

УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЯ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ 5-ПОВЕРХНОСТЕЙ ТРЕХМЕРНОГО БИЛЬЯРДА ВНУТРИ ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА С ПОТЕНЦИАЛОМ ГУКА

Г. В. Белозеров¹

Рассматривается бильярд внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука (как притягивающим, так и отталкивающим). Для каждой зоны небифуркационных значений энергии определен класс гомеоморфности соответствующей изоэнергетической 5-поверхности в фазовом пространстве без использования интегрируемости бильярда. По методу В. В. Козлова приведен явный вид n находящихся в инволюции первых интегралов для многомерного обобщения рассмотренной задачи — бильярда с потенциалом Гука внутри n -осного эллипсоида в n -мерном пространстве.

Ключевые слова: интегрируемая система, гамильтонова система, бильярд, интегрируемый бильярд, геодезический поток, софокусные квадрики, топологические инварианты, слоение Лиувилля, изоэнергетическая поверхность.

A billiard inside a triaxial ellipsoid in a Hooke potential field (both attractive and repulsive) is considered. For each zone of non-bifurcational values of the energy, the homeomorphism class of the corresponding isoenergy 5-surface in the phase space is determined. This result was obtained without using the integrability of the system. Following the method of V. V. Kozlov, we also present an explicit form of n involutive first integrals for the multidimensional generalization of studied problem, i.e., a billiard in a Hooke potential field inside an n -axial ellipsoid in n -dimensional space.

Key words: integrable system, Hamiltonian system, billiard, integrable billiard, geodesic flow, confocal quadrics, topological invariants, Liouville foliation, isoenergy surface.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2022-6-21-31

1. Введение. Применение теории Морса к изучению гамильтоновых систем было во многом мотивировано программной работой С. Смейла [1]. Фазовое пространство многих таких систем является двойственным пространством к некоторой алгебре Ли, например $e(3)$, и естественным образом расслаивается на изоэнергетические поверхности. Так называют совместные поверхности уровня энергии H и функций Казимира алгебры Ли (во многих задачах из динамики твердого тела это геометрический интеграл и интеграл площадей). В рассматриваемом нами случае под ними понимаем множество уровня энергии $H = h$ в фазовом пространстве.

Наличие критических точек $dH|_x = 0$ зачастую влечет различие классов гомеоморфности Q_h^3 гамильтоновой системы $v = \text{sgrad } H$ для значений h , лежащих по разные стороны от $h_0 = H(x)$.

В случае интегрируемости системы оказалось возможным провести более тонкий анализ системы. Аналог теории Морса для интегрируемых гамильтоновых систем был построен в работах А. Т. Фоменко [2, 3]. На его основе совместно с соавторами и учениками им была построена теория топологической классификации таких систем (см. [4], более подробная информация приведена в [5]). Данная теория была применена к различным интегрируемым системам из механики и математической физики, что позволило обнаружить ряд взаимосвязей между ними с точки зрения топологии замыканий их решений (см., например, [6, 7]).

В последние годы данную теорию успешно использовали для изучения интегрируемых бильярдных, ограниченных софокусными квадриками. В программной работе А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкиной [8] сформулирован ряд актуальных задач по топологии интегрируемых бильярдных систем и перечислены полученные результаты в этих направлениях (см. также последующие работы [9–11]). При этом А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной были введены и рассмотрены новые классы интегрируемых бильярдных систем: топологические бильярды [12, 13], бильярдные книжки [14], бильярды с проскальзыванием [15], эволюционные силовые бильярды [16, 17]. Отметим, что в большинстве этих работ изучаются свойства слоений на изоэнергетических 3-поверхностях для кусочно-плоских бильярдных систем.

¹ Белозеров Глеб Владимирович — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb0511beloz@yandex.ru.

Belozerov Gleb Vladimirovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

Тем не менее многие поставленные в [8] задачи связаны с объектами, имеющими размерность более 3 или нетривиальную метрику. Таковы, например, геодезические потоки на квадраках в \mathbb{R}^3 , изученные автором в [18], или промоделированные бильярдами интегрируемые геодезические потоки на сфере и торе (см. [19]). Бильярды в трехмерных областях исследовались В. Драговичем и М. Раднович в [20] и автором в [21]. Другой интересной темой является моделирование бильярдами особенностей ранга 0 (окрестностей слоев с положениями равновесия, классифицированных в [22]) отображения момента в системах с двумя степенями свободы (см. [23]).

Еще один важный класс бильяров получается добавлением потенциала или магнитного поля. В бильярдах с потенциалом слое на Q_h^3 может существенно зависеть от h (см. [24–26]). Весьма близка к этим публикациям и работа [27]: бильярд в эллипсе — это результат предельного перехода от системы геодезического потока на эллипсоиде при стремлении малой полуоси к нулю.

2. Постановка задачи и основные результаты. Рассмотрим движение частицы в поле потенциала Гаука внутри эллипсоида $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad \text{где } 0 < c < b < a.$$

Указанную область в \mathbb{R}^3 назовем *бильярдным столом* и обозначим D .

Бильярдом назовем следующую динамическую систему. Пусть материальная точка единичной массы движется внутри эллипсоида \mathcal{E} под действием упругой силы с коэффициентом k , центр которой совпадает с центром эллипсоида. Указанную силу и соответствующий гуковский потенциал назовем *отталкивающим* или *притягивающим* в случае $k < 0$ или $k > 0$ соответственно.

Фазовое пространство системы $M^6 = T^*D / \sim$ задается склейкой границ, соответствующей закону отражения частицы от \mathcal{E} :

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) : \quad x_1 = x_2 = x, \quad |v_1| = |v_2|, \quad (v_1 - v_2) \perp T_x^*\mathcal{E} \subset T_x^*D.$$

Иными словами, склеиваются пары “точка–вектор” $(x, v_1), (x, v_2)$, у которых вектор v_1 получен из v_2 упругим отражением относительно касательной плоскости $T_x\mathcal{E}$ с равенством углов падения и отражения. Фазовое пространство, заметим, является лишь кусочно-гладким многообразием: имеются склейки “далеких” точек.

Полная механическая энергия материальной точки имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Эта функция является первым интегралом бильярда. Действительно, полная механическая энергия — первый интеграл задачи без отражения, а поскольку отражение от \mathcal{E} абсолютно упругое, то H — первый интеграл системы. Рассматриваемый нами бильярд является кусочно-гладкой интегрируемой гамильтоновой системой. В п. 3 мы изучим бильярд внутри n -осного эллипсоида в n -мерном пространстве и приведем вид набора первых интегралов, удобный для наших дальнейших исследований.

