$\mathrm{Re}\,(h_+ - h_*)$. На отрезке Δ величины h_+ и h_* комплексно-сопряженные. Следовательно, $W'_\Delta = 0$, т.е. функция W_Δ постоянна на Δ. Далее, $W_\Gamma = \log|\Phi_+/\Phi_-| + w_\Gamma$, где $\Phi_J = \exp\{\int h_J dz\}$, и w_Γ — постоянная интегрирования. По определению дуги Γ имеем $W_\Gamma = w_\Gamma$ на Γ. Это условие равновесия равносильно положительности меры λ_Γ и S-свойству дуги Γ.

Пусть $p_* < p < p_0$. Тогда множество L состоит из отрезка Δ, одной простой дуги и двух самопересекающихся кривых с общими концами $z_\pm$. Через Γ_* обозначим множество, отмеченное на рис. 3. Меры λ_{Γ_*} и $\lambda^*_\pm$ определим соотношениями

$$h_* = \mathsf{h}_{\lambda^*_+} + \mathsf{h}_{\lambda^*_-}, \quad h_+ = -\mathsf{h}_{\lambda^*_+} + \mathsf{h}_{\lambda_{\Gamma_*}} + 3/z, \quad h_- = -\mathsf{h}_{\lambda^*_-} - \mathsf{h}_{\lambda_{\Gamma_*}}.$$

Тогда условия равновесия задачи (AN) проверяются так же, как в предыдущем случае.

Исследование выполнено при финансовой поддержке МЦФПМ, соглашение с Минобрнауки России № 075–15–2022–283, и РНФ, проект № 19–71–30004 (раздел 3 статьи).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сорокин В.Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде функции Вейля и ее производной для дискретных мер // Матем. сб. 2020. **211**, № 10. 139–156.
2. *Сорокин В.Н.* О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера // Матем. сб. 2010. **201**, № 10. 137–160.
3. *Никишин Е.М.* О совместных аппроксимациях Паде // Матем. сб. 1980. **113**. 499–519.
4. *Сорокин В.Н.* О совместных двухточечных аппроксимациях Паде марковских функций // Укр. матем. журн. 1991. **43**, № 4. 584–588.
5. *Markov A.A.* Deux demonstrations de la convergence de certains fractions continues // Acta Math. 1895. 93–104.
6. *Гончар А.А., Рахманов Е.А.* О задаче равновесия для векторных потенциалов // Успехи матем. наук. 1985. **40**, № 4. 155–156.
7. *Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н.* Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. **188**, № 5. 33–58.
8. *Angelesco A.* Sur deux extensions des fractions continues algebriques // C.r. Acad. sci. Paris. 1919. **168**. 262–265.
9. *Никишин Е.М.* Асимптотическое поведение линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // Изв. вузов. Матем. 1986. № 2. 33–41.
10. *Лысов В.Г.* Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стилтьесовских функций с весом Лагерра // Матем. сб. 2005. **196**, № 12. 99–122.
11. *Сорокин В.Н.* Об асимптотических режимах совместных многочленов Мейкснера. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 46. М., 2016.

Поступила в редакцию
21.04.2021

УДК 511

ОЦЕНКИ ПОРЯДКОВ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТОВ

Н. В. Муравьев [1]

При совпадении входного и выходного алфавитов автомата возможно рассматривать задачу определения его порядка относительно суперпозиции. В работе приводятся точные верхние оценки порядков линейных автоматов над конечными полями и полем рациональных чисел.

[1] *Муравьев Никита Валерьевич* — асп. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ne-ki-tos@yandex.ru.

Muravev Nikita Valerevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.

Ключевые слова: автомат Мили, линейный автомат, автоматная полугруппа, порядок элемента.

If input and output alphabets of a Mealy automaton coincide, then one can study the order problem with respect to the superposition operation. The paper provides exact upper bounds on orders of linear automata over finite fields and rationals.

Key words: Mealy automaton, linear automaton, automata semigroup, order of an element.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2022-6-8-14

Автоматы, у которых совпадают входной и выходной алфавиты, образуют полугруппу относительно суперпозиции. Естественным образом возникает вопрос определения порядка элемента в этой полугруппе. В общем случае эта задача алгоритмически неразрешима [1]. Представляет интерес нахождение классов автоматов с разрешимой задачей определения порядка.

