Механика

УДК 532

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ЕДИНИЦА РАВНОВЕСИЯ ТЯЖЕЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ СЛУЧАЙНОЙ СООСНОЙ ВИБРАЦИИ ЦИЛИНДРА

И. Л. Антонов[1]

В работе показано, что при вертикальной случайной вибрации сосуда, если начальные значения какой-то моды колебаний жидкости отличны от равновесных, амплитуда колебаний этой моды (в рамках линейной теории) неограниченно растет. Случайная вибрация моделируется с помощью стационарной марковской цепи.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, сила тяжести, цилиндрический сосуд, неустойчивость равновесия, случайная вибрация, марковская цепь, с вероятностью единица.

The paper concerns with the equilibrium of the ideal incompressible liquid situated in a moving cylindrical vertical vessel. It is proved that the equilibrium is unstable with probability one if the vessel movement is defined as the vertical random vibration. Random vibration is simulated by stationary Markov chain.

Key words: ideal incompressible liquid, gravity force, cylindrical vessel, unstable equilibrium, random vibration, stationary Markov chain, probability one.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2022-6-32-38

1. В ряду задач, рассматриваемых в монографии [1], есть задача о малых вынужденных колебаниях тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в сосуде, совершающем вертикальное поступательное движение. В предлагаемой работе дается ответ на вопрос об устойчивости равновесия жидкости в случае, когда движение сосуда представляет собой случайную вибрацию. Чтобы уточнить постановку задачи, необходимо вкратце изложить процесс получения решения в [1].

Сохраняя обозначения оригинала, заметим, что ось Oz подвижной системы координат, связанной с сосудом, направлена против вектора силы тяжести, плоскость Oxy совпадает со свободной поверхностью жидкости S в положении равновесия. Область, занятая жидкостью, обозначается через τ, смоченная поверхность сосуда — через Σ.

Уравнения малых колебаний жидкости в сделанных предположениях имеют вид:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в области } \tau; \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (g + W_z(t))\zeta = 0 \text{ при } z = 0; \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \text{ при } z = 0; \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на поверхности } \Sigma, \tag{7.13}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\varphi(x, y, z, t)$ — потенциал относительной скорости жидкости, $W_z(t)$ — ускорение сосуда, $\zeta(x, y, t)$ — возвышение свободной поверхности над плоскостью S, g — ускорение силы тяжести, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ — производная по нормали к поверхности Σ.

В качестве сосуда рассматривается круглый цилиндр с вертикальной образующей и горизонтальным дном, радиус цилиндра R, расстояние от дна до S равно h.

[1] *Антонов Игорь Леонидович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ilanto37@yandex.ru.

Antonov Igor Leonidovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Собственные функции цилиндра определяются формулами

$$\varphi_{nm} = \frac{1}{\sigma_{nm}} \psi_{nm}(r,\theta) \frac{\operatorname{ch}(\chi_{nm}(z+h))}{\operatorname{ch}(\chi_{nm}h)}, \quad n,m \in N,$$

$$\psi_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\pi} N_{nm}} J_n(\chi_{nm} r)\cos n\theta,$$

где χ_{nm} — корни уравнения $\frac{d}{dr}J_n(\chi R) = 0$, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода, N_{nm} — калибровочный множитель, r, θ — полярные координаты на S. Функции $\psi_{nm}(r,\theta)$ образуют на поверхности S полную ортонормированную систему, причем

$$\frac{\partial \varphi_{nm}}{\partial z} = \sigma_{nm}\psi_{nm}(r,\theta) \quad \text{на поверхности } S; \tag{7.14}$$

$$\sigma_{nm} = \sqrt{\chi_{nm} \operatorname{th}(\chi_{nm}h)},$$

$$\frac{\partial \varphi_{nm}}{\partial n} = 0 \quad \text{на поверхности } \Sigma.$$

Решение системы уравнений (7.10)–(7.13) ищется в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} p_{nm}(t)\varphi_{nm}; \tag{7.15}$$

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}(t)\psi_{nm}. \tag{7.16}$$

Заданные таким образом функции φ и ζ удовлетворяют уравнениям (7.10) и (7.13). Подставив выражения (7.15) и (7.16) в уравнения (7.11), (7.12), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_{nm}} \dot{p}_{nm}(t) + (g + W_z(t))q_{nm}(t) \right) \psi_{nm}(r,\theta) = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (p_{nm}(t)\sigma_{nm} - \dot{q}_{nm}(t))\psi_{nm}(r,\theta) = 0,$$