Непустое множество $Q_h = \{(x, v) \in M^6 | H(x, v) = h\}$ назовем *изоэнергетической поверхностью*, а соответствующее ему значение h — *допустимым значением* энергии. Заметим, что при $k > 0$ множество допустимых значений энергии — это промежуток $[0; +\infty)$, а при $k < 0$ — промежуток $[ka/2; +\infty)$.

Рассмотрим проекцию $\pi : M^6 \rightarrow D$ из фазового пространства на конфигурационное. Она определена корректно, так как пары “точка–вектор” с $x_1 \neq x_2$ не склеиваются друг с другом. *Областью возможного движения*, соответствующей значению h , назовем образ Q_h под действием π , т.е. проекцию изоэнергетической поверхности на бильярдный стол.

При $k > 0$ область возможного движения есть шар радиуса $\sqrt{2h/k}$, пересеченный с бильярдным столом. При $k < 0$ область возможного движения — это либо внешность шара радиуса $\sqrt{2h/k}$, пересеченного с бильярдным столом (при $h \leq 0$), либо весь бильярдный стол (при $h > 0$). При $hk > 0$ сферу радиуса $\sqrt{2h/k}$ будем называть *граничной сферой*. Действительно, эта сфера входит в состав границы области возможного движения, при этом векторы из Q_h в точках граничной сферы нулевые.

Определение. Значение (уровень) энергии h будем называть *бифуркационным*, если либо $h = 0$, либо соответствующая граничная сфера касается эллипсоида \mathcal{E} . Иначе уровень энергии назовем *небифуркационным*.

Заметим, что граничная сфера касается эллипсоида \mathcal{E} в том и только в том случае, когда одна из его полуосей совпадает с радиусом граничного шара. Таким образом, особыми уровнями энергии являются $h = 0$, $h = ka/2$, $h = kb/2$ и $h = kc/2$.

Замечание. Если мы рассматриваем задачу без отражения, то $dH|_{(x,\dot{x})=(x_0,\dot{x}_0)} = 0$ тогда и только тогда, когда $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$. Следовательно, в задаче без отражения только $h = 0$ является особым уровнем энергии. В задаче с отражением помимо $h = 0$ мы объявили бифуркационными (особыми) уровни $h = ka/2, kb/2, kc/2$, поскольку вид области возможного движения различается для значений энергии из левой и правой окрестностей таких значений.

Оказывается, если h — небифуркационный уровень энергии, то соответствующая ему изоэнергетическая поверхность гомеоморфна либо несвязному объединению сфер S^5 , либо $S^1 \times S^4$, либо $S^2 \times S^3$. Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть h — небифуркационное значение энергии H , тогда

1) если $k > 0$, то изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна сфере S^5 ;

2) если $k < 0$, то изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна

несвязному объединению двух пятимерных сфер S^5 при $h \in \left(\frac{ka}{2}, \frac{kb}{2}\right)$;

прямому произведению окружности и четырехмерной сферы $S^1 \times S^4$ при $h \in \left(\frac{kb}{2}, \frac{kc}{2}\right)$;

прямому произведению двумерной и трехмерной сфер $S^2 \times S^3$ при $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$;

пятимерной сфере S^5 при $h \in (0, +\infty)$.

Следовательно, если $a = b = c$, то в случае $k > 0$ изоэнергетическая поверхность Q_h неособого уровня энергии гомеоморфна сфере S^5 , при $k < 0$ и $h \in (ka/2, 0)$ — прямому произведению сфер $S^2 \times S^3$, в случае $k < 0$ и $h > 0$ — сфере S^5 .

В доказательстве теоремы, приведенном в п. 4, не используется явно интегрируемость бильярда. Класс гомеоморфности Q^5 полностью определяется классом гомеоморфности области возможного движения, т.е. проекции изоэнергетической поверхности Q_h^5 на стол — на конфигурационное пространство системы. Такой эффект уже встречался ранее:

если стол плоского компактного бильярда гомеоморфен диску, то поверхность Q_h^3 бильярда гомеоморфна сфере S^3 для любого конечного числа точек негладкости границы (см. [28]);

для трехмерных бильярдных систем без потенциала (в случае $k = 0$ и $h > 0$) класс гомеоморфности Q_h^5 определяется только классом гомеоморфности стола (совпадающего с областью возможного движения) и не зависит от выбора $h > 0$ (см. [21]).

Вообще, вопрос о классе гомеоморфности Q_h в бильярдах нетривиален. Например, для систем на бильярдных книжках — кусочно-плоских клеточных комплексах с перестановками [14] — факт того, что Q_h^3 является многообразием, показан в [29].

Из теоремы и несложной проверки следует, что бильярд с притягивающим потенциалом Гука внутри эллипсоида имеет не критические значения $H = h_i$, являющиеся бифуркационными. По разные стороны от них классы гомеоморфности Q^5 различаются. Заметим, что при этих значениях меняется класс гомеоморфности области возможного движения, т.е. проекции изоэнергетической поверхности Q_h^5 на стол (конфигурационное пространство).

Напомним, что схожая ситуация имеет место в более простой системе. Класс гомеоморфности Q_h^3 системы бильярда внутри эллипса $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ с потенциалом Гука $\frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ не зависит от выбора $h > 0$ в случае притягивающего потенциала, т.е. если $k > 0$. В то же время в случае $k < 0$ этот класс меняется при переходе энергии через каждое из трех значений: $ka/2 < kb/2 < 0$.

Данный факт имеет следующее объяснение. При предельном переходе (путем устремления малой полуоси к нулю) от геодезического потока на эллипсоиде к бильярду мы “теряем” половину фазового пространства, которая соответствовала верхней или нижней половине эллипсоида. До перехода к пределу класс гомеоморфности области возможного движения для системы потока на эллипсоиде $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, где $0 < c < b < a$, в поле притягивающего потенциала Гука $\frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ меня-

ется при достижении $h = \frac{kb}{2}$. При этом две компоненты связности, лежащие на верхней и нижней половинах эллипсоида, пересекаются по двум точкам — концам средней полуоси. После предельного перехода ситуация меняется: указанная область для плоского бильярда гомеоморфна диску при каждом $h > 0$. Бильярд с отталкивающим потенциалом отличается: в нем при $h = kb/2$ и $h = ka/2$ тип этой области меняется.

