &= 0. \end{aligned}$$

2. Линейная неустойчивость. Для движений малой амплитуды проведем линеаризацию полученной системы относительно состояния $u = 0, v = 0, w = 0, p_1, T_1, \rho_1, s_1$, учитывая лишь малые величины, следующие из неравенств $M \ll 1, N \ll 1, \frac{M}{N} \sim 1, \frac{\delta}{N} \sim 1$. Определяющая система в линейном приближении примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - v &= -\frac{p_1}{\rho_1} \frac{\partial \pi}{\partial r}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u &= 0, \\ -\frac{p_1}{\rho_1} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \theta &= 0, \\ \frac{\partial \rho_1 r u}{\partial r} + \frac{\partial \rho_1 r w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - q \frac{\partial \pi}{\partial t} + B w &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь в последнем уравнении системы (8) появляется основной внешний параметр

$$B = \frac{1}{NT_1} \left(\frac{dT_1}{dz} + q \right) = \frac{\delta}{N} \cdot \frac{g'}{T_1}.$$

Рассматривается решение (8), экспоненциально зависящее от времени:

$$(\pi, \theta, u, v, w) \rightarrow (\pi, \theta, u, v, w) \cdot \exp \sigma t,$$

где σ — коэффициент усиления возмущений. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sigma u - v &= -\frac{p_1}{\rho_1} \frac{\partial \pi}{\partial r}, \\ \sigma v + u &= 0, \\ -\frac{p_1}{\rho_1} \frac{\partial \pi}{\partial z} + \theta &= 0, \\ \frac{\partial \rho_1 r u}{\partial r} + \frac{\partial \rho_1 r w}{\partial z} &= 0 \\ \sigma(\theta - q\pi) + Bw &= 0. \end{aligned}$$

Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho_1 r u &= \sigma \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \rho_1 r v = -\sigma \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ u &= -\sigma v, \quad \theta = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\partial \pi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \pi}{\partial r} = \frac{\rho_1}{p_1} (\sigma^2 + 1) v, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\frac{1}{\sigma^2 + 1} p_1 r \frac{\partial \pi}{\partial r}, \quad B \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = p_1 \frac{\partial \pi}{\partial z} - \rho_1 q \pi. \end{aligned}$$

Для функции тока $\psi(r, z)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{B}{\sigma^2 + 1} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0, \quad (9)$$

в котором

$$-\Delta = \frac{1}{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} + q \frac{\rho_1}{p_1} = -\frac{q}{\gamma - 1} \frac{1}{T_1}.$$

Краевые условия к уравнению (9) выражают затухание скоростей движения при $r \rightarrow \infty$, отсутствие особенностей в центре вихря и ограниченность вихря по высоте двумя непроницаемыми поверхностями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right| < \infty, \quad r = 0; \\ \psi = 0, \quad r = 0, \quad r = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Методом разделения переменных $\psi(r, z) = F(z) \cdot f(r)$ из (9), (10) получаем спектральную задачу для функции $F(z)$ и краевую задачу для функции $f(r)$:

$$F'' + \Delta F' + \frac{B\lambda^2}{\sigma^2 + 1} F = 0, \quad F = 0, \quad z = 0, \quad z = 1, \quad (11)$$

$$r \left(\frac{1}{r} f' \right)' - \lambda^2 f = 0, \quad |f(0)| < \infty, \quad f \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Спектральная задача (11) может быть решена только численными методами. Представим ее в виде

$$F'' + \Delta F' + \mu \frac{g'}{T_1} F = 0, \quad \mu = \frac{\delta \lambda^2}{N(\sigma^2 + 1)}, \tag{13}$$

