размерности $\leqslant n$ имеет порядок

$$\max_{\substack{v_1,\ldots,v_k:\\ k\in\mathbb{N},\ \sum\limits_i \phi(v_i)\leqslant n}} \operatorname{lcm}(v_1,\ldots,v_k).$$

Отсюда получаем, что данная оценка точна и достигается на линейных функциях, т.е. на автоматах с одним состоянием. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю Д. Н. Бабину за постановку задачи и ценные советы по ходу работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gillibert P.* An automaton group with undecidable order and Engel problems // J. Algebra. 2018. **497**. 363–392.
2. *Муравьев Н.В.* Разрешимость задачи определения порядка линейного автомата // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2020. **24**, № 2. 145–155.
3. *Муравьев Н.В.* О порядках линейных над полем рациональных чисел автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2020. **24**, № 4. 119–124.
4. *Гилл А.* Линейные последовательностные машины. М.: Наука, 1974.
5. *Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И.* Автоматы, динамические системы и группы // Динамические системы, автоматы и бесконечные группы: Сб. статей // Тр. МИАН. 2000. **231**. 134–214.
6. *Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
7. *Алешин С.В.* Алгебраические системы автоматов. М.: МАКС Пресс, 2016.
8. *Бабин Д.Н.* Автоматы с линейными переходами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. **23**, № 3. 87–95.
9. *Часовских А.А.* О полноте в классе линейных автоматов // Матем. вопросы кибернетики. 1995. **3**. 140–166.
10. *Darafsheh M.R.* Order of elements in the groups related to the general linear group // Finite Fields and Their Appl. 2005. **11**, N 4. 738–747.
11. *Koo R.* A classification of matrices of finite order over C, R and Q // Math. Magazine. 2003. **76**, N 2. 143–148.

Поступила в редакцию
30.04.2021

УДК 519.21

МНОГОМЕРНЫЕ РЕКОРДЫ ПРИЗНАКОВ ЧАСТИЦ В НАДКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. В. Назмутдинова[1]

Изучаются двумерные рекорды признаков частиц в бессмертных надкритических ветвящихся процессах с непрерывным временем. Найдены предельная интенсивность рекордов одного признака и предельная интенсивность рекордов совместно обоих признаков или хотя бы одного признака. В случае независимых признаков установлено среднее число совместных рекордов за все время. Результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: многомерные распределения, экстремумы, рекорды, копулы, ветвящиеся процессы.

Bivariate records of particle scores in immortal supercritical branching processes with continuous time are studied. The limiting intensity of records for one score and the limiting intensity of records for both scores or at least one score are found. In the case of independent

[1] *Назмутдинова Анна Валерьевна* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: karpenki9@yandex.ru.

Nazmutdinova Anna Valerievna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.

scores, mean numbers of joint records for all time are calculated. The results are illustrated by examples.

Key words: multivariate distributions, extreme values, records, copulas, branching processes.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2022-6-14-20

1. Введение. Интересным направлением современных исследований на стыке теории экстремумов и теории ветвящихся процессов является изучение максимумов случайных признаков частиц в ветвящихся процессах. В фундаментальных в этой области работах Б. Арнольда, Дж. Вилласенора [1] и А. Пейкса [2] рассматривались максимумы независимых случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с дискретным временем, а именно классические процессы Гальтона–Ватсона (см. [3, 4]). Дополнительно предполагалось, что каждая частица обладает некоторым случайным (числовым) признаком. Имеется в виду, что каждой частице ставится в соответствие случайная величина (признак) или случайный вектор (набор признаков). Изучалось поведение максимумов признаков по поколениям или за все время. В работе К. В. Митова и Дж. П. Янева [5] рассматривались также максимумы в процессах с двумя типами частиц.

Нас будут интересовать рекорды, т.е. такие события, когда максимумы одного или нескольких признаков появившихся частиц превосходят максимумы одного или нескольких признаков всех предыдущих частиц соответственно. По рекордам для случайных последовательностей классической является монография [6]. В качестве недавних работ по многомерным рекордам можно указать [7, 8].

В работе А. В. Лебедева [9] рассматривались максимумы одного или двух признаков частиц в бессмертных марковских ветвящихся процессах с непрерывным временем, найдены предельные интенсивности скачков вверх и вниз максимумов одного признака. Наиболее полно результаты А. В. Лебедева, касающиеся максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах, представлены в его докторской диссертации [10, гл. 2], а в [11] можно найти более подробный обзор литературы и приложений.