Иными словами, двумерный и трехмерный бильярды ведут себя схожим образом: в случае $k > 0$ тип Q_h не зависит от $h > 0$, а в случае $k < 0$ класс гомеоморфности области возможного движения меняется. Бифуркационными значениями трехмерного бильярда оказываются $h = 0, ka/2, kb/2, kc/2$. Отметим также, что данным значениям энергии потока на эллипсоиде соответствуют положения равновесия — точки, где $dH = 0$.

3. Интегрируемость бильярда внутри n -осного эллипсоида. К. Якоби в работе [30] указал $n-1$ первый интеграл геодезического потока на поверхности $(n-1)$ -мерного эллипсоида. А именно он доказал, что касательные, проведенные к каждой точке геодезической на эллипсоиде, касаются $(n-2)$ квадрик, софокусных с данным эллипсоидом. Интегралами являются параметры этих квадрик и энергия частицы. Они функционально независимы [31] и находятся в инволюции относительно стандартной скобки Пуассона, что несложно проверить. Иными словами, данная система является вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой с $(n-1)$ степенью свободы согласно определению из [5].

В той же работе [30] Якоби проинтегрировал и более общую задачу, когда движение по эллипсоиду происходит под действием центральной упругой силы, центр которой совпадает с центром эллипсоида.

Рассмотрим эту задачу для n -мерного эллипсоида в $(n+1)$ -мерном пространстве и выполним переход от нее к бильярду. Устремив меньшую полуось к нулю, получим бильярд внутри $(n-1)$ -мерного эллипсоида в n -мерном пространстве. Интегрируемость этой кусочно-гладкой гамильтоновой системы следует из результата Якоби [30].

Следуя методу В. В. Козлова, укажем явный вид ее интегралов. Сначала мы приведем первые интегралы I_k задачи без потенциала, т.е. при $k = 0$, а затем вычислим первые интегралы F_k нашей задачи, считая, что $F_k = I_k + f_k$, где функции f_k зависят только от пространственных переменных.

Рассмотрим бильярд с потенциалом Гука внутри эллипсоида, заданного уравнением

$$\frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}} + \dots + \frac{x_1^2}{a_1} = 1, \quad a_1 > a_2 > \dots > a_{n+1} > 0.$$

Пусть сначала $k = 0$. В этом случае найдется $n-1$ софокусных с эллипсоидом квадрик, которых одновременно касаются все прямые, содержащие звенья произвольной выбранной траектории бильярдного шара. Приведем неявное выражение параметров этих квадрик через координаты точек и направляющих векторов. Будем считать, что параметр λ у эллипсоида $\frac{x_n^2}{a_n} + \dots + \frac{x_1^2}{a_1} = 1$ равен нулю. Рассмотрим прямую, проходящую через точку $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в направлении вектора $v = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$. Эта прямая касается софокусной с эллипсоидом квадрики параметра λ в том и только в том случае, когда дискриминант квадратного относительно τ уравнения

$$\frac{(x_n + \tau \dot{x}_n)^2}{a_n - \lambda} + \frac{(x_{n-1} + \tau \dot{x}_{n-1})^2}{a_{n-1} - \lambda} + \dots + \frac{(x_1 + \tau \dot{x}_1)^2}{a_1 - \lambda} = 1$$

равен нулю. Это равносильно тому, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\dot{x}_i^2}{a_i - \lambda} - \sum_{i < j} \frac{(x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i)^2}{(a - \lambda_i)(a - \lambda_j)} = 0.$$

Пусть $K_{ij} = x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i$. Перепишем последнее уравнение, домножив его на $(a_1 - \lambda) \dots (a_n - \lambda)$:

$$\sum_{i=1}^n \dot{x}_i^2 \prod_{j \neq i} (a_j - \lambda) - \sum_{i < j} K_{ij}^2 \prod_{k \neq i, j} (a_k - \lambda) = 0. \quad (1)$$

Заметим, что все корни этого уравнения вещественные и являются первыми интегралами. Также заметим, что коэффициент при старшей степени этого уравнения пропорционален энергии, т.е. является первым интегралом. Следовательно, по теореме Виета коэффициенты при всех степенях многочлена, стоящего в левой части (1), являются первыми интегралами. Поскольку по теореме Абеля уравнение степени 5 и выше, вообще говоря, неразрешимо в радикалах, то вместо параметров квадрик и энергии рассмотрим в качестве первых интегралов коэффициенты при всех степенях этого многочлена.

Обозначим через σ_k^{ij} элементарный симметрический многочлен степени k от переменных $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$, а через ρ_k^i элементарный симметрический многочлен степени k от переменных $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$. Положим $\sigma_0^{ij} = \rho_0^{ij} = 1$, а $\sigma_{-1}^{ij} = 0$. Выпишем коэффициенты многочлена (1) с точностью до константы:

$$I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_k^i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sigma_{k-1}^{ij} K_{ij}^2, \text{ где } k = 0, \dots, n-1.$$

Заметим, что $I_0 = H$.

Несложно убедиться, что эти первые интегралы функционально независимы и попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.

Теперь приведем дополнительные первые интегралы $F_i, i = 1, \dots, n-1$, при $k \neq 0$. Мы будем искать их в виде $F_i = I_i + f_i(x, y, z)$, где f_i — неизвестная гладкая функция, зависящая только от пространственных переменных. Пусть мы нашли функцию f_i , такую, что F_i — первый интеграл задачи без отражения. Поскольку f_i зависит только от пространственных переменных, I_i — первые интегралы задачи с отражением, а при отражении меняется только направление вектора скорости, то F_i будет первым интегралом задачи с отражением. Следовательно, f_i можно искать, рассматривая F_i в качестве первого интеграла задачи без отражения. Заметим, что K_{ij} — первые интегралы задачи без отражения. Поэтому

$$0 = \dot{F}_j = \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i \dot{x}_i \rho_j^i + \partial_{x_i} f_j \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^n (-k \dot{x}_i x_i \rho_j^i + \partial_{x_i} f_j \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i (-k x_i \rho_j^i + \partial_{x_i} f_j).$$

В этом уравнении все переменные разделяются, и мы легко получаем частное решение $f_j = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n \rho_j^i x_i^2$. Обозначив энергию через F_0 , мы приходим к системе функционально независимых первых интегралов

$$F_l = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_l^i \dot{x}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \sigma_{l-1}^{ij} K_{ij}^2 + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n \rho_l^i x_i^2, \text{ где } l = 0, \dots, n-1.$$

Можно показать, что найденные первые интегралы F_0, \dots, F_{n-1} попарно коммутируют относительно стандартной скобки Пуассона.