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 0.$$

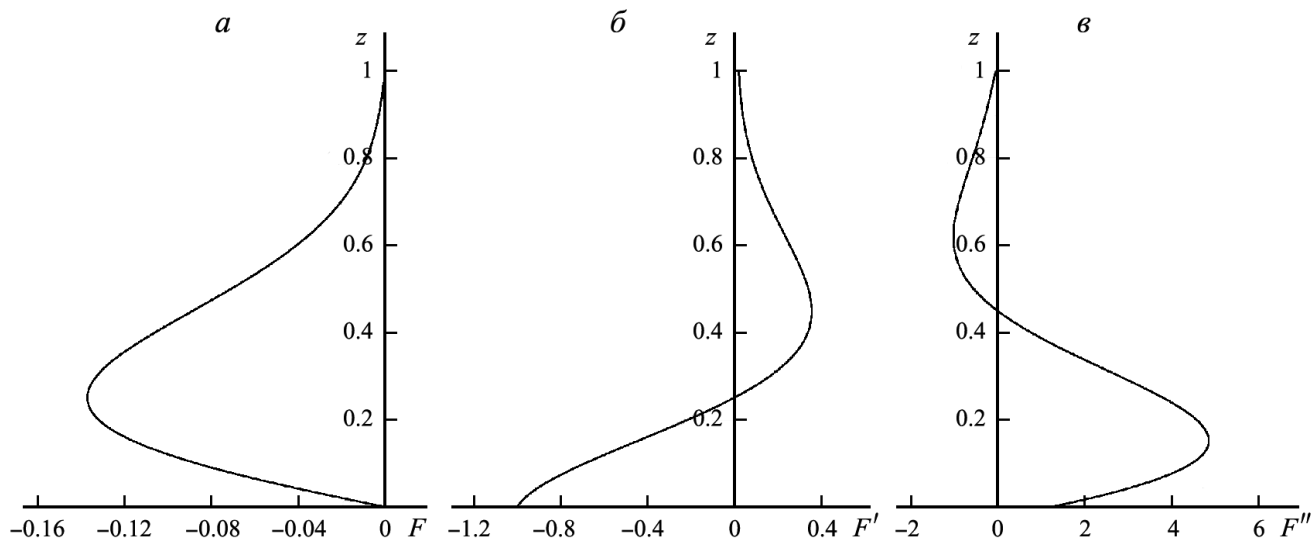


Рис. 2. Решение спектральной задачи (11) при $g(z) = 4z(1 - z)$ и $\mu = 12.2288$: *a* — зависимость $F(z)$; *б* — $F'(z)$; *в* — $F''(z)$

Результаты расчетов для $\mu = 12.2288$ и $g(z) = 4z(1 - z)$ показаны на рис. 2. Величина μ представляет собственное число однородной краевой задачи (13).

Для коэффициента усиления возмущений по времени получаем

$$\sigma^2 = \frac{\delta \lambda^2}{\mu N} - 1.$$

Таким образом, условием неустойчивости атмосферы с инверсионным распределением температуры и последующего развития вихря является

$$\frac{\delta \lambda^2}{\mu N} > 1, \quad \text{или} \quad |\delta| > \frac{|\mu|}{\lambda^2} N. \tag{14}$$

Величина δ характеризует степень инверсионности, т.е. степень отклонения распределения температуры от изэнтропической. Неравенство (14) показывает, что рассматриваемый механизм неустойчивости является накопительным. Тепловые процессы в покоящейся атмосфере, создающие инверсию, происходят в течение определенного времени, при этом показатель степени отклонения $|\delta|$ растет. Когда $|\delta|$ достигает конечного значения, задаваемого неравенством (14), начинается саморазвитие вихревого движения. Так как при заданной функции $g(z)$ существуют две последовательности собственных чисел (положительных и отрицательных), то соответственно этому могут возникать два типа вихрей — при положительной инверсии ($\delta > 0$) и при отрицательной ($\delta < 0$). В обоих случаях первыми теряют устойчивость состояния, соответствующие μ_1, μ'_1 , и развиваются движения, описываемые первыми собственными модами $F(z)$.

Краевая задача (13) имеет спектр собственных решений при достаточно произвольном задании функции $g(z)$, характеризующей зависимость отклонения температуры в покоящейся атмосфере от линейного распределения (6). Все элементы спектра $\{\mu_k, F_k(z)\}$ находятся численно многократным решением уравнения (13) с начальными условиями $F(0, \mu) = 0, F'(0, \mu) = -1$ и подбором такого значения μ , чтобы $F(1, \mu) = 0$. В каждом из исследованных случаев при заданной функции $g(z)$ существуют две последовательности собственных чисел — положительных ($\mu_k > 0$) и отрицательных ($\mu'_k < 0$) — и соответствующих собственных функций $F_k(z)$. В таблице приведены значения

наименьших по модулю собственных чисел для семейства функций $g(z)$, задаваемых формулой

$$g(z) = 4z(1 - z),$$

представляющей зависимость возможного отклонения основного теплового состояния атмосферы газа от равновесного. Отметим, что с ростом номера собственного числа на единицу добавляется один дополнительный нуль собственной функции $F_k(z)$ на отрезке $z \in [0, 1]$.