В работах [12, 13] автор изучал максимумы двух признаков частиц сначала в бессмертных надкритических процессах с непрерывным временем, а затем в критических процессах с миграцией. Доказаны предельные теоремы о предельном совместном распределении нормированных максимумов двух признаков в два момента времени, найдены предельные интенсивности совместных скачков максимумов признаков вверх и вниз, определено среднее число совместных скачков максимумов вверх и вниз. В настоящей работе развиваются идеи этих исследований.

2. Основные предположения, обозначения и определения. Следуя [4, гл. 5], рассмотрим марковский ветвящийся процесс $Z(t)$ с непрерывным временем: пусть процесс начинается с одной частицы, продолжительность жизни каждой частицы имеет показательное распределение с параметром λ, каждая частица оставляет после себя случайное число потомков с производящей функцией

$$h(s) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l s^l, \quad s \in (0,1),$$

где p_l, $l \geqslant 0$, — вероятность иметь l потомков. Для каждой частицы продолжительность ее жизни и число потомков независимы, для разных частиц продолжительность их жизни и число потомков также независимы.

Предполагаем, что число непосредственных потомков не менее одного (таким образом, процесс является бессмертным), а его среднее $\mu > 1$ и дисперсия конечны. При сделанных предположениях

$$h(0) = p_0 = 0, \quad h(s) < s, \quad s \in (0,1), \quad h'(0) = p_1 < 1, \quad 1 < h'(1) = \mu < \infty.$$

Как известно, для надкритических процессов имеет место предел п. н. (см. [4, гл. 5, §11])

$$Z(t)e^{-\kappa t} \to W, \quad t \to \infty, \quad \kappa = \lambda(\mu - 1)$$

с преобразованием Лапласа $\varphi(p) = \mathbf{E}e^{-pW}$, которое определяется обратной функцией

$$\varphi^{-1}(s) = (1-s)\exp\left\{\int_1^s \Big(\frac{\mu-1}{h(u)-u} + \frac{1}{1-u}\Big)du\right\}, \ s \in (0,1).$$

Пусть каждая частица обладает двумя случайными признаками, постоянными в течение всей жизни, причем признаки разных частиц независимы, а признаки одной частицы могут быть зависимы между собой и имеют совместное распределение $F(x, y)$ с непрерывными маргинальными распределениями.

Предположим, что $F(x, y)$ принадлежит области притяжения какого-либо максимум-устойчивого закона, т.е. существуют такие функции $\alpha(r) > 0$, $\beta(r)$, $r > 0$, и невырожденное распределение G, что

$$F^r(\alpha_1(r)x + \beta_1(r), \alpha_2(r)y + \beta_2(r)) \to G(x, y), \qquad r \to \infty.$$

Важную роль в получении и формулировке результатов будет играть современная теория копул, которой мы будем следовать в соответствии с книгой [14].

Копулой C называется многомерная функция распределения на $[0,1]^d$, $d \geqslant 2$, все маргинальные распределения которой являются равномерными на $[0,1]$. Согласно теореме Скляра, любая многомерная функция распределения в $\mathbf{R}^d$ представима в виде

$$F(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)),$$

где F_i, $1 \leqslant i \leqslant d$, — маргинальные функции распределения, C — некоторая копула. Таким образом, всякому многомерному распределению можно поставить в соответствие его копулу. Если маргинальные распределения непрерывны, то такое представление не только существует, но и единственно.

Распределением Кендалла копулы C называется распределение случайной величины $\zeta_C = C(U_1, \ldots, U_d)$, где случайный вектор $(U_1, \ldots, U_d)$ имеет в качестве совместной функции распределения копулу C. Функцию распределения Кендалла будем обозначать через $K_C(t)$, $t \in [0,1]$.