4. Доказательство теоремы. Докажем несколько лемм, из которых будет следовать утверждение теоремы.

Лемма 1. Пусть $k > 0$ и h — небифуркационный уровень энергии, тогда изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна сфере S^5 .

Доказательство. Пусть h зафиксировано. Как уже было отмечено, область возможного движения есть пересечение бильярдного стола и шара, ограниченного граничной сферой. Рассмотрим сферу радиуса $R < \min\{1, \sqrt{c}, \sqrt{2h/k}\}$. Она разбивает область возможного движения на две компоненты, одна из которых гомеоморфна замкнутому диску D^3 , а другая — прямому произведению сферы S^2 и отрезка. Изоэнергетическая поверхность Q_h в этом случае также разбивается на две компоненты $Q_{h,1}, Q_{h,2}$. Будем считать, что $Q_{h,1}$ соответствует компоненте области возможного движения, гомеоморфной шару. Мы определим отображение $\varphi : Q_h \rightarrow S^5$ отдельно на каждой из компонент $Q_{h,1}, Q_{h,2}$, а далее покажем, что оно согласовано в точках склейки $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$ и является гомеоморфизмом. Будем предполагать, что сфера S^5 стандартно вложена в \mathbb{R}^6 .

Пусть $e \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$ — единичный вектор. Тогда для любого фиксированного $\alpha \in [0, R]$ пары $(\alpha e, v) \in Q_{h,1}$ образуют сферу S^2 , при этом квадраты длин всех таких векторов v равны $2h - k\alpha^2$.

Положим $\varphi(\alpha e, v) = \left(\alpha e, \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{2h - k\alpha^2}} v\right)$. При этом $\|\varphi(\alpha e, v)\| = 1$. Таким образом, мы определили отображение φ на $Q_{h,1}$. Отметим, что построенное отображение непрерывно на $Q_{h,1}$ и инъективно.

Теперь продолжим φ на $Q_{h,2}$. Для произвольного единичного вектора e определим число $g(e) > 0$, такое, что луч Oe пересекает эллипсоид \mathcal{E} в точке $g(e)e$. Для этого рассмотрим линейный оператор $A(x, y, z) = (x/a, y/b, z/c)$ и соответствующую ему векторную норму $\|e\|_A = \sqrt{\langle Ae, e \rangle}$. Луч Oe пересекает эллипсоид \mathcal{E} в точке $g(e)e$ тогда и только тогда, когда $1 = \langle Ag(e)e, g(e)e \rangle = g^2(e) \|e\|_A^2$, т.е. $g(e) = 1/\|e\|_A$.

Возможны два случая: луч Oe пересекает границу области возможного движения либо в точке эллипсоида \mathcal{E} , т.е. $2h - k/\|e\|_A^2 \geq 0$, либо в точке граничной сферы, т.е. $2h - k/\|e\|_A^2 \leq 0$. Для

обоих случаев построим вспомогательный гомеоморфизм f_e , который сопоставляет каждой точке ограничения множества $Q_{h,2}$ на луч Oe точку трехмерного диска D^3 .

Пусть сначала $2h - k/\|e\|_A^2 \leq 0$. В таком случае параметр α изменяется на отрезке $[R, \sqrt{2h/k}]$. Сопоставим точке $(\alpha e, v) \in Q_{h,2}$ точку $f_e(\alpha, v) = \frac{1}{\sqrt{2h - kR^2}}v \in D^3$. Заметим, что это отображение

при фиксированном $\alpha \neq \frac{2h}{k}$ переводит сферу направлений в точке αe в сферу радиуса $\sqrt{\frac{2h - k\alpha^2}{2h - kR^2}}$ в \mathbb{R}^3 . При этом отображение f_e биективно и, очевидно, непрерывно в обе стороны. Следовательно, f_e — гомеоморфизм.

Пусть теперь $2h - k/\|e\|_A^2 > 0$, т.е. луч Oe пересекает границу области возможного движения в точке эллипсоида \mathcal{E} . Следовательно, параметр α изменяется на отрезке $[R, 1/\|e\|_A]$. Отметим, что при $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A]$ в точке αe возникает сфера направлений радиуса $\sqrt{2h - k\alpha^2}$, а при $\alpha = 1/\|e\|_A$ — полусфера направлений радиуса $\sqrt{2h - k/\|e\|_A^2}$. Для построения отображения f_e нам понадобятся вырожденные эллиптические координаты. Рассмотрим семейство квадрик, заданное уравнением

$$\frac{x^2}{p - \mu} + \frac{y^2}{p - \mu} + \frac{z^2}{q - \mu} = 1,$$

где $p > q > 0$. Добавим к этому семейству все плоскости, проходящие через ось Oz . Полученное множество назовем *вырожденным семейством софокусных квадрик*. Можно показать, что через каждую точку, лежащую внутри координатного октанта, проходят ровно три квадрики этого семейства, причем одна из них — эллипсоид, другая — однополостный гиперболоид, а третья — плоскость. Это семейство квадрик порождает *вырожденные эллиптические координаты* (μ_1, μ_2, ψ) , где μ_1 — параметр эллипсоида данного семейства, проходящего через данную точку; μ_2 — параметр однополостного гиперболоида; ψ — угол между плоскостью, проходящей через данную точку и ось Oz , и осью Ox . На рис. 1 проиллюстрированы квадрики из вырожденного семейства софокусных, а также сетка соответствующих вырожденных эллиптических координат. Отметим также, что если параметр μ устремить к q слева, то эллипсоиды с параметром μ сожмутся в круг радиуса $\sqrt{p - q}$, лежащий в плоскости Oxy .