Ранее для конечных полей [2] и поля рациональных чисел [3] автор показал, что задача определения порядка линейного автомата разрешима. Более того, было доказано, что если автомат над этими полями имеет конечный порядок, то этот порядок ограничен числом, зависящим только от поля и размерности входного алфавита. Возникла задача оценки конечного порядка линейного автомата. В настоящей работе доказываются точные оценки порядков линейных автоматов над конечными полями и полем рациональных чисел.

С основными результатами по теории автоматов и теории линейных автоматов можно ознакомиться в работах [4–9].

Автомат $G = (\Sigma, Q, \Omega, \phi, \psi, q_0)$ назовем линейным над полем $\mathbb{F}$, если его канонические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} q(t+1) = Aq(t) + Bx(t), \\ y(t) = Dq(t) + Lx(t), \\ q(0) = q_0, \end{cases}$$

где $q(t) \in Q, x(t) \in \Sigma, y(t) \in \Omega$ — элементы линейных пространств над $\mathbb{F}$; A, B, D, L — линейные операторы между соответствующими пространствами.

Далее все автоматы считаются приведенными [6], т.е. не содержащими эквивалентных состояний.

Легко убедиться, что множество линейных над $\mathbb{F}$ автоматов с совпадающими входными-выходными алфавитами Σ образует моноид относительно суперпозиции.

Порядком элемента в полугруппе будем называть мощность подполугруппы, порожденной данным элементом.

С линейным автоматом G свяжем два формальных ряда:

$$M_G(z) = \sum_{v=0}^{\infty} DA^v B z^{v+1} + L,$$

$$S_G(z) = \sum_{v=0}^{\infty} DA^v q_0 z^v.$$

Они называются передаточной функцией и сдвигом соответственно [6].

Обозначим для каждого бесконечного слова $x = x_0x_1x_2x_3\ldots$ через $x(z)$ его производящую функцию $\sum\limits_{v=0}^{\infty} x_v z^v$. Для произвольного поля $\mathbb{F}$ обозначим через $\mathrm{Frac}(\mathbb{F}[z])$ поле частных кольца многочленов над $\mathbb{F}$ от переменной z. Следующие две леммы являются обобщениями известных результатов [6, 9].

Лемма 1. *Для любого линейного автомата G над полем $\mathbb{F}$ его передаточная функция $M_G(z)$ есть линейный оператор над полем* $\mathrm{Frac}(\mathbb{F}[z])$.

Лемма 2. *Для любого линейного автомата G, входного слова $x \in \Sigma^\infty$ и соответствующего выходного слова $y \in \Omega^\infty$ имеет место следующее равенство:*

$$y(z) = M_G(z)x(z) + S_G(z).$$

Эти леммы позволяют переформулировать задачу определения порядка автомата в терминах матриц. Размерностью линейного автомата будем называть размерность линейной оболочки его входного-выходного алфавита. Будем обозначать конечное поле из m элементов через $\mathbb{F}_m$. Ранее автором была доказана [2] следующая

Теорема 1. *Порядок линейного над $\mathbb{F}_m$ автомата конечен тогда и только тогда, когда коэффициенты характеристического многочлена его передаточной функции суть константы из поля $\mathbb{F}_m$.*

Также было показано, что порядок передаточной функции n-мерного линейного над F_m автомата не превосходит $m^n - 1$. Из этого утверждения следует, что для всяких конечного поля и размерности алфавита существует максимально возможный порядок линейного автомата данной размерности над данным полем. Мы собираемся найти явную формулу для этого порядка. Для этого докажем две вспомогательные леммы. Обозначим через $f(l,p)$ порядок по умножению (матричному) жордановой клетки размера $l \times l$ над полем характеристики p с единицами на диагонали (единичными собственными значениями).

Лемма 3. *Для всяких натурального l и простого p имеем*

$$f(l,p) = \begin{cases} 1, & \textit{если } l = 1; \\ p, & \textit{если } l > 1, p \geqslant l; \\ p^2 \left\lceil \frac{l}{p^2} \right\rceil, & \textit{если } l > 1, p < l, \end{cases}$$

где $\lceil\cdot\rceil$ означает верхнюю целую часть.

Доказательство. Если $l = 1$, то, очевидно, $f(l,p) = 1$.