Коэффициент корреляции Кендалла τ случайных величин X и Y определяется как

$$\tau = \mathbf{E}\,\mathrm{sign}\left((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)\right),$$

где (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) — независимые случайные векторы, распределенные как (X, Y). Коэффициент корреляции Кендалла имеет то важное преимущество перед обычным коэффициентом корреляции (Пирсона), что он инвариантен относительно любых строго возрастающих непрерывных преобразований случайных величин (компонент вектора) и в предположении непрерывности маргинальных распределений полностью определяется копулой случайного вектора (X, Y), а именно имеет место следующая формула [14, теорема 5.1.3]:

$$\tau = 4\int_0^1 \int_0^1 C(u, v)dC(u, v) - 1. \tag{1}$$

Таким образом, коэффициент корреляции Кендалла может быть определен формулой (1) для любой двумерной копулы.

Обозначим копулу распределения F через C и копулу G через D.

Тогда верно (см. [14, § 3.3.4]) соотношение

$$D(u, v) = \lim_{n\to\infty} C^n(u^{1/n}, v^{1/n}) \tag{2}$$

и D относится к классу *копул экстремальных значений*. Отметим, что для таких копул $\tau \in [0,1]$.

Некоторые результаты о распределении Кендалла для копул экстремальных значений получены в работе [15].

Будем использовать представление

$$F(x, y) = C(F_x(x), F_y(y)),$$

где $F_x(x)$, $F_x(y)$ — маргинальные функции распределения двумерной функции распределения F.

Используем также понятие *полигамма-функции* порядка $m \geqslant 0$ [16]. Так называют $(m+1)$-ю производную логарифма гамма-функции:

$$\psi_m(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \ln \Gamma(z),$$

для которой также имеет место представление

$$\psi_m(z) = (-1)^{m+1} m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^{m+1}}.$$

3. Интенсивности рекордов. Обозначим через $M_x(t)$ и $M_y(t)$ максимумы соответственно по первому и второму признаку всех частиц, когда-либо существовавших на отрезке $[0, t]$, $t \geqslant 0$. Тогда в момент $t > 0$ рекорд по первому признаку имеет место, если $M_x(t) > M_x(t-0)$; по второму признаку, если $M_y(t) > M_y(t-0)$; хотя бы по одному признаку, если $M_x(t) > M_x(t-0)$ или $M_y(t) > M_y(t-0)$; по обоим признакам (*совместный рекорд*), если $M_x(t) > M_x(t-0)$ и $M_y(t) > M_y(t-0)$.

Процесс установления новых рекордов можно охарактеризовать интенсивностью, т.е. средним числом рекордов в единицу времени. Более точно: если обозначить через $K(J)$ число рекордов (какого-либо из указанных выше типов) на промежутке времени J, то *интенсивностью рекордов* в момент t назовем предел (если он существует)

$$I(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\mathbf{E}K([t, t+\delta])}{\delta},$$

а *предельной интенсивностью рекордов* — предел $\lambda = \lim\limits_{t \to \infty} I(t)$ (если он существует).

Рекорды могут устанавливаться только в моменты появлении новых частиц, в данном процессе это происходит только при делении. При любом делении рекорд может наблюдаться или не наблюдаться с какими-то вероятностями в зависимости от соотношения между признаками новых частиц и предыдущих. Таким образом, можно говорить о вероятности рекорда при делении.

Поскольку в определении рекордов новые частицы сравниваются по своим признаками не только с существующими на тот момент частицами, но и с прекратившими свое существование, необходимо учитывать живые и мертвые частицы. Живыми мы называем частицы от рождения до деления, мертвыми — после их деления.

Обозначим через λ_x, λ_y предельные интенсивности рекордов по первому и второму признаку (x и y) соответственно, через $\lambda_{x \cup y}$ предельную интенсивность рекордов хотя бы по одному признаку (если она существует), а через $\lambda_{x \cap y}$ предельную интенсивность совместных рекордов (если она существует). В нашей задаче существование предельных интенсивностей следует из доказательств теорем, приведенных далее.

Теорема 1. *В предположениях п. 2 предельные интенсивности рекордов по одному признаку равны*

$$\lambda_x = \lambda_y = \kappa.$$

Доказательство. Рассмотрим рекорды по первому признаку, имеющему маргинальную функцию распределения F_x. Обозначим число живых частиц в момент t через $Z_1(t)$, число мертвых через $Z_2(t)$.