откуда вследствие полноты системы функций $\psi_{nm}(r,\theta)$ будем иметь

$$p_{nm}(t)\sigma_{nm} - \dot{q}_{nm}(t) = 0 \Rightarrow \dot{p}_{nm}(t)\sigma_{nm} - \ddot{q}_{nm}(t) = 0, \quad \ddot{q}_{nm} + g\sigma_{nm}^2(1 + W_z(t)/g)q_{nm}(t) = 0 \ \ \forall n,m. \tag{7.17}$$

2. Обозначения и номера формул, вводимые в п. 2 работы, новые и, вообще говоря, не зависят от тех, что были в п. 1. Рассмотрим уравнение (7.17):

$$\ddot{q}_{nm}(t) + g\sigma_{nm}^2(1 + W_z/g)q_{nm}(t) = 0 \quad \forall n,m. \tag{1}$$

Будем считать, что возмущение W_z/g представляется в виде

$$W_z/g = \mu\xi(t,\omega), \quad 0 < \mu < 1,$$

где $\xi(t,\omega)$ — случайный процесс, реализации которого $\xi(\cdot,\omega)$ суть кусочно-постоянные на интервалах $k\tau \leqslant t < (k+1)\tau$, $k = 0,1,2,\ldots$, функции времени, непрерывные справа, а $\xi(k\tau,\cdot) = \xi_k(\omega)$, $k = 0,1,2,\ldots,$ — случайная последовательность, являющаяся однородной марковской цепью, с фазовым пространством $X = (|x| \leqslant 1)$.

Плотность вероятности перехода этой цепи за один шаг из состояния $x_0 \in X$ в состояние $x \in X$, а именно $0 < p(x_0,x) < C \ \forall x_0, x \in X$, вместе с параметром τ выбирается из соображений соответствия используемой модели случайного процесса реальному воздействию.

Введем с помощью формул

$$t_{nm} = t\sigma_{nm}\sqrt{g}, \quad \tau_{nm} = \tau\sigma_{nm}\sqrt{g}$$

безразмерное время, обозначим

$$t_{nm} = s, \quad \tau_{nm} = \theta, \qquad q_{nm} = y, \quad dy/ds = y'$$

и перепишем уравнение (1) в новых обозначениях:

$$y'' + (1 + \mu\xi(s,\omega))y = 0, \tag{2}$$

где $k\theta \leqslant s < (k+1)\theta \Rightarrow \xi(s - k\theta, \omega) = \xi(k\theta, \omega) = x_k$.

При фиксированных значениях n, m значение θ остается постоянным вдоль траектории уравнения (2), однако чтобы судить о свойствах решений системы, рассмотренной в п. 1, необходимо иметь представление о том, каковы будут эти траектории при любых возможных значениях θ, которые ввиду свойств корней χ_{nm}, определяющих значения σ_{nm}, могут принадлежать интервалу $0 < \theta < \infty$.

Траектории уравнения (2) строятся следующим образом: пусть в начальный момент $s = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, $\xi(0, \omega) = x_0$. Тогда на интервале $0 \leqslant s < \theta$ уравнение (2) превращается в уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого известно: $y = y(s, y_0, y'_0, x_0)$, $y' = y'(s, y_0, y'_0, x_0)$.

Полагая по определению

$$y(\theta) = \lim_{s\to\theta} y(s, y_0, y'_0, x_0), \quad y'(\theta) = \lim_{s\to\theta} y'(s, y_0, y'_0, x_0),$$

используя состояние заданной марковской цепи $\xi(\theta, \omega) = x_1$, найдем условия, определяющие решение уравнения (2) на интервале $\theta \leqslant s < 2\theta$.

Продолжая этот процесс и склеивая построенные решения в точках $s = k\theta$, $k = 1, 2, \ldots$, получим случайную функцию, являющуюся решением уравнения (2).