μ'_3	μ'_2	μ'_1	μ_1	μ_2	μ_3
-101.78214	-41.817606	-8.5200161	12.228847	62.345551	152.52560

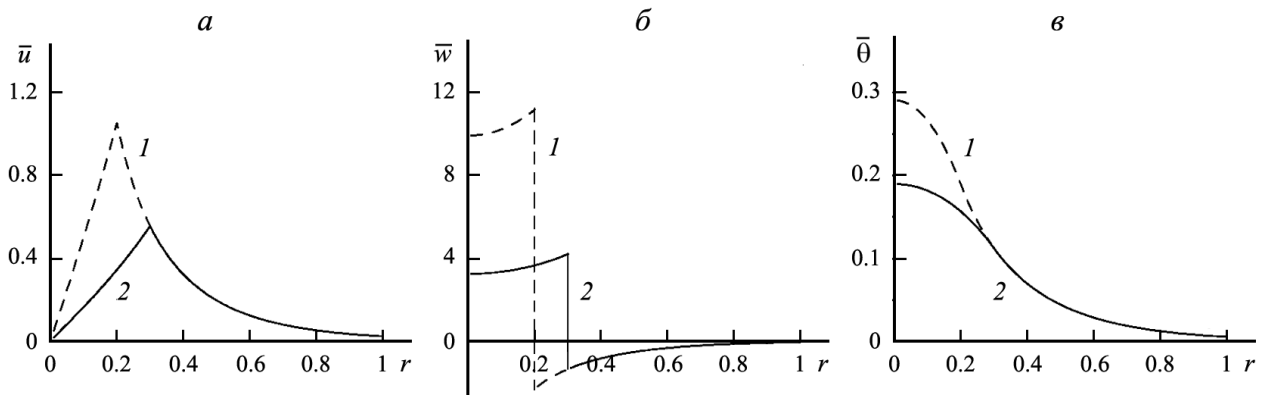


Рис. 3. Решение краевой задачи (12), значения нормированных скоростей \bar{u} (а), \bar{w} (б) и температуры $\bar{\theta}$ (в): 1 – $r_* = 0.2$; 2 – 0.3

Решение краевой задачи (12) представляется в следующем виде (рис. 3):

$$f = rAI_1(\lambda r) \quad \text{при} \quad 0 < r \leq r_*; \quad f = rK_1(\lambda r) \quad \text{при} \quad r \geq r_*. \tag{15}$$

Здесь $I_1(r)$, $K_1(r)$ – функции Бесселя первого порядка от мнимого аргумента. Множитель $A = K_1(r_*)/I_1(r_*)$ обеспечивает непрерывность решения $f(r)$ при $r = r_*$, однако производная $f'(r)$ в точке r_* терпит разрыв (рис. 3). Построение разрывного решения, составленного из функций $I_n(r)$, $K_n(r)$, успешно применялось при исследовании устойчивости жидкой струи кругового сечения в продольном потоке газа [8]. Таким образом, при $r = r_*$ значения вертикальной скорости $w(r_*)$ оказываются разрывными, а скорость вращения $v(r_*)$ и радиальная скорость $u(r_*)$ являются непрерывными. Значение r_* можно сопоставить с радиусом глаза вихря, а место разрыва вертикальной скорости – со стеной глаза бури, в которой вертикальное движение газа и вращение интенсивны. Математический разрыв в решении (15) может быть размазан путем включения вязких сил в уравнение основной исходной модели среды (1).

3. Свойства развивающегося вихря. Выпишем выражения для пространственного представления компонент скорости, давления и температуры в поле вихревого течения, описываемого решением (12), (11):

$$\begin{aligned} \rho_1 u &= \sigma F' \frac{1}{r} f, & \rho_1 v &= -F' \frac{1}{r} f, & \rho_1 w &= -\sigma F \frac{1}{r} f', \\ \pi &= (\sigma^2 + 1) \frac{1}{\rho_1} F' \cdot \int_r^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi, & \theta &= (\sigma^2 + 1) \frac{1}{\rho_1} F'' \cdot \int_r^\infty \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$\frac{1}{r} f = \Phi(r) = \begin{cases} AI_1(\lambda r), & 0 \leq r \leq r_*; \\ K_1(\lambda r), & r \geq r_*, \end{cases} \quad A = \frac{K_1(\lambda r_*)}{I_1(\lambda r_*)}.$$

Во всем поле течения непрерывны радиальная и угловая скорости, а также давление и температура, но вертикальная компонента скорости w терпит разрыв при $r = r_*$ и не зависит от z .