Пусть теперь $l > 1$. По индукции доказывается, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} 1 & \binom{s}{1} & \binom{s}{2} & \dots & \binom{s}{l-1} \\ 0 & 1 & \binom{s}{1} & \dots & \binom{s}{l-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{s}{l-3} \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица равна единичной в поле характеристики p тогда и только тогда, когда $\binom{s}{1} = \binom{s}{2} = \ldots = \binom{s}{l-1} = 0 \mod p$, т.е. в том случае, когда $p|\binom{s}{1}, p|\binom{s}{2}, \ldots, p|\binom{s}{l-1}$. Наименьшее такое s есть $f(l,p)$. Так как $p|\binom{s}{1}$, то $s = p \cdot r$. Если $p \geqslant l > 1$, то $s = p$ подходит:

$$p|p,\ p|\frac{p(p-1)}{2},\ \ldots,\ p|\frac{p(p-1)\ldots(p-l+2)}{(l-1)!}.$$

Если $p < l$, то один из биномиальных коэффициентов равен $\binom{s}{p} = \frac{s\cdot(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-p+1)}{p!}$ и p делит $\binom{s}{p}$ столько раз, сколько p делит r. Кроме того, $s \geqslant l$, ведь иначе один из биномиальных коэффициентов был бы равен 1 и не делился на p. Но тогда $s = p^2 \cdot k$ и $k \geqslant \left\lceil \frac{l}{p^2} \right\rceil$. Ясно, что $s = p^2 \left\lceil \frac{l}{p^2} \right\rceil$ подходит. Лемма доказана.

Везде далее мы обозначаем наименьшее общее кратное чисел через lcm.

Лемма 4. *Пусть n, m, p суть натуральные числа, такие, что p простое и $m = p^k$ для некоторого k. Тогда*

$$\max_{1\leqslant l\leqslant n}\{m^n - 1, p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-l} - 1, 1\}, f(l,p)\}\} =$$

$$= \begin{cases} \max\{p^n, m^n - 1\} & \textit{при } n = 1, 2 \textit{ или } n = 3, m = 2; \\ m^n - 1 & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Будем рассматривать всевозможные n, m, p, l с использованием леммы 3:
1) $n > l \geqslant 4$, тогда

$$p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-l} - 1, 1\}, f(l,p)\} \leqslant p^3 \left\lceil \frac{l}{p^2} \right\rceil (m^{n-l} - 1).$$

Если $p^2 \geqslant l$, то $p^3 \left\lceil \frac{l}{p^2} \right\rceil (m^{n-l} - 1) \leqslant m^3(m^{n-l} - 1) \leqslant m^n - 1$, иначе

$$p^3 \left\lceil \frac{l}{p^2} \right\rceil (m^{n-l} - 1) \leqslant m^{\lceil log_p l\rceil+1}(m^{n-l} - 1) \leqslant m^{n-l+\lceil log_p l\rceil+1} - 1 \leqslant m^n - 1;$$

2) $n > l = 3$, тогда

$$m^n - 1 \geqslant m^3(m^{n-3} - 1) \geqslant p^3 \left\lceil \frac{3}{p^2} \right\rceil (m^{n-3} - 1) \geqslant p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-3} - 1, 1\}, f(3, p)\};$$

3) при $n > l = 2$

$$m^n - 1 \geqslant m^2(m^{n-2} - 1) \geqslant p^2(m^{n-2} - 1) = p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-2} - 1, 1\}, f(2, p)\};$$

4) $n > l = 1$, тогда

$$m^n - 1 \geqslant p(m^{n-1} - 1) = p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-1} - 1, 1\}, f(1, p)\};$$

5) в случае $n = 1$

$$\max_{1 \leqslant l \leqslant n}\{m^n - 1, p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-l} - 1, 1\}, f(l, p)\}\} = \max\{p, m - 1\};$$

6) $p \geqslant n = l \geqslant 2$, тогда

$$\max\{m^n - 1, p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-l} - 1, 1\}, f(l, p)\}\} = \max\{p^2, m^n - 1\};$$

7) при $2 = p < n = l = 3$

$$\max\{m^n - 1, p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-l} - 1, 1\}, f(l, p)\}\} = \max\left\{m^n - 1, p^3 \left\lceil \frac{n}{p^2} \right\rceil\right\} = \max\{m^3 - 1, 8\};$$

8) при $n = l > p,\ n \geqslant 4$

$$\max\{m^n - 1, p \cdot \mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-l} - 1, 1\}, f(l, p)\}\} = \max\left\{m^n - 1, p^3 \left\lceil \frac{n}{p^2} \right\rceil\right\} = m^n - 1.$$

Объединяя результаты, получаем нужное равенство и заканчиваем доказательство.