Перепишем уравнение (2) в виде системы

$$y' = z,$$

$$z' = -(1 + \mu\xi(s,\omega))y$$

и перейдем к полярным координатам $y = r\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$. Тогда

$$r' = -\mu\xi(s,\omega) r \sin\varphi\cos\varphi, \tag{3}$$

$$\varphi' = 1 + \mu\xi(s,\omega)\sin^2\varphi. \tag{4}$$

Поскольку $\varphi' > 0 \ \ \forall s$, в уравнении (3) можно перейти к новой независимой переменной

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{\varphi'}\, r\mu\xi(s,\omega)\sin\varphi\cos\varphi,$$

откуда будем иметь

$$d(\ln r^2) = -\mu\xi(s,\omega)(1 + \mu\xi(s,\omega)\sin^2\varphi)^{-1} d(\sin^2\varphi).$$

На интервале $(k-1)\theta \leqslant s < k\theta$ получим

$$d(\ln r^2) = -(1 - \mu x_{k-1}\sin^2\varphi + (\mu x_{k-1}\sin^2\varphi)^2 - \ldots)\, d(\mu x_{k-1}\sin^2\varphi). \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (5) на указанном интервале, имеем

$$\ln(r_k/r_{k-1})^2 = -\mu x_{k-1}(\sin^2\varphi_k - \sin^2\varphi_{k-1}) + O((\mu x_{k-1})^2).$$

Суммируя полученные равенства по $k = 1, 2, \ldots, n$, запишем

$$\ln(r_n/r_0)^2 = \sum_{k=1}^{n} (-\mu x_{k-1}(\sin^2\varphi_k - \sin^2\varphi_{k-1}) + O((\mu x_{k-1})^2)). \tag{6}$$

Рассмотрим случай $\vartheta < \pi$.

Применим для решения уравнения (4) на интервале $(k-1)\theta \leqslant s < k\theta$, $k = 1, 2, \ldots$, метод Пикара

$$\frac{d\varphi^{(k)}}{ds} = 1 + \mu x_{k-1} \sin^2 \varphi^{(k-1)}(s),$$

где $\varphi^{(k)}$ означает k-ю итерацию.

Используя функцию

$$\varphi^{(0)}(s) = \varphi_{k-1} + s - (k-1)\theta$$

в качестве нулевого приближения, учитывая способ определения φ_k и малость величины μx_{k-1}, получим

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \theta + \frac{\mu x_{k-1}}{2}(\theta - \frac{1}{2}(\sin 2(\varphi_{k-1} + \theta) - \sin 2\varphi_{k-1})) + O((\mu x_{k-1})^2). \tag{7}$$

Суммируя (7) по k от 1 до n, имеем

$$\varphi_n = \varphi_0 + n\theta + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu x_{k-1}}{2}(\theta - \frac{1}{2}(\sin 2(\varphi_{k-1} + \theta) - \sin 2\varphi_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} O((\mu x_{k-1})^2). \tag{8}$$

Используя тригонометрические равенства, формулу (7) и малость величин μx_{k-1}, представим правую часть уравнения (6) в виде

$$\sum_{k=1}^{n}(-\mu x_{k-1}(\sin^2 \varphi_k - \sin^2 \varphi_{k-1}) + O((\mu x_{k-1})^2)) =$$

$$= n\frac{\mu^2\sigma^2}{8}(1 - \cos 2\theta) - n(s_1(n,\omega) + s_2(n,\omega) + s_3(n,\omega) + O(\mu^3)). \qquad (9),$$

Здесь $s_1(n,\omega) = \frac{\mu^2}{8}(1 - \cos 2\theta)(\sigma^2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k-1})^2)$,

$s_2(n,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mu x_{k-1}) \sin\theta \sin(2\varphi_{k-1} + \theta)$,

$s_3(n,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_{k-1})^2(1/2)(\theta \sin 2(\varphi_{k-1} + \theta) -$

$-(1/8)(\cos 4(\varphi_{k-1} + \theta) - \cos(4\varphi_{k-1} + 2\theta)) + (1/8)\sin 2\theta \sin(4\varphi_{k-1} + 2\theta) -$

$-(1/2)\sin(2\varphi_{k-1} + \theta)\sin\theta)$.

Поскольку для уравнения (4) справедлива теорема существования и единственности решения и $\xi_k(\omega)$ — марковская цепь, последовательность $u_k(\omega) = (\xi_k(\omega), \varphi_k(\omega))$, $k = 0, 1, ...$, построенная описанным выше способом, представляет собой двумерную марковскую цепь. Фазовое пространство этой цепи

$$U = (u = (x, \varphi) : (|x| \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi < 2\pi))$$

— поверхность цилиндра с "вертикалями" $(\cdot, \varphi = \varphi_k)$ и "горизонталями" $(x = x_k, \cdot)$.

