Математика

УДК 517.53

ВОЗВРАТНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА

В. Н. Сорокин [1]

Изучаются возвратные многочлены, частично ортогональные по классической мере Лебега на отрезке, симметричном относительно единичной окружности. Найдено предельное распределение их нулей в терминах мероморфной функции на компактной римановой поверхности. Получена интерпретация предельной меры в терминах задач равновесия теории логарифмического потенциала.

Ключевые слова: формула Родрига, метод перевала, алгебраические функции.

The recurrence polynomials partly orthogonal with respect to Lebesgue measure on the segment symmetric with respect to the unit circle are studied. The limiting distribution of its zeros is obtained in terms of a meromorphic function on compact Riemann surface. The interpretation of the limiting measure is obtained in terms of equilibrium problems in the logarithmic potential theory.

Key words: Rodrigues formula, saddle point method, algebraic functions.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-2022-6-3-8

1. Введение. При изучении обобщенных *многочленов Мейкснера* [1, 2] у нас возникла следующая вспомогательная задача. Зафиксируем число $p > 1$. Через $\Delta = \Delta_p$ обозначим отрезок $[1/p, p]$.

Задача (Λ). Для каждого целого неотрицательного числа $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ требуется найти не равный тождественно нулю многочлен $\Lambda_n(x)$, степень которого не превосходит $2n$, такой, что он

1) является *возвратным многочленом*, т.е.

$$\Lambda_n^\star(x) := x^{2n}\,\Lambda_n(1/x) = \Lambda_n(x);$$

2) удовлетворяет тем же соотношениям ортогональности, что *многочлены Лежандра*:

$$\int_\Delta \Lambda_n(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Утверждение 1. *Задача* (Λ) *имеет единственное (с точностью до нормировки) решение. Степень многочлена* Λ_n *равна* $2n$. *Все его нули простые и лежат на интервале* $(1/p, p)$.

Доказательство. Условия 1 и 2 задачи (Λ) равносильны двум группам соотношений ортогональности соответственно:

$$\int_\Delta \Lambda_n(x) x^k dx = 0, \quad \int_\Delta \Lambda_n(x) x^k \frac{dx}{x^{3n+1}} = 0, \qquad k = 0, \dots, n-1. \tag{1}$$

Функции 1 и $1/x^{3n+1}$ образуют усеченную *AT-систему* [3] на отрезке Δ. Из свойств AT-систем следует утверждение 1. $\square$

Замечание. В [4] мы изучали другой тип возвратных многочленов Лежандра, а именно для отрезка $[0, 1]$.

Утверждение 2. *Справедлива формула Родрига*

$$\frac{\Lambda_n(x)}{x^{3n+1}} = \frac{1}{n!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \frac{M_n(x)}{x^{2n+1}}, \quad M_n(x) = \frac{1}{n!}\Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \big\{(x-p)^{2n}(px-1)^{2n}\big\}.$$

Доказательство. Соотношения ортогональности (1) проверяются интегрированием по частям.

[1] *Сорокин Владимир Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. теории функций и функционального анализа мех-мат ф-та МГУ; вед. науч. сотр. ИПМ им. М.В. Келдыша, e-mail: vladimirs1957@gmail.com.

Sorokin Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Functions and Functional Analysis; Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics.

Цель работы состоит в нахождении предельной меры распределения нулей многочленов $\Lambda_n(x)$.

2. Результаты. *Слабой асимптотикой* многочленов Λ_n назовем следующий предел:

$$V(z) = \lim_{n\to\infty} (-1/n) \log |\Lambda_n(z)| \tag{2}$$

для тех $z \in \mathbb{C}$, для которых он существует. Через $\mathfrak{Z}_n$ обозначим множество нулей многочлена Λ_n. Тогда

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \sum_{\xi\in\mathfrak{Z}_n} \delta_\xi \tag{3}$$