Теперь мы готовы доказать основной результат.

Теорема 2. *Если порядок n-мерного линейного над F_m автомата G конечен, то он не превосходит*

$$\begin{cases} \max\{p^n, m^n - 1\} & \text{при } n = 1 \text{ или } n = 2, m = 2; \\ m^n - 1 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где p — характеристика поля F_m, причем данная оценка точна и достигается на автоматах с одним состоянием.

Доказательство. Пусть порядок автомата G конечен. Без ограничения общности автомат можно считать обратимым. Сначала рассмотрим случай $n = 1$. По теореме 1 передаточная функция M_G одномерного автомата конечного порядка является элементом поля $\mathbb{F}_m$. Обозначим через k ее порядок. Тогда сдвиг автомата G^k будет иметь вид

$$(M_G^{k-1} + \ldots + M_G + 1)S_G.$$

Если $k = 1$, то порядок автомата равен p. В противном случае передаточная функция не равна ни нулю, ни единице и $M_G^{k-1} + \ldots + M_G + 1 = 0$, т.е. порядок автомата совпадает с порядком передаточной функции и не превышает $m - 1$. Отсюда получаем нужную оценку при $n = 1$.

Далее считаем, что $n > 1$. Рассмотрим случай, когда все собственные значения передаточной функции не равны единице. Обозначив через k порядок передаточной функции, а через J ее жорданову нормальную форму в алгебраическом замыкании поля $\mathrm{Frac}(\mathbb{F}_m[z])$, получаем

$$M_G^k = I,$$

$$M_G^m + \ldots + M_G + I = 0 \Leftrightarrow J^m + \ldots + J + I = 0,\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что сдвиг автомата G^k равен нулю, т.е. что порядок автомата совпадает с порядком передаточной функции. Обозначив $U = J^{k-1} + \ldots + J + I$, получаем следующее равенство:

$$JU = J(J^{k-1} + \ldots + J + I) = J^{k-1} + \ldots + J + I = U.$$

Здесь J — верхнетреугольная матрица с отличными от нуля и единицы значениями на диагонали. Отсюда и из равенства $JU = U$ следует $U = 0$. Доказательство проводится индукцией по строкам матрицы U. То есть если все собственные значения передаточной функции отличны от единицы, то порядок автомата совпадает с порядком передаточной функции и, как было сказано ранее, не превосходит $m^n - 1$.

Осталось рассмотреть случай, когда некоторые собственные значения равны единице. В таком случае матрица J имеет хотя бы одну жорданову клетку с единицами на диагонали и порядок передаточной функции не превышает наименьшего общего кратного порядков клеток. Из леммы 3 следует, что наибольший возможный порядок достигается, когда мы имеем не более одной клетки с единицами на диагонали. В результате получаем, что порядок передаточной функции не превосходит

$$\max_{1\leqslant l\leqslant n}\{\mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-l}-1, 1\}, f(l,p)\}\}.$$

Порядок автомата либо совпадает с порядком передаточной функции, либо равен порядку передаточной функции, домноженному на характеристику поля. Следовательно, в общем случае порядок автомата не превосходит

$$\max_{1\leqslant l\leqslant n}\{m^n - 1, p\cdot\mathrm{lcm}\{\max\{m^{n-l}-1, 1\}, f(l,p)\}\}.$$

Переписываем полученный максимум согласно лемме 4 и получаем близкую к нужной оценку. Так как при $n = 2, m \neq 2$ и $n = 3, m = 2$ матрица U нулевая для J с единицами на диагонали, в этих случаях порядок автомата совпадает с порядком передаточной функции. Учитывая это, получаем искомую оценку.

Данная оценка точна и достигается на автоматах с одним состоянием, так как над любым конечным полем $\mathbb{F}_m$ найдется матрица размера $n\times n$ порядка $m^n - 1$ (см., например, [10]). Теорема доказана.

Теперь мы хотим получить аналогичный результат для рациональных чисел. Пусть $\phi(k)$ — функция Эйлера, считающая количество натуральных чисел, не превышающих k и взаимно простых с k. Ранее автором была получена оценка сверху порядка линейного над $\mathbb{Q}$ автомата [3]. Следующая теорема уточняет этот результат до неулучшаемого.