Пусть $q(u_0, u_1)$ обозначает плотность вероятности перехода марковской цепи $u_k(\omega)$ за один шаг из состояния u_0 в состояние u_1. Тогда в соответствии с методом построения решения уравнения (4) вероятность перехода марковской цепи $u_k(\omega)$ за один шаг из состояния $u_0 = (x_0, \varphi_0)$ в окрестность точки $u_1 = (x_1, \varphi_1)$ будет иметь вид

$$q(u_0, u_1)dx_1 d\varphi_1 = p(x_0, x_1)\delta(\varphi_1 - g(x_0, \varphi_0, \theta))\, dx_1 d\varphi_1, \tag{10}$$

где $p(x_0, x_1)$ — плотность вероятности перехода за один шаг марковской цепи $\xi_k(\omega)$,

$\delta(\varphi_1 - g(x_0, \varphi_0, \theta))$ — δ-функция Дирака,

$\varphi_1 = g(x_0, \varphi_0, \theta)$ — значение решения уравнения (4) в конце заданного интервала (см. формулу (7) для $k = 1$).

Плотность вероятности перехода марковской цепи $u_k(\omega)$ за два шага из состояния u_0 в состояние u_2 определяется уравнением [2]

$$q^{(2)}((x_0, \varphi_0), (x_2, \varphi_2)) = \int q((x_0, \varphi_0), (x_1, \varphi_1))q((x_1, \varphi_1), (x_2, \varphi_2))\, dx_1 d\varphi_1. \tag{11}$$

Выполнив с учетом (10) и (7) интегрирование в (11), получим

$$q^{(2)}(u_0, u_2) = \frac{1}{a_1\mu} p\left(x_0, \frac{A + a_1 O(A^2)}{a_1\mu}\right) p\left(\frac{A + a_1 O(A^2)}{a_1\mu}, x_2\right),$$

где $A = \varphi_2 - \varphi_1 - \theta$, $a_1 = (1/2)(\theta - \sin\theta \cos(2\varphi_1 + \theta))$.

Обозначим $S_2(u_0) = (u_2 : q^{(2)}(u_0, u_2) > 0)$. В фазовом пространстве U это множество представляет собой “прямоугольник”, “высота” которого равна 2 ($|x_2| \leqslant 1$), а “горизонтальный” размер $L(S_2(u_0))$ определяется неравенством

$$\left|\frac{A + a_1 O(A^2)}{a_1 \mu}\right| \leqslant 1. \tag{12}$$

Раскрывая неравенство (12), можем записать $L(S_2(u_0)) > \Delta\mu, \Delta = (1/2)(\theta - \sin\theta)$.

Рассмотрим последовательность множеств $S_{2(k+1)}(u_0) = \cup_{u_{2k} \in S_{2(k)}(u_0)} S_2(u_{2k})$, $k = 1, 2, \ldots$.

Из определения понятно, что $S_{2(k)}(u_0) = (u_{2k} : q^{(2k)}(u_0, u_{2k}) > 0)$, откуда можно сделать вывод, что при $k > \frac{\pi}{\Delta\mu}$ множество $S_{2k}(u_0)$ покроет фазовое пространство U целиком, т.е. для любых $u_0, u \in U$ и $k > \frac{\pi}{\Delta\mu}$ будем иметь $q^{(2k)}(u_0, u) > 0$. Наличие такого k является достаточным условием существования стационарной плотности распределения вероятностей $q(u)$ для марковской цепи $u_j(\omega)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Последовательно решая соответствующие неравенства при росте k, получим такую оценку снизу для $L(S_{2k}(u_0))$:

$$L(S_{2k}(u_0)) > (2k - 1)\Delta\mu,$$

$$\lim_{n\to\infty} |q^{(2n)}(u_0, u) - q(u)| = 0.$$

Воспользовавшись существованием стационарного распределения для марковской цепи $u_k(\omega)$, формулой (8), усиленным законом больших чисел для этой цепи и тем, что скорость сходимости в этом законе оценивается следующим образом [2]:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, \varphi_k) - M(f(x, \varphi)\right| \sim C\varrho^n, \quad 0 < \varrho < 1,$$