— мера, считающая его нули. Здесь δ_ξ — дельта-функция (мера Дирака), т.е. единичная мера в точке $\xi \in \mathbb{C}$. Будет доказано, что предел (2) существует вне отрезка Δ, что равносильно $*$-слабой сходимости мер (3): $\lambda_n \rightharpoonup \lambda$. Предельная мера λ — это положительная борелевская мера, носитель которой $\mathsf{S}(\lambda)$ лежит на отрезке Δ, а ее полная вариация $\|\lambda\|$ равна 2. При этом предел (2) существует вне носителя предельной меры и равен (с точностью до нормировочной постоянной κ) ее *логарифмическому потенциалу*: $V(z) = V^\lambda(z) + \kappa,\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{S}(\lambda)$. Напомним, что логарифмическим потенциалом положительной борелевской меры называется следующий (конечный или бесконечный) интеграл Лебега:

$$V^\lambda(z) = \int \log \frac{1}{|z-t|} d\lambda(t), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1. *Предельная мера существует.*

Предельная мера зависит от параметра $p > 1$. В точке $p_0 = (1+\sqrt{2})^2$ происходит *бифуркация*. Вначале рассмотрим случай $p > p_0$, когда отрезок Δ “большой”. Введем числа

$$z_\pm = ((1+p^2)(1+110p^2+p^4) \pm \sqrt{d})/18pP,$$

где $d = (1-6p^2+p^4)^3(1+6p^2+p^4)^3$, $P = 1+14p^2+p^4$. Тогда $1/p < z_- < z_+ < p$. Проведем разрезы $\Delta_+ = [1/p, z_-]$, $\Delta_- = [z_+, p]$ и $\Delta_* = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$. Построим риманову поверхность $\mathfrak{R}$ (рода нуль) склейкой трех листов $\mathfrak{R}_J = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta_J$, $J = *, +, -$. Определим мероморфную функцию h : $\mathfrak{R} \mapsto \bar{\mathbb{C}}$ ее дивизором: $(\infty)_*, (\infty)_+, (\infty)_-$ — простые нули, $(0)_+, (1/p)_{+,*}, (p)_{*,-}$ — простые полюсы и условием нормировки: вычет абелева дифференциала $h(z)dz$ в точке $(\infty)_-$ равен 1. Пусть h_J — соответствующие однозначные ветви алгебраической функции h.

Через h_λ обозначим *марковскую функцию* [5] (преобразование Коши) меры λ, а именно

$$\mathsf{h}_\lambda(z) = \int \frac{d\lambda(t)}{z-t}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \mathsf{S}(\lambda).$$

Плотность абсолютно непрерывной меры λ восстанавливается по формуле Сохоцкого

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \mathsf{h}_\lambda(x - i\cdot 0), \quad 1/p < x < p.$$

Теорема 2. *Марковской функцией предельной меры является функция h_*.*

Предъявим теоретико-потенциальное описание предельной меры.

Задача (А). Требуется найти две положительные борелевские меры λ_+ и λ_-, такие, что

1) $\mathsf{S}(\lambda_\pm) \subset \Delta$;

2) $\|\lambda_\pm\| = 1$;

3) с некоторыми постоянными w_+ и w_- выполняются *условия равновесия*

$$W_- := 2V^{\lambda_-} + V^{\lambda_+} \begin{cases} \leqslant w_- | \ \mathsf{S}(\lambda_-), \\ \geqslant w_- | \ \Delta \setminus \Delta_+, \end{cases} \qquad W_+ := V^{\lambda_-} + 2V^{\lambda_+} - 3V^{\delta_0} \begin{cases} \leqslant w_+ | \ \mathsf{S}(\lambda_+), \\ \geqslant w_+ | \ \Delta \setminus \Delta_-. \end{cases}$$

Векторные задачи равновесия изучались в [6, 7]. Задача (А) — это задача *типа Анжелеско* [8].

Теорема 3. *Меры $\lambda_\pm = \lambda|\Delta_\pm$ суть решение задачи* (А).