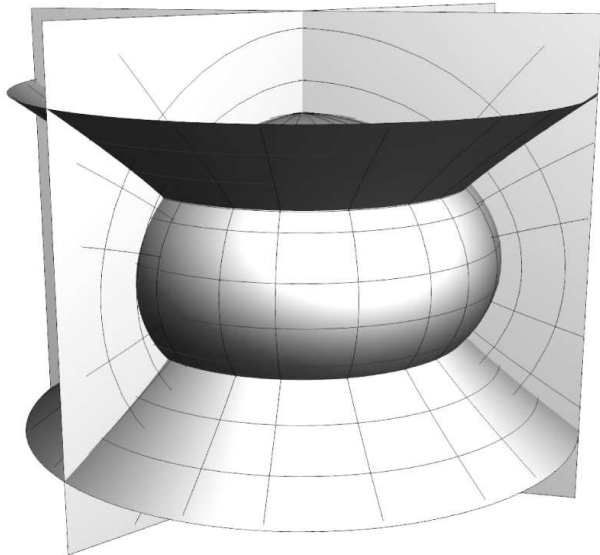


Рис. 1. Три квадрики вырожденного семейства софокусных квадрик: черным выделены координатные линии вырожденных эллиптических координат

ординатах (x', y', z') . Как уже отмечалось ранее, $\|v\|^2 = 2h - k\alpha^2$. Нормируем этот вектор. Пусть $(0, \mu_2, \psi)$ — вырожденные эллиптические координаты конца полученного вектора. Рассмотрим сдвиг этой точки вдоль координатной линии первой координаты в точку с вырожденными эллиптическими координатами $(-kR^2 + k\alpha^2, \mu_2, \psi)$. Считаем, что сдвиг происходит с увеличением первой эллиптической координаты. Координаты полученной точки в системе координат $O'xyz$ обозначим через $f_e(\alpha, v)$. Заметим, что сфера направлений в точке αe при $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A]$ гомеоморфно отображается на эллипсоид с параметром $\mu = -kR^2 + k\alpha^2$, а полусфера направлений в точке $e/\|e\|_A$ — в

Вернемся к построению отображения f_e . Положим $p(e) = 2h - kR^2$, $q(e) = -kR^2 + k/\|e\|_A^2$. Рассмотрим новую декартову систему координат $O'x'y'z'$, такую, что $O' = e/\|e\|_A$, т.е. O' — точка пересечения оси Oe и эллипсоида \mathcal{E} , а ось $O'z'$ сонаправлена с e . В этой системе координат рассмотрим вырожденное семейство софокусных квадрик, заданных уравнением

$$\frac{x'^2}{p(e) - \mu} + \frac{y'^2}{p(e) - \mu} + \frac{z'^2}{q(e) - \mu} = 1.$$

Растянем сначала это семейство квадрик по оси $O'z'$ так, чтобы эллипсоид с параметром $\mu = 0$ стал сферой, т.е. растянем в $\sqrt{q(e)/p(e)}$ раз. А затем сожмем это семейство в $\sqrt{2h - kR^2}$ раз по всем осям. Считаем, что при этих трансформациях вырожденные эллиптические координаты были “вморожены” в данное семейство квадрик. Теперь построим отображение f_e . Пусть $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A]$ и $(\alpha e, v) \in Q_{h,2}$. Перепишем v в координатах (x', y', z') . Как уже отмечалось ранее, $\|v\|^2 = 2h - k\alpha^2$. Нормируем этот вектор. Пусть $(0, \mu_2, \psi)$ — вырожденные эллиптические координаты конца полученного вектора. Рассмотрим сдвиг этой точки вдоль координатной линии первой координаты в точку с вырожденными эллиптическими координатами $(-kR^2 + k\alpha^2, \mu_2, \psi)$. Считаем, что сдвиг происходит с увеличением первой эллиптической координаты. Координаты полученной точки в системе координат $O'xyz$ обозначим через $f_e(\alpha, v)$. Заметим, что сфера направлений в точке αe при $\alpha \in [R, 1/\|e\|_A]$ гомеоморфно отображается на эллипсоид с параметром $\mu = -kR^2 + k\alpha^2$, а полусфера направлений в точке $e/\|e\|_A$ — в

круг с параметром $\mu = q(e)$. Таким образом, отображение f_e биективно отображает множество $Q_{h,2}$, ограниченное на луч Oe , на замкнутый диск D^3 , при этом оно является непрерывным в обе стороны, т.е. f_e — гомеоморфизм.

Теперь доопределим отображение φ на $Q_{h,2}$. Рассмотрим стереографическую проекцию π сферы S^3 , стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, из точки с координатами $(0; 0; 0; -1)$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Пусть $(\alpha e, v) \in Q_{2,h}$, возьмем точку $f_e(\alpha, v) \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$. Сожмем все координаты этой точки в $\sqrt{\frac{1+R}{1-R}}$ раз и рассмотрим прообраз P стереографической проекции этой точки на сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, z, w)$. Тогда положим $\varphi(\alpha e, v) = (w(P)e, x(P), y(P), z(P))$.

Заметим, что построенное нами отображение φ корректно определено в точках склейки $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$. Действительно, по определению $f_e(R, v) = \frac{v}{\sqrt{2h - kR^2}}$. Следовательно, по определению φ на множестве $Q_{h,2}$ имеем $\varphi(Re, v) = \left(Re, \sqrt{\frac{1 - R^2}{2h - kR^2}}v \right)$, что совпадает со значением $\varphi(Re, v)$ по определению φ на множестве $Q_{h,1}$. Заметим также, что по построению отображение φ инъективно. Проверим, что оно сюръективно. Действительно, пусть $(v_1, v_2) \in S^5$, где $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Если $\|v_1\| \leq R$, то рассмотрим $\alpha = \|v_1\|$, $e = v_1/\|v_1\|$ и $v = \sqrt{\frac{2h - k\alpha^2}{1 - \alpha^2}}v_2$. Тогда $(\alpha e, v) \in Q_{h,1}$ и по построению $\varphi(\alpha e, v) = (v_1, v_2)$. Если же $\|v_1\| > R$, то сюръективность следует из сюръективности стереографической проекции и сюръективности отображений f_e .