Проанализируем подробнее полученное решение. Цилиндрическая поверхность $r = r_*$ соответствует стене глаза циклона, вертикальная составляющая скорости при переходе через эту поверхность меняет знак. В точке $z = z_*$ на этой поверхности меняет знак радиальная составляющая скорости, поэтому при $z < z_*$ жидкость поступает внутрь циклона, а при $z > z_*$ жидкость растекается из циклона. Отношение скоростей w на разрыве дается формулой

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{1 + \lambda r_* \frac{K_1'(\lambda r_*)}{K_1(\lambda r_*)}}{1 + \lambda r_* \frac{I_1'(\lambda r_*)}{I_1(\lambda r_*)}},$$

где $w = w_1$ при $r < r_*$ и $w = w_2$ при $r > r_*$.

Вычислим массу жидкости, поступающей из внешней среды внутрь глаза бури:

$$Q = 2\pi r_* \int_0^{z_*} \rho_1 u d\eta = 2\pi r_* \frac{\sigma}{r_*} \psi(r_*, z_*) = 2\pi \sigma r_* \cdot F(z_*) AI_1(\lambda r_*) = 2\pi \sigma r_* \cdot F(z_*) K_1(\lambda r_*),$$

здесь $z = z_*$ — точка, в которой обращается в нуль производная $F'(z_*) = 0$. Нормируем функцию F так, чтобы $\rho_1 w > 0$ при $r \rightarrow 0$, $z < z_*$, тогда на основании формул (16) получим $F(z) < 0$ при $z < z_*$. Следовательно, при решении спектральной задачи (11) наряду с граничным условием $F(0) = 0$ следует дополнительно использовать условие $F'(0) = -1$. Для этого случая условие $Q < 0$ указывает направление потока внутрь глаза бури.

Из выражения (16) следует, что давление падает с приближением к центру вихря. Окружная составляющая скорости v вблизи поверхности $z = 0$ положительна, уменьшается с ростом высоты и обращается в нуль в точке, где $F' = 0$, затем становится отрицательной. Таким образом, вращение осуществляется по часовой стрелке у нижней поверхности (циклон) и против часовой стрелки у верхней поверхности (антициклон). Радиальная составляющая скорости также меняет знак вместе с v . У основания вихря происходит приток газа со стены глаза бури, у верхней поверхности — отток газа. Для приращения температуры θ из (16) можно заключить, что вблизи стенки глаза бури имеет место тепловыделение за счет отклонения от адиабатического распределения тепла в исходном состоянии (второй член (6), пропорциональный δ). Температура в этой области будет выше фоновой — образуется тепловое ядро.

Наблюдаемые в реальном циклоне свойства вполне согласуются с данными о гидродинамических и термодинамических параметрах u , v , w , p , T .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаин А.П. Математическое моделирование тропических циклонов. Л.: Гидрометеиздат, 1984.
2. Вараксин А.Ю. Воздушные торнадоподобные вихри: Математическое моделирование // Теплофиз. высоких температур. 2017. **55**, № 2. 291–316.
3. Арсеньев С.А., Николаевский В.Н., Шелковников Н.К. Вихревая неустойчивость и образование смерчей и торнадо // Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 2000. № 1. 50–53.
4. Бурцев С.А., Леонтьев А.И. Исследование влияния диссипативных эффектов на температурную стратификацию в потоках газа (обзор) // Теплофиз. высоких температур. 2014. **52**, вып. 2. 310–322.
5. Слезкин Н.А. Гидродинамические модели тайфуна, вихревого отсоса воды с поверхности океана и вихревого возмущения цунами // Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана. 1987. **23**, № 12. 1285–1296.
6. Якимов Ю.Л. Смерч и особое предельное решение уравнений Навье–Стокса // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1988. № 6. 23–33.
7. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Проблема предсказания и уничтожения смерча // Технол. граждан. безопасности. 2016. **13**, № 1. 70–75.
8. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // Науч. тр. Ин-та механики МГУ. 1973. № 25.

Поступила в редакцию
22.04.2022