где $|f(x, \varphi)| < C_1$, $M(f(x, \varphi) = \int f(x, \varphi) q(x, \varphi)\, dx d\varphi$, нетрудно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(2\varphi_k + \theta) = 0. \tag{13}$$

Из усиленного закона больших чисел и формулы (13) теперь вытекает, что

$$M(\sin(2\varphi + \theta)) = \int \sin(2\varphi + \theta) q(x, \varphi)\, dx d\varphi = 0. \tag{14}$$

Соотношения (13), (14) остаются справедливыми для всех тригонометрических функций, входящих в выражение $s_3(n, \omega)$ и зависящих от φ_{k-1}.

Рассмотрим свойства стационарной плотности $q(x, \varphi, \theta)$. Во-первых, она должна удовлетворять условиям

$$\int q(x, \varphi, \theta)\, dx d\varphi = 1,$$

$$\int q(x, \varphi, \theta)\, d\varphi = p(x), \tag{15}$$

где $p(x)$ — стационарная плотность марковской цепи $\xi_k(\omega)$.

Во-вторых, структура фазового пространства U и уравнение (4) позволяют заключить, что зависимость $q(x, \varphi, \theta)$ от φ должна быть периодической, поэтому $q(x, \varphi, \theta)$ можно представить в виде

$$q(x, \varphi, \theta) = p(x)(\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(\mu x, \theta)\cos(k\varphi) + b_k(\mu x, \theta)\sin(k\varphi))). \tag{16}$$

Следствием равенства (15) является то, что разложение (16) не должно содержать частоты, кратные 2, поэтому, учитывая соотношения (13), (14) и применяя усиленный закон больших чисел марковской цепи $u_k(\omega)$ к правой части уравнения (6) (с учетом (9)), получим

$$r_n^2 = r_0^2 \exp\Big(n\Big(\frac{\mu^2\sigma^2}{16}(1-\cos 2\theta) + O((\mu x)^3) + f(n)\Big)\Big), \tag{17}$$

где $f(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теперь рассмотрим случай $\vartheta > \pi$. Запишем уравнение (4) на интервале $(k-1)\theta \leqslant s < k\theta$ в виде

$$\int\limits_{(k-1)\theta}^{\varphi} \frac{dz}{1+\mu x_{k-1}\sin^2 z} = \int\limits_{(k-1)\theta}^{s} dy$$

и предположим, что для $0 < m_{k-1} \in N$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{(k-1)\theta}^{(k-1)\theta+m_{k-1}\pi} \frac{dz}{1+\mu x_{k-1}\sin^2 z} < \theta, \qquad \int\limits_{(k-1)\theta}^{(k-1)\theta+(m_{k-1}+1)\pi} \frac{dz}{1+\mu x_{k-1}\sin^2 z} > \theta.$$

Тогда существует такое $0 < \lambda_{k-1} < \pi$, что

$$\int\limits_{(k-1)\theta}^{(k-1)\theta+m_{k-1}\pi+\lambda_{k-1}} \frac{dz}{1+\mu x_{k-1}\sin^2 z} = \theta. \tag{18}$$

Левую часть уравнения (18) представим в виде

$$\int\limits_{(k-1)\theta}^{(k-1)\theta+m_{k-1}\pi+\lambda_{k-1}} \frac{dz}{1+\mu x_{k-1}\sin^2 z} =$$

$$= \int\limits_{(k-1)\theta}^{(k-1)\theta+m_{k-1}\pi} \frac{dz}{1+\mu x_{k-1}\sin^2 z} + \int\limits_{(k-1)\theta+m_{k-1}\pi}^{(k-1)\theta+m_{k-1}\pi+\lambda_{k-1}} \frac{dz}{1+\mu x_{k-1}\sin^2 z}. \tag{19}$$

Используя формулу [3]

$$\int \frac{dx}{a^2 \pm b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2 \pm b^2}} \arctan\Big(\frac{\sqrt{a^2 \pm b^2}\tan x}{a}\Big) \quad (a^2 > b^2),$$