Мы наблюдаем эффект разрыва носителя предельной меры из-за притяжения зарядом в нуле.

Рассмотрим случай $1 < p < p_0$, когда отрезок Δ “маленький”. Тогда $d < 0$ и точки $z_\pm$ комплексно-сопряженные, лежащие на единичной окружности. Здесь также имеет место бифуркация в точке

$p_* = 1 + \sqrt{2}$. Пусть $1 < p < p_*$, тогда отрезок Δ "очень маленький". Через $\daleth$ обозначим класс аналитических жордановых дуг, симметричных относительно вещественной оси, соединяющих точки z_+ и z_- и лежащих справа от Δ. Зафиксируем произвольную дугу Γ из этого класса. Риманову поверхность $\mathfrak{R}$ алгебраической функции h построим склейкой следующих трех листов: $\mathfrak{R}_* = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, $\mathfrak{R}_+ = \bar{\mathbb{C}} \setminus (\Delta \sqcup \Gamma)$, $\mathfrak{R}_- = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. Тогда по-прежнему справедлива теорема 2, а задача равновесия примет следующий вид.

Задача (N). Требуется найти дугу $\Gamma \in \daleth$ и две положительные борелевские меры λ_Δ и λ_Γ, такие, что

1) $\mathsf{S}(\lambda_\Delta) \subset \Delta$, $\mathsf{S}(\lambda_\Gamma) = \Gamma$;

2) $\|\lambda_\Delta\| = 2$, $\|\lambda_\Gamma\| = 1$;

3) с некоторыми постоянными w_Δ и w_Γ выполнены условия равновесия

$$W_\Delta := 2V^{\lambda_\Delta} - V^{\lambda_\Gamma} - 3V^{\delta_0} \begin{cases} \leqslant w_\Delta | \ \mathsf{S}(\lambda_\Delta), \\ \geqslant w_\Delta | \ \Delta, \end{cases} \qquad W_\Gamma := 2V^{\lambda_\Gamma} - V^{\lambda_\Delta} + 3V^{\delta_0} = w_\Gamma | \ \Gamma;$$

4) дуга Γ обладает *S-свойством*, т.е. $\partial W_\Gamma / \partial \mathbf{n}_+ = \partial W_\Gamma / \partial \mathbf{n}_-$ на Γ, где $\mathbf{n}_\pm$ — единичные нормальные векторы к двум берегам разреза Γ.

Это — задача равновесия *типа Никишина* [9].

Теорема 4. *Задача* (N) *имеет решение при* $\lambda_\Delta = \lambda$.

Пусть $p_* < p < p_0$. Через $\daleth_*$ обозначим класс кривых $\Gamma_* = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, где $\Gamma_\pm$ — аналитические жордановы дуги, симметричные относительно вещественной оси, соединяющие точки $z_\pm$ соответственно с произвольной точкой $z_* \in \Delta$ и лежащие в открытых верхней и нижней полуплоскостях (исключая общую точку z_*). Риманову поверхность $\mathfrak{R}$ функции h склеим из трех листов: $\mathfrak{R}_* = \bar{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, $\mathfrak{R}_\pm = \bar{\mathbb{C}} \setminus (\Delta^*_\pm \cup \Gamma_*)$, где $\Delta^*_+ = [1/p, z_*]$, $\Delta^*_- = [z_*, p]$. По-прежнему верна теорема 2. Задача равновесия следующая.

Задача (AN). Требуется найти кривую $\Gamma_* \in \daleth_*$ и три положительные борелевские меры λ_{Γ_*}, λ^*_+, λ^*_-, такие, что

1) $\mathsf{S}(\lambda_{\Gamma_*}) = \Gamma_*$, $\mathsf{S}(\lambda^*_\pm) \subset \Delta^*_\pm$;

2) $\|\lambda^*_+\| - \|\lambda_{\Gamma_*}\| = \|\lambda^*_-\| + \|\lambda_{\Gamma_*}\| = 1$;