Все частицы ветвящегося процесса, когда-либо существовавшие за все время, можно занумеровать в порядке их деления (без учета порядка рождения или поколений). Обозначим через t_n момент n-го деления, $n \geqslant 1$. Заметим, что при n-м делении число мертвых увеличивается на 1, а число живых — на $\xi_n - 1$, где ξ_n, $n \geqslant 1$, — число потомков n-й умершей (поделившейся) частицы. Исходя из усиленного закона больших чисел, получаем (с вероятностью единица)

$$\frac{Z_1(t_n)}{Z_2(t_n)} \to \mu - 1, \quad n \to \infty.$$

Между делениями частиц количество живых и мертвых не меняется, поэтому

$$\frac{Z_1(t)}{Z_2(t)} \to \mu - 1, \quad \frac{Z_1(t)}{Z_1(t) + Z_2(t)} \to \frac{\mu - 1}{\mu}, \quad t \to \infty. \tag{3}$$

Найдем условную интенсивность рекордов по первому признаку при известных числах живых и мертвых. Пусть в какой-то момент число живых N_1, а число мертвых N_2, тогда суммарное число

$N = N_1 + N_2$. Вероятность одного деления за время δ равна $\lambda N_1 \delta + o(\delta)$, а более одного равна $o(\delta)$, $\delta \to 0$. Рекорд устанавливается, если хотя бы одна из новых частиц, образовавшихся при делении, превзойдет все предыдущие по первому признаку. Вероятность этого события при делении составляет

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(1 - h(F_x(x))\Big)\, dF_x^N(x) = \int_0^1 (1 - h(w^{1/N}))\, dw,$$

где сделана замена переменной $w = F_x^N(x)$. Следовательно, условная интенсивность рекордов по первому признаку следующая:

$$I_{x,N_1,N_2} = \lambda N_1 \int_0^1 (1 - h(w^{1/N}))\, dw = \lambda H_N \frac{N_1}{N},$$

где

$$H_N = N \int_0^1 (1 - h(w^{1/N}))\, dw \sim N\mu \int_0^1 (1 - w^{1/N})\, dw = \frac{N\mu}{N+1} \to \mu, \quad N \to \infty.$$

Поскольку $Z_1(t), Z_2(t) \to \infty$ и верно соотношение (3), то для интенсивности рекордов по первому признаку получаем

$$I_x(t) = \mathbf{E} I_{x,Z_1(t),Z_2(t)} = \lambda \mathbf{E}\left(H_{Z_1(t)+Z_2(t)} \frac{Z_1(t)}{Z_1(t)+Z_2(t)}\right) \to \lambda(\mu - 1) = \kappa, \quad t \to \infty,$$

с учетом того, что $0 < Z_1(t)/(Z_1(t)+Z_2(t)) \leqslant 1$ и последовательность H_N, $N \geqslant 1$, ограничена в силу сходимости. Таким образом, $\lambda_x = \kappa$. Аналогично $\lambda_y = \kappa$. □

Теорема 2. *В предположениях п. 2 предельные интенсивности рекордов хотя бы по одному признаку и совместных рекордов соответственно равны*

$$\lambda_{x\cup y} = \kappa(2 - \tau), \quad \lambda_{x\cap y} = \kappa\tau,$$

где τ — коэффициент корреляции Кендалла копулы D.

Доказательство. Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 1 и действовать аналогично.

Найдем сначала предельную интенсивность $\lambda_{x\cup y}$ рекордов хотя бы по одному признаку.

Вероятность одного деления за время δ равна $\lambda N_1 \delta + o(\delta)$, а более одного равна $o(\delta)$, $\delta \to 0$. Рекорд имеет место, если максимум хотя бы одного из признаков новых частиц, образовавшихся при делении, превысит максимум соответствующего признака всех предыдущих частиц (когда-либо существовавших до момента деления). Используя представление $F(x,y) = C(F_x(x), F_y(y))$, получим вероятность рекорда при делении

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(1 - h(F(x,y))\Big)\, dF^N(x,y) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Big(1 - h(w_N^{1/N}(u,v))\Big)\, dw_N(u,v),$$

где сделана замена переменных $u = F_x^N(x)$, $v = F_y^N(y)$, $w_N(u,v) = F^N(x,y) = C^N(u^{1/N}, v^{1/N})$. Следовательно, условная интенсивность рекордов хотя бы по одному признаку равна

$$\lambda N_1 \int_0^1 \int_0^1 \Big(1 - h(w_N^{1/N}(u,v))\Big)\, dw_N(u,v).$$

В силу

$$N(1 - h(s^{1/N})) \to \mu(-\ln s), \quad N \to \infty, \quad 0 < s < 1,$$

и предела (2) аналогично доказательству теоремы 1 получаем

$$\lambda_{x\cup y} = \kappa \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \Big(-\ln D(u,v)\Big) dD(u,v).$$

Интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^1(-\ln D(u,v))dD(u,v)$ можно представить следующим образом: $\mathbf{E}(-\ln\zeta_D)$, где ζ_D — случайная величина с распределением Кендалла копулы D. В [15, с. 189] показано, что функция распределения Кендалла для копул экстремальных значений имеет вид

$$K(t)=t-(1-\tau)t\ln t,\quad t\in(0,1],$$

где τ — коэффициент корреляции Кендалла. Тогда плотность распределения Кендалла равна $K'(t)=\tau-(1-\tau)\ln t$, $t\in(0,1]$, откуда находим

$$\mathbf{E}(-\ln\zeta_D)=\int\limits_0^1(-\ln t)(\tau-(1-\tau)\ln t)dt=\tau\int\limits_0^1(-\ln t)dt+(1-\tau)\int\limits_0^1(-\ln t)^2dt=\tau+2-2\tau=2-\tau.$$

Таким образом,

$$\lambda_{x\cup y}=\kappa(2-\tau).$$

Ясно, что $\lambda_{x\cap y}+\lambda_{x\cup y}=\lambda_x+\lambda_y=2\kappa$, поэтому $\lambda_{x\cap y}=2\kappa-\lambda_{x\cup y}=\kappa\tau$. □

Пример 1. Для копулы Гумбеля $D(u,v)=\exp\{-((-\ln u)^\theta+(-\ln v)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\}$, $\theta\geqslant 1$, из [14, § 5.1.1] имеем $\tau=1-\frac{1}{\theta}$, а значит,

$$\lambda_{x\cup y}=\kappa\Big(1+\frac{1}{\theta}\Big),\quad \lambda_{x\cap y}=\kappa\Big(1-\frac{1}{\theta}\Big).$$

Для копулы Маршалла–Олкина $D(u,v)=u^{1-\alpha}v^{1-\beta}\min\left\{u^\alpha,v^\beta\right\},\quad 0\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1$, из [14, § 5.1.1] имеем $\tau=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$, следовательно,

$$\lambda_{x\cup y}=\kappa\frac{2\alpha+2\beta-3\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta},\quad \lambda_{x\cap y}=\kappa\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}.$$

4. Общее количество рекордов. В случае независимых признаков предельная интенсивность совместных рекордов равна нулю. Изучим подробнее этот случай в предположении фиксированного числа потомков $k\geqslant 2$ и произвольного числа признаков $m\geqslant 2$. Совместными рекордами в таком случае назовем события, когда максимумы всех признаков появившихся при делении частиц превосходят максимумы для всех признаков всех предыдущих частиц соответственно.

Теорема 3. *В предположениях п. 2 о ветвящихся процессах пусть $h(s)=s^k$, $k\geqslant 2$. Тогда в случае $m\geqslant 2$ независимых признаков с непрерывными распределениями среднее число совместных рекордов за все время равно*

$$R_k^m=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\psi_{m-1}\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

где $\psi_m(z)$ — полигамма-функция порядка m.

Доказательство. В данном случае при каждом делении число мертвых увеличивается на 1, число живых на $k-1$, а их суммарное число на k, так что после n-го деления суммарное число частиц равно $kn+1$. Следовательно, при n-м делении вероятность рекорда по одному признаку равна $\dfrac{k}{kn+1}$, а совместного рекорда по m независимым признакам равна $\left(\dfrac{k}{kn+1}\right)^m$. Поскольку процесс бессмертный, то делений происходит бесконечно много, отсюда получаем

$$R_k^m=\sum_{n=1}^\infty\frac{k^m}{(kn+1)^m}=\sum_{n=0}^\infty\frac{k^m}{(k(n+1)+1)^m}=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(n+1+1/k)^m}=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\psi_{m-1}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Следствие. *Имеем $R_k^m\to\zeta(m)$, $k\to\infty$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.*

Пример 2. В силу теоремы 3 при $m=2$ и $k=2$ среднее количество совместных рекордов равно

$$R_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3/2)^2} = \psi_1\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 4 \approx 0.9348,$$