Осталось доказать, что отображение φ непрерывно. По построению непрерывность может нарушаться только в точках вида αe , где e — единичный вектор, такой, что Oe пересекает границу области возможного движения в точке пересечения эллипсоида \mathcal{E} и граничной сферы, а $\alpha \in [R, \sqrt{2h/k}]$. Убедимся, что в этих точках отображение φ непрерывно. Рассмотрим последовательность единичных векторов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$, такую, что лучи Oe_n пересекают границу области возможного движения строго по эллипсоиду \mathcal{E} , т.е. $2h - k/\|e_n\|_A^2 > 0$. Пусть существует предел этой последовательности, равный вектору e , и пусть луч Oe пересекает границу области возможного движения в точке пересечения эллипсоида \mathcal{E} и граничной сферы, т.е. $2h - 1/\|e\|_A^2 = 0$. Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} p(e_n) - q(e_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2h - k/\|e_n\|_A^2 = 2h - 1/\|e\|_A^2 = 0$, а $p(e_n) = p(e) = 2h - kR^2$ для любого n . Значит, при $n \rightarrow \infty$ эллипсоиды вырожденного семейства софокусных квадрик трансформируются в сферы, однополостные гиперболоиды — в конусы, а вырожденные эллиптические координаты — в сферические координаты. При этом эллипсоид с параметром μ станет шаром радиуса $\sqrt{p(e) - \mu}$. Поскольку отображение f_{e_n} переводит сферу направлений в точке αe_n в эллипсоид с параметром $\mu = -kR^2 + k\alpha^2$, то при $n \rightarrow \infty$ эти эллипсоиды перейдут в шары радиуса $\sqrt{2h - k\alpha^2}$. Однако с учетом того, что мы растягивали наши квадратики в $\sqrt{p(e_n)/q(e_n)}$ раз по оси $O'_n e_n$ и сжимали в $\sqrt{2h - kR^2}$ раз по всем направлениям, предел эллипсоидов $f_{e_n}(\alpha, v)$ при фиксированном α равен сфере радиуса $\sqrt{\frac{2h - k\alpha^2}{2h - kR^2}}$, которая получается по определению $f_e(\alpha e, v)$ при фиксированном α . Заметим также, что при $n \rightarrow \infty$ круги параметра $\mu = q(e)$ сжимаются в точку, поскольку их радиус $\sqrt{p(e_n) - q(e_n)}$ стремится к нулю. Таким образом, отображение φ непрерывно.

Поскольку $\varphi : Q_h \rightarrow S^5$ — непрерывная биекция, а Q_h — компактное подмножество, то φ является гомеоморфизмом. \square

Таким образом, случай $k > 0$ нами полностью разобран. Перейдем к случаю $k < 0$.

Лемма 2. Пусть $k < 0$ и $h \in \left(\frac{kb}{2}, \frac{kc}{2}\right)$, тогда соответствующая изознергетическая поверхность гомеоморфна прямому произведению сфер $S^1 \times S^4$.

Доказательство. В данном случае область возможного движения гомеоморфна полноторию и заключена между эллипсоидом \mathcal{E} и граничной сферой, радиус которой больше \sqrt{c} , но меньше \sqrt{b} . Рассмотрим в \mathbb{R}^3 цилиндрические координаты (r, ψ, z) . Доказательство этой леммы разобьем на две части. Сначала мы покажем, что прообраз полуплоскости $\psi = \text{const}$ при проекции $\pi : Q^5 \rightarrow D$, построенной в п. 2, гомеоморфен сфере S^4 , задав гомеоморфизм $\varphi_\psi(x) : Q_{h,\psi} \rightarrow S^4$. А затем установим, что отображение $\Phi(x, v) : Q_h \rightarrow S^1 \times S^4$, которое сопоставляет каждой паре (x, v) пару $(\psi, \varphi_\psi(x, v))$, где ψ — угловая цилиндрическая координата точки x , взятая по модулю 2π , является гомеоморфизмом.

Рассмотрим эллипс F вида $x^2/a_1 + y^2/a_2 = 1, z = 0$, лежащий строго внутри области возмож-

ного движения. Выберем положительное $\varepsilon < 1$, такое, что замыкание ε -окрестности этого эллипса лежит строго внутри области возможного движения. В каждой полуплоскости $\psi = \text{const}$ рассмотрим окружность радиуса ε с центром в точке O , лежащей на эллипсе F . Такие окружности образуют гладкую поверхность, гомеоморфную тору. Обозначим через K' область возможного движения шара без полнотория, ограниченного этой поверхностью.

Теперь рассмотрим тор вращения в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, заданный уравнениями

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos \chi) \cos \theta, \\ y = (R + \rho \cos \chi) \sin \theta, \\ z = \rho \sin \chi, \end{cases}$$

где $R > \rho > 0$ — константы; $\chi, \theta \in [0, 2\pi]$. Пусть K — замкнутая область, ограниченная торами с $R = 2$ и $\rho = 1$, $\rho = \varepsilon$. Рассмотрим гомеоморфизм $\beta : K \rightarrow K'$, такой, что

- 1) для любого угла $\psi_0 \in [0, 2\pi]$ отображение β гомеоморфно переводит $K \cap \{\psi = \psi_0\}$ на $K' \cap \{\psi = \psi_0\}$;
- 2) прообраз граничной сферы лежит на торе с $R = 2$, $\rho = 1$;
- 3) для любого угла $\psi_0 \in [0, 2\pi]$ и для любой точки P на торе с $R = 2$ и $\rho = \varepsilon$, лежащей в полуплоскости $\psi = \psi_0$, выполнено $\mathbf{OP} = \mathbf{O}'\beta(\mathbf{P})$, где \mathbf{O}' — точка пересечения эллипса F и полуплоскости $\psi = \psi_0$, а \mathbf{O} — точка пересечения тора с $R = 2$, $\rho = 0$ (это окружность) и полуплоскости $\psi = \psi_0$.

Это отображение показано на рис. 2.