3) с некоторыми постоянными w_{Γ_*} и $w^*_\pm$ выполняются условия равновесия

$$W^*_- := 2V^{\lambda^*_-} + V^{\lambda^*_+} + V^{\lambda_{\Gamma_*}} \begin{cases} \leqslant w^*_- | \ \mathsf{S}(\lambda^*_-), \\ \geqslant w^*_- | \ \Delta^*_-, \end{cases}$$

$$W^*_+ := 2V^{\lambda^*_+} + V^{\lambda^*_-} - V^{\lambda_{\Gamma_*}} - 3V^{\delta_0} \begin{cases} \leqslant w^*_+ | \ \mathsf{S}(\lambda^*_+), \\ \geqslant w^*_+ | \ \Delta^*_+, \end{cases}$$

$$W_{\Gamma_*} := 2V^{\lambda_{\Gamma_*}} - V^{\lambda^*_+} - V^{\lambda^*_-} + 3V^{\delta_0} = w_{\Gamma_*} | \ \Gamma_*;$$

4) кривая Γ_* обладает S-свойством.

Это — смешанная задача Анжелеско–Никишина (см., например, [10, 11]).

Теорема 5. *Задача* (AN) *имеет решение, такое, что* $\lambda = \lambda^*_+ + \lambda^*_-$.

Замечание. Есть другие способы выбора кривых Γ и Γ_*, приводящие к другим задачам равновесия.

3. Доказательство. Одновременно докажем все основные результаты работы. По формуле Коши

$$M_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(x)} \frac{(t-p)^{2n}(pt-1)^{2n}}{(t-x)^{n+1}} \, dt, \tag{4}$$

где интеграл берется по любому контуру, обходящему точку x. Применим метод перевала. Рассмотрим многозначную функцию

$$S(t;x) = 2\log(t-p) + 2\log(pt-1) - \log(t-x).$$

Уравнение на критические точки $\partial S / \partial t = 0$ равносильно квадратному уравнению

$$3pt^2 - ((1+p^2) + 4px)t + (2(1+p^2)x - p) = 0. \tag{5}$$

Дискриминант уравнения (5) равен

$$D = 16p^2x^2 - 16p(1+p^2)x + (1 + 14p^2 + p^4).$$

Он имеет следующие корни: $x_\pm = (2(p^2+1) \pm \sqrt{3}(p^2-1))/4p$. Это точки ветвления второго порядка алгебраической функции $t(x)$. При этом $1/p < x_- < x_+ < p$. Вне отрезка $[x_-, x_+]$ выделяются две однозначные ветви $t_\pm(x)$. Та из них, для которой $t_+(x) \sim 4x/3, x \to \infty$, дает основной вклад в асимптотику интеграла (4). Через $S_+(x) = S(t_+(x); x)$ обозначим соответствующее критическое значение. Тогда предел

$$\tilde{V}(x) := \lim_{n\to\infty} (-1/n) \log |M_n(x)|, \quad x \in \mathbb{C} \setminus [x_-, x_+],$$

существует и равен $\tilde{V} = -\operatorname{Re} S_+$.

По формуле Коши

$$\frac{\Lambda_n(z)}{z^{3n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(z)} \frac{M_n(x)}{x^{2n+1}} \frac{dx}{(x-z)^{n+1}}, \tag{6}$$

где контур интегрирования обходит точку z и не содержит внутри точки нуль. Применим метод перевала. Рассмотрим многозначную функцию

$$\Sigma(x; z) = S_+(x) - 2\log x - \log(x - z).$$

Уравнение на критические точки $\partial\Sigma/\partial x = 0$ равносильно кубическому уравнению

$$(6(p^2+1) - 4pz)x^3 - (9p + 7(p^2+1)z - 3pz^2)x^2 + (12pz + 2(p^2+1)z^2)x - 4pz^2 = 0. \tag{7}$$

Дискриминант уравнения (7) равен

$$Q = (z-p)(pz-1)\tilde{Q}, \ \tilde{Q} = 9pP - (1+p^2)(1+110p^2+p^4)z + 9pPz^2.$$