нетрудно показать, что

$$\int\limits_{(k-1)\theta}^{(k-1)\theta+m_{k-1}\pi} \frac{dz}{1+\mu x_{k-1}\sin^2 z} = m_{k-1}\frac{\pi}{\sqrt{1+\mu x_{k-1}}}. \tag{20}$$

Из соотношений (18)–(20) после очевидной замены переменных получим

$$\int\limits_{0}^{\lambda_{k-1}} (1+\mu x_{k-1}\sin^2(\varphi_{k-1}+x))^{-1} dx = \theta - m_{k-1}\frac{\pi}{\sqrt{1+\mu x_{k-1}}}.$$

Обозначим

$$A_{k-1} = \theta - m_{k-1}\,\frac{\pi}{\sqrt{1+\mu x_{k-1}}}.$$

Проинтегрировав левую часть (20) и разрешив получившееся уравнение относительно λ_{k-1}, будем иметь

$$\lambda_{k-1} = A_{k-1} + \frac{\mu x_{k-1}}{2}\Big(A_{k-1} - \frac{1}{2}(\sin(2\varphi_{k-1}+A_{k-1}) - \sin 2\varphi_{k-1})\Big) + O((\mu x_{k-1})^2). \tag{21}$$

С учетом соотношений (18) и (21) запишем

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + m_{k-1}\pi + A_{k-1} + \frac{\mu x_{k-1}}{2}(A_{k-1} - \frac{1}{2}(\sin(2\varphi_{k-1} + A_{k-1})) - \sin 2\varphi_{k-1}) + O((\mu x_{k-1})^2). \quad (22)$$

Суммируя (21) по k от 1 до n, получим

$$\varphi_n = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{n}(m_{k-1}\pi + A_{k-1} + \frac{\mu x_{k-1}}{2}(A_{k-1} - \frac{1}{2}(\sin(2\varphi_{k-1} + A_{k-1}) - \sin 2\varphi_{k-1})) + O((\mu x_{k-1})^2)). \quad (23)$$

Формулы (22), (23) отличаются от соответствующих формул (7) и (8) дополнительными членами, кратными π, и заменой θ на A_{k-1}. Поэтому, используя тот же подход, что и в предыдущем случае, можно доказать существование стационарного распределения для $u_k(\omega)$ и справедливость равенств типа (13), (14) для тригонометрических функций в правой части соотношения (9). Применив в этом случае усиленный закон больших чисел к правой части соотношения (6), можем записать

$$r_n^2 = r_0^2 \exp\left(n\left(\frac{\mu^2\sigma^2}{16}\left(1 - \frac{M(x^2\cos 2A(x))}{\sigma^2}\right) + O((\mu x)^3) + h(n)\right)\right), \quad (24)$$

где $h(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Формулы (17) и (24) показывают, что независимо от значения θ фазовая точка на плоскости (y, z) начиная с некоторого момента времени с вероятностью единица монотонно удаляется от начала координат.

Это означает, что если начальные условия какой-либо моды колебаний жидкости (при любых значениях n и m, см. п. 1) отличны от равновесных, то в рамках линейной теории амплитуда колебаний этой моды с вероятностью единица будет неограниченно расти, т.е. равновесие жидкости при случайной вибрации указанного вида будет неустойчиво с вероятностью единица.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966.
2. *Doob J.L.* Stochastic Processes. N.Y.: J. Wiley; London: Chapman and Hall, 1953 (*Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956).
3. *Dwight H.B.* Tables of Integrals and Other Mathematical Data. N.Y.: Macmillan, 1961 (*Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1964).

Поступила в редакцию
30.03.2022

УДК 551.515+533.6

АТМОСФЕРНЫЙ ВИХРЬ, ВОЗБУЖДАЕМЫЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ

В. Я. Шкадов[1], **А. Н. Белоглазкин**[2]

Исследуются температурные условия, при которых оказывается возможным возникновение и саморазвитие вихревого движения в реальной атмосфере.

Ключевые слова: атмосфера, неустойчивость, тропический циклон, сила Кориолиса.

[1] *Шкадов Виктор Яковлевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. аэромеханики и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: shkadov@mech.math.msu.su.

[2] *Белоглазкин Александр Николаевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. аэромеханики и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bel@mech.math.msu.su.

Shkadov Victor Yakovlevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Aeromechanics and Gas Dynamics.

Beloglazkin Alexander Nikolaevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Aeromechanics and Gas Dynamics.