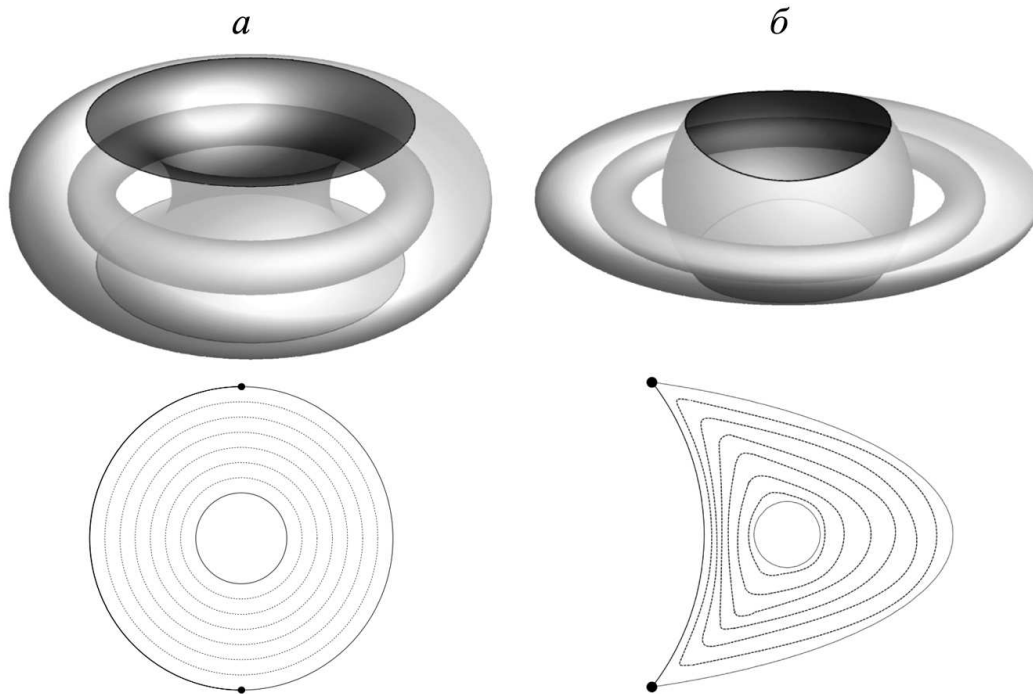


Рис. 2. Иллюстрация отображения β : *a* — область K с выделенным темно-серым участком на границе, образ которого лежит на граничной сфере, и пересечение полнотория K с полуплоскостью $\psi = \psi_0$; *б* — множество K' с выделенным темно-серым участком, лежащим на граничной сфере, и пересечение множества K' с полуплоскостью $\psi = \psi_0$

Теперь зафиксируем полуплоскость $\psi = \psi_0$. Обозначим прообраз полуплоскости $\psi = \psi_0$ при отображении $\pi : Q^5 \rightarrow D$ через Q_{h,ψ_0} , а пересечение стола D и этой полуплоскости через D_{ψ_0} . Пусть \mathbf{O}' — точка пересечения рассматриваемой полуплоскости и эллипса F . Рассмотрим в полуплоскости $\psi = \psi_0$ окружность радиуса ε . Она разбивает D_{ψ_0} на две компоненты $D_{\psi_0,1}$ и $D_{\psi_0,2}$. Будем считать, что $D_{\psi_0,1}$ — часть D_{ψ_0} , лежащая внутри окружности. В таком случае Q_{h,ψ_0} также разбивается на два куска $Q_{h,\psi_0,1}$ и $Q_{h,\psi_0,2}$. Будем считать, что кусок $Q_{h,\psi_0,1}$ соответствует компоненте $D_{\psi_0,1}$.

Сначала построим гомеоморфизм $\varphi(\psi_0, x)$ компоненты Q_{h,ψ_0} и сферы S^4 . Как и в лемме 1, мы определим это отображение на каждом из кусков $Q_{h,\psi_0,i}$, проверим корректность, биективность и непрерывность. Перейдем в систему координат $\mathbf{O}'rz$. Пусть e — произвольный единичный радиус-вектор в этой системе координат. Тогда для произвольного числа $\alpha \in [0, \varepsilon]$ и вектора v , такого, что

$(\alpha e, v) \in Q_{h,\psi_0,1}$, положим $\varphi(\alpha e, v) = \left(\alpha e, \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\|v\|}v\right)$, где координаты v записаны в ортонормированном базисе e_r, e_ψ, e_z . Таким образом, мы определили φ на $Q_{h,\psi_0,1}$. Заметим, что на множестве $Q_{h,\psi_0,1}$ отображение φ непрерывно и инъективно.

Теперь определим φ на множестве $Q_{h,\psi_0,2}$. Для любого единичного радиуса-вектора e необходимо построить вспомогательное отображение f_e , которое гомеоморфно переводит прообраз кривой $\beta(\alpha e)$, $\alpha \in [\varepsilon; 1]$, при проекции π на замкнутый единичный диск D^3 . Построение таких отображений происходит так же, как в лемме 1, но с некоторыми различиями. Рассмотрим отрезок $[\varepsilon e; e]$ и применим к нему гомеоморфизм β . Далее мы рассмотрим два случая: $\beta(e)$ лежит на граничной сфере, $\beta(e)$ не лежит на граничной сфере. Для краткости рассмотрим первый случай. Положим

$f_e(\alpha, v) = \sqrt{\frac{1-\alpha^2}{(1-\varepsilon^2)(2h-k\beta^2(\alpha e))}}v$, где $\alpha \in [\varepsilon; 1]$. Во втором случае нам опять понадобится система вырожденных эллиптических координат.

Теперь рассмотрим стереографическую проекцию π сферы S^3 , стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, из южного полюса на гиперплоскость $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Пусть $\alpha \in [\varepsilon; 1]$, возьмем точку $f_e(\alpha, v) \in \mathbb{R}^3(x, y, z)$. Сожмем все координаты этой точки в $\sqrt{(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)}$ раз и рассмотрим прообраз P стереографической проекции этой точки на сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, z, w)$. Тогда положим $\varphi(\beta(\alpha e), v) = (w(P)e, x(P), y(P), z(P))$.

Корректность, биективность и непрерывность доказываются так же, как в лемме 1. Поскольку Q_{h,ψ_0} — компактное подмножество, то отображение φ является гомеоморфизмом. Теперь рассмотрим отображение $\Phi(x, v) = (\psi(x), \varphi_\psi(x, v))$, где $\psi(x)$ — угловая цилиндрическая координата точки x , взятая по модулю 2π . Это отображение, очевидно, биективно. Заметим, что отображение φ непрерывно относительно ψ , взятого по модулю 2π . Действительно, отображения f_e , которые мы используем для построения φ , непрерывно зависят от цилиндрических координат. Функция

$\varphi(\alpha e, v) = \left(\alpha e, \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\|v\|}v\right)$ также непрерывно зависит от цилиндрических координат. Следовательно, отображение Φ — непрерывная биекция, а поскольку множество Q_h является компактным, то Φ — гомеоморфизм Q_h и $S^1 \times S^4$. \square

Лемма 3. Пусть $k < 0$ и $h \in \left(\frac{kc}{2}, 0\right)$, тогда соответствующая изоэнергетическая поверхность гомеоморфна прямому произведению сфер $S^2 \times S^3$.