Теорема 3. *Если порядок n-мерного линейного над $\mathbb{Q}$ автомата конечен, то он не превосходит*

$$\max_{\substack{v_1,\ldots,v_k:\\ k\in\mathbb{N},\, \sum\limits_i \phi(v_i)\leqslant n}} \mathrm{lcm}(v_1,\ldots,v_k),$$

причем данная оценка точна и достигается на автоматах с одним состоянием.

Доказательство. Пусть порядок n-мерного линейного над $\mathbb{Q}$ автомата G конечен. Тогда конечен порядок его передаточной функции $M_G(z)$. По лемме 1 передаточная функция $M_G(z)$ есть линейный оператор над полем $\mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[z])$, а значит, она есть линейный оператор и над полем $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[z])$. Порядок оператора конечен, поэтому конечны и порядки по умножению его собственных значений (ведь при возведении матрицы в степень собственные значения тоже возводятся в степень). Следовательно, собственные значения, лежащие в алгебраическом замыкании поля $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[z])$, имеют конечные порядки. Но тогда они либо нули, либо корни из единицы. Все корни из единицы в алгебраическом замыкании поля $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[z])$ лежат в $\mathbb{C}$, так как поле $\mathbb{C}\subset\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[z])$ алгебраически замкнуто и при его расширении новых корней добавиться не может. То есть коэффициенты характеристического многочлена, с одной стороны, лежат в $\mathbb{C}$ (так как получаются сложением и умножением собственных значений), а с другой стороны — в $\mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[z])$ (так как получаются сложением и умножением элементов матрицы передаточной функции). Значит, коэффициенты принадлежат $\mathbb{C}\cap\mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[z]) = \mathbb{Q}$.

Получили, что коэффициенты характеристического многочлена передаточной функции суть константы из $\mathbb{Q}$, а корни этого многочлена — комплексные корни из единицы и, возможно, нули. Данное обстоятельство позволяет решать задачу аналогично случаю матриц над $\mathbb{Q}$ [11] .

Для всякого натурального n найдется обратимая матрица над $\mathbb{Q}$ размера $n \times n$ порядка n, а значит, без ограничения общности можно рассматривать только случай обратимой передаточной функции. Тогда условие конечности порядка приобретает вид $M_G^m(z) = I$ для некоторого натурального m. Многочлен $x^m - 1$ имеет следующее разложение на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$:

$$x^m - 1 = \prod_{k|m} \Phi_k(x),$$

$$\Phi_k(x) = \prod_{\substack{1 \leqslant t \leqslant k \\ gcd(t,k)=1}} (x - e^{2i\pi t/k}),$$

где gcd означает наибольший общий делитель.

Минимальный многочлен $p(x)$ передаточной функции должен делить $x^m - 1$, а значит, он имеет вид $p(x) = \Phi_{k_1} \dots \Phi_{k_r}$, где $r \geqslant 1$, $k_1, \dots, k_r$ различны и делят m. При этом характеристический многочлен $\chi(x)$ передаточной функции имеет такой вид:

$$\chi(x) = \Phi_{k_1}^{d_1} \dots \Phi_{k_r}^{d_r},\ d_1\phi(k_1) + \dots + d_r\phi(k_r) = n.$$

По теореме о циклической декомпозиции передаточная функция подобна матрице

$$C(\Phi_{k_1})^{d_1} \oplus \dots \oplus C(\Phi_{k_r})^{d_r},$$

где $C(\Phi_{k_i})$ — сопровождающая матрица многочлена Φ_{k_i}, а прямая сумма матриц образует блочно-диагональную матрицу с исходными матрицами в качестве блоков. Ясно, что порядок такой матрицы равен наименьшему общему кратному порядков клеток, а порядок клетки $C(\Phi_{k_i})$ равен k_i.