при $m = 2$ и $k = 3$ имеем

$$R_3^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4/3)^2} = \psi_1\left(\frac{4}{3}\right) \approx 1.0956,$$

а при $m = 3$ и $k = 2$

$$R_2^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3/2)^3} = -\frac{1}{2}\psi_2\left(\frac{3}{2}\right) = 7\zeta(3) - 8 \approx 0.4144.$$

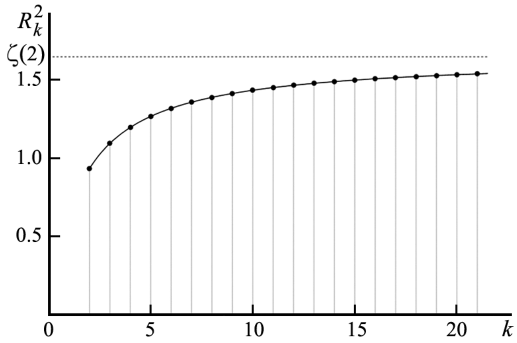

Рис. 1

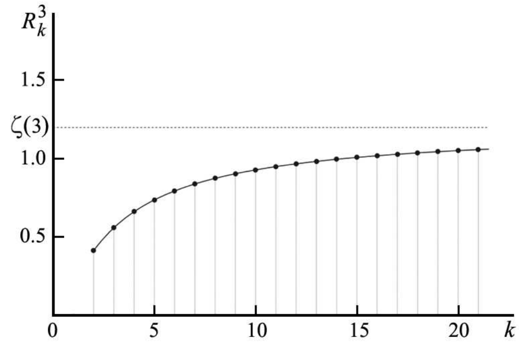

Рис. 2

На рис. 1, 2 представлены графики R_k^m при $m = 2$ и 3 соответственно и k от 2 до 20, для наглядности полученные дискретные значения соединены кривой и добавлены асимптоты. Графики отражают стремление R_k^m к $\zeta(m)$ при $k \to \infty$ согласно следствию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold B.C., Villasenor J.A.* The tallest man in the world // Statist. Theory and Appl. Papers in Honor of H.A. David. N.Y.: Springer, 1996. 81–88.
2. *Pakes A.G.* Extreme order statistics on Galton–Watson trees // Metrika. 1998. **47**, N 1. 95–117.
3. *Ватутин В.А.* Ветвящиеся процессы и их применения. Лекционные курсы НОЦ. Вып. 8. М.: Матем. ин-т РАН, 2008.
4. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
5. *Mitov K.V., Yanev G.P.* Maximum individual score in critical two-type branching processes // C. r. Acad. Bulg. Sci. 2002. **55**, N 11. 7–22.
6. *Невзоров В.Б.* Рекорды. Математическая теория. М.: Фазис, 2000.
7. *Hashorva E., Hüsler J.* Multiple maxima in multivariate samples // Statist. and Probab. Letters. 2005. **75**. 11–17.
8. *Dombry C., Zott M.* Multivariate records and hitting scenarios // Extremes. 2018. **21**. 343–361.
9. *Lebedev A.V.* Maxima of random particles scores in Markov branching processes with continuous time // Extremes. 2008. **11**, N 2. 203–216.
10. *Лебедев А.В.* Неклассические задачи стохастической теории экстремумов: Докт. дис. М., 2016.
11. *Лебедев А.В.* Многомерные экстремумы случайных признаков частиц в ветвящихся процессах с максимум-линейной наследственностью // Матем. заметки. 2019. **105**, № 3. 395–405.
12. *Карпенко А.В.* Новые свойства двумерных максимумов признаков частиц в ветвящихся процессах с непрерывным временем // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2020. № 1. 17–23
13. *Карпенко А.В.* Свойства двумерных максимумов признаков частиц в критических ветвящихся процессах с иммиграцией и непрерывным временем // Матем. заметки. 2021. **109**, № 2. 235–246.
14. *Nelsen R.* An Introduction to Copulas. N.Y.: Springer, 2006.
15. *Ghoudi K., Khoudraji A., Rivest L.* Proprietes statistiques des copules de valeurs extremes bidimensionnelles // Can. J. Statist. 1998. **26**, N 1. 189–190.
16. *Weisstein E. W.* Polygamma Function. URL: https://mathworld.wolfram.com/PolygammaFunction.html.

Поступила в редакцию
21.05.2021