Доказательство. Заметим, что область возможного движения ограничена эллипсоидом \mathcal{E} и граничной сферой, радиус которой меньше \sqrt{c} . Следовательно, граничная сфера лежит внутри эллипсоида. Пусть $\sqrt{2h/k} < R < \sqrt{c}$. Рассмотрим сферу радиуса R . Она разбивает область возможного движения на две компоненты. Изоэнергетическая поверхность тоже разбивается на два куска $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$. Будем считать, что $Q_{h,1}$ соответствует компоненте области возможного движения, ограниченной граничной сферой и сферой радиуса R . Как и в лемме 1, мы построим гомеоморфизм $\varphi : Q_h^5 \rightarrow S^2 \times S^3$ отдельно на каждой из компонент $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$, а далее покажем, что он согласован в точках склейки $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$ и является гомеоморфизмом. Мы будем предполагать, что S^2 и S^3 стандартно вложены в \mathbb{R}^3 и \mathbb{R}^4 соответственно.

Сначала определим φ на $Q_{h,1}$. Пусть e — единичный вектор и $\alpha \in [\sqrt{2h/k}, R]$. Рассмотрим вектор $v \in T_{\alpha e}\mathbb{R}^3$, такой, что $(\alpha e, v) \in Q_h^5$. Положим $\varphi(\alpha e, v) = \left(e, \left(\frac{\alpha}{2h-kR^2}v, \sqrt{\frac{k(\alpha^2-R^2)}{2h-kR^2}}\right)\right)$, где первая координата соответствует сфере S^2 , стандартно вложенной в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$, а оставшаяся пара координат — сфере S^3 , стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, причем первая координата пары — тройка (x, y, z) , а вторая — w . Отметим, что построенное отображение непрерывно и инъективно на $Q_{h,1}$.

Теперь доопределим отображение φ на $Q_{h,2}$. Для этого мы воспользуемся вспомогательными отображениями $f_e(\alpha)$, построенными в лемме 1. Рассмотрим стереографическую проекцию π сферы S^3 , стандартно вложенной в $\mathbb{R}^4(x, y, z, w)$, из точки с координатами $(0; 0; 0; 1)$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Пусть точка P — прообраз точки $f_e(\alpha)$ при отображении π . Тогда положим $\varphi(\alpha e, v) = (e, P)$. Заметим, что построенное отображение непрерывно и инъективно на $Q_{h,2}$.

Покажем, что φ корректно определено в точках склейки $Q_{h,1}$ и $Q_{h,2}$. Согласно определению φ на множестве $Q_{h,2}$ имеем $\varphi(Re, v) = (e, P(v))$. Однако $f_e(R) \in S^3$, поэтому $P(v) = (f_e(R), 0) = \left(\frac{v}{\sqrt{2h-kR^2}}, 0\right)$. Следовательно, $\varphi(Re, v) = \left(Re, \left(\frac{v}{\sqrt{2h-kR^2}}, 0\right)\right)$, что совпадает с определением φ на множестве $Q_{h,1}$. Таким образом, φ — непрерывное и корректно определенное отображение.

Нетрудно доказать биективность отображения φ . Поскольку отображение φ является непрерывным биективным отображением компактного пространства, то φ — гомеоморфизм. \square

Лемма 4. Пусть $k < 0$. Тогда если

1) $h \in \left(\frac{ka}{2}, \frac{kb}{2}\right)$, то изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна несвязному объединению двух сфер S^5 ;

2) $h > 0$, то изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна сфере S^5 .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.

Автор приносит благодарность А. Т. Фоменко за внимание к работе.

Исследования выполнены при поддержке гранта РФФ № 20-71-00155 в МГУ имени М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smale S. Topology and mechanics. I // Invent. math. 1970. **10**, N 4. 305–331.
2. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР. 1986. **287**, № 5. 1071–1075.
3. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, № 6. 1276–1307.
4. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, № 3. 546–575.
5. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2 (Монография). Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
6. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations // Adv. Sov. Math. Vol. 6. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1991. 67–146.
7. Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. **191**, № 2. 3–42.
8. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 3. 15–25.
9. Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т., Харчева И. С. Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами // Докл. РАН. 2018. **479**, № 6. 607–610.
10. Ведюшкина В. В., Кибкало В. А. Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 4. 22–28.
11. Кибкало В. А., Фоменко А. Т., Харчева И. С. Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками // Тр. Моск. матем. о-ва. 2021. **82**, № 1. 49–78.
12. Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**, № 10. 127–176.
13. Ведюшкина В. В. Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов // Матем. сб. 2019. **210**, № 3. 17–74.
14. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**, № 12. 17–56.
15. Fomenko A. T., Vedyushkina V. V., Zav'yalov V. N. Liouville foliations of topological billiards with slipping // Russ. J. Math. Phys. 2021. **28**, N 1. 37–55.
16. Vedyushkina V. V., Fomenko A. T. Force evolutionary billiards and billiard equivalence of the Euler and Lagrange cases // Dokl. Math. 2021. **103**, N 1. 1–4.
17. Fomenko A. T., Vedyushkina V. V. Billiards with changing geometry and their connection with the implementation of the Zhukovsky and Kovalevskaya cases // Russ. J. Math. Phys. 2021. **28**, N 3. 317–332.
18. Белозеров Г. В. Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдов на квадраках в трехмерном евклидовом пространстве // Матем. сб. 2020. **211**, № 11. 3–40.
19. Ведюшкина (Фокичева) В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83**, № 6. 63–103.
20. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадраки и многомерные поризмы Понселе // НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. М.; Ижевск, 2010.
21. Белозеров Г. В. Топологическая классификация бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадраками // Матем. сб. 2022. **213**, № 2. 3–36.
22. Zung N. T. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities // Compos. Math. 1996. **101**, N 2. 179–215.

23. *Fomenko A. T., Kibkalo V. A.* Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms // Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics, Understanding Complex Systems / Ed. by V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky. Cham: Springer, 2021. 1–24.
24. *Кобцев И.Ф.* Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ // Матем. сб. 2020. **211**, № 7. 93–120.
25. *Пустовойтов С.Е.* Топологический анализ бильярда в эллиптическом кольце в потенциальном поле // Фунд. и прикл. матем. 2019. **22**, № 6. 201–225.
26. *Пустовойтов С.Е.* Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадраками, в потенциальном поле // Матем. сб. 2021. **212**, № 2. 81–105.
27. *Кобцев И.Ф.* Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 2. 27–33.
28. *Фокичева В.В.* Топологическая классификация интегрируемых бильярдных систем: Канд. дис. М., 2016.
29. *Харчева И.С.* Изоэнергетические многообразия бильярдных книжек // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 4. 12–22.
30. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.: Гостехиздат, 1936.
31. *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикл. матем. и механ. 1995. **59**, № 1. 3–9.

Поступила в редакцию
10.09.2021