Отсюда получаем верхнюю оценку порядка передаточной функции

$$\max_{\substack{v_1,\dots,v_k: \\ k\in\mathbb{N},\ \sum\limits_i \phi(v_i)\leqslant n}} \operatorname{lcm}(v_1, \dots, v_k).$$

Однако автомат определяется не только своей передаточной функцией, но и сдвигом. Сдвиг автомата G^n имеет вид

$$(M_G^{n-1}(z) + \dots + M_G(z) + I)S_G(z).$$

Если k, l — наименьшие натуральные числа, для которых $M_G^k(z) = M_G^l(z)$, $k < l$, то либо

$$(M_G^{l-1}(z) + \dots + M_G^k(z))S_G(z) = 0$$

и порядок автомата совпадает с числом различных степеней его передаточной функции, либо

$$(M_G^{l-1}(z) + \dots + M_G^k(z))S_G(z) \neq 0$$

и порядок автомата бесконечен (так как $\mathbb{Q}$ есть поле характеристики 0).

Итак, если порядок n-мерного линейного над $\mathbb{Q}$ автомата конечен, то он не превосходит

$$\max_{\substack{v_1,\dots,v_k: \\ k\in\mathbb{N},\ \sum\limits_i \phi(v_i)\leqslant n}} \operatorname{lcm}(v_1, \dots, v_k).$$

Осталось показать, что оценка достигается. Заметим, что для всякого набора $v_1, \dots, v_k$ натуральных чисел, на котором достигается максимум

$$\max_{\substack{v_1,\dots,v_k: \\ k\in\mathbb{N},\ \sum\limits_i \phi(v_i)\leqslant n}} \operatorname{lcm}(v_1, \dots, v_k),$$

существует матрица $C(\Phi_{v_1}) \oplus \dots \oplus C(\Phi_{v_k})$ над $\mathbb{Q}$ порядка $\operatorname{lcm}(v_1, \dots, v_k)$. А значит, автомат

$$y(t) = [C(\Phi_{v_1}) \oplus \dots \oplus C(\Phi_{v_k})]x(t)$$

размерности $\leqslant n$ имеет порядок

$$\max_{\substack{v_1,\ldots,v_k:\\ k\in\mathbb{N},\ \sum\limits_i \phi(v_i)\leqslant n}} \operatorname{lcm}(v_1,\ldots,v_k).$$

Отсюда получаем, что данная оценка точна и достигается на линейных функциях, т.е. на автоматах с одним состоянием. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю Д. Н. Бабину за постановку задачи и ценные советы по ходу работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gillibert P.* An automaton group with undecidable order and Engel problems // J. Algebra. 2018. **497**. 363–392.
2. *Муравьев Н.В.* Разрешимость задачи определения порядка линейного автомата // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2020. **24**, № 2. 145–155.
3. *Муравьев Н.В.* О порядках линейных над полем рациональных чисел автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2020. **24**, № 4. 119–124.
4. *Гилл А.* Линейные последовательностные машины. М.: Наука, 1974.
5. *Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И.* Автоматы, динамические системы и группы // Динамические системы, автоматы и бесконечные группы: Сб. статей // Тр. МИАН. 2000. **231**. 134–214.
6. *Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
7. *Алешин С.В.* Алгебраические системы автоматов. М.: МАКС Пресс, 2016.
8. *Бабин Д.Н.* Автоматы с линейными переходами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2019. **23**, № 3. 87–95.
9. *Часовских А.А.* О полноте в классе линейных автоматов // Матем. вопросы кибернетики. 1995. **3**. 140–166.
10. *Darafsheh M.R.* Order of elements in the groups related to the general linear group // Finite Fields and Their Appl. 2005. **11**, N 4. 738–747.
11. *Koo R.* A classification of matrices of finite order over C, R and Q // Math. Magazine. 2003. **76**, N 2. 143–148.

Поступила в редакцию
30.04.2021

УДК 519.21

МНОГОМЕРНЫЕ РЕКОРДЫ ПРИЗНАКОВ ЧАСТИЦ В НАДКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. В. Назмутдинова[1]

Изучаются двумерные рекорды признаков частиц в бессмертных надкритических ветвящихся процессах с непрерывным временем. Найдены предельная интенсивность рекордов одного признака и предельная интенсивность рекордов совместно обоих признаков или хотя бы одного признака. В случае независимых признаков установлено среднее число совместных рекордов за все время. Результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: многомерные распределения, экстремумы, рекорды, копулы, ветвящиеся процессы.

Bivariate records of particle scores in immortal supercritical branching processes with continuous time are studied. The limiting intensity of records for one score and the limiting intensity of records for both scores or at least one score are found. In the case of independent

[1] *Назмутдинова Анна Валерьевна* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: karpenki9@yandex.ru.

Nazmutdinova Anna Valerievna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.