В бесконечности одна из ветвей алгебраической функции $x(z)$ ведет себя как $x_*(z) \sim 3z/4$. Она голоморфна вне отрезка Δ и дает основной вклад в асимптотику интеграла (6). Через $\Sigma_*(z) = \Sigma(x_*(z); z)$ обозначим соответствующее критическое значение. Тогда предельная мера существует и ее потенциал равен $V^\lambda(z) = -\kappa - 3\log|z| - \operatorname{Re}\Sigma_*(z)$, где κ — некоторая постоянная.

Положим $h = \mathsf{h}_\lambda$. Тогда

$$h(z) = -\frac{\partial}{\partial z} V^\lambda(z) = \frac{3x - 2z}{z(x-z)}, \quad x = x_*(z).$$

Исключая переменную x, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} &z(z-p)(pz-1)h^3 - 3(z-p)(pz-1)h^2 - \\ &-2(p^2+1)h + 4p = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Дискриминант уравнения (8) равен Q. Алгебраическая функция $h(z)$ имеет четыре точки ветвления 2-го порядка, а именно: $1/p, p$ и $z_\pm$ — корни многочлена $\tilde{Q}$. (Кратный корень $z_+ = z_- = 1$ — ветвление 3-го порядка.) Дискриминант многочлена $\tilde{Q}$ равен d. В точке p_0 дискриминант d обращается в нуль. Пусть $p_0 < p < +\infty$. Тогда $d > 0$ и $1/p < z_- < z_+ < p$.

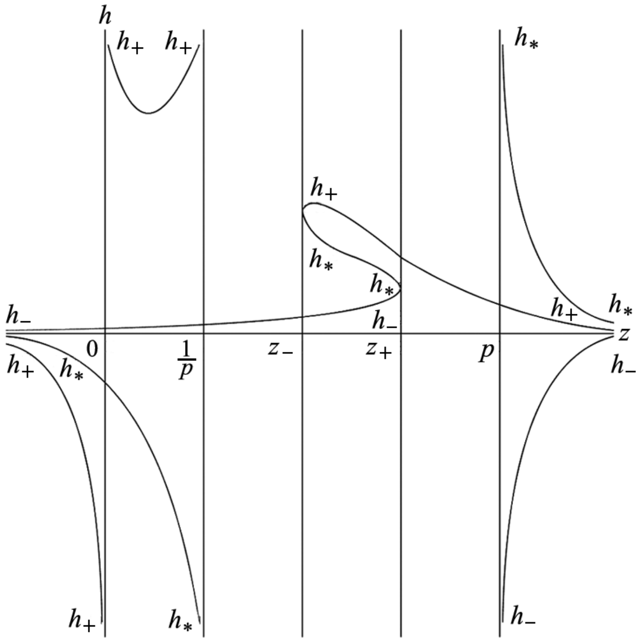

Рис. 1

Выделим ветви функции $h(z)$ при $z \to \infty$:

$$h_{*,+}(z) = (2/z)(1 + a_{*,+}/z) + O(1/z^3), \quad h_-(z) = -1/z + O(1/z^2),$$

где $a_{*,+}$ — корни многочлена $3pa^2-(p^2+1)a-p=0$, такие, что $a_+<0<a_*$. Из элементарного исследования функции h на вещественной оси следует, что ветвь h_* голоморфна вне Δ_*, а ветви $h_\pm$ мероморфны вне отрезков $\Delta_\pm$ соответственно. На рис. 1 показан график функции h на вещественной оси.

Имеем $h_*=\mathsf{h}_{\lambda_+}+\mathsf{h}_{\lambda_-}$, $h_-=-\mathsf{h}_{\lambda_-}$, $h_+=3/z-\mathsf{h}_{\lambda_+}$, где $\lambda_\pm$ — положительные борелевские меры с носителями $\Delta_\pm$ соответственно и с полными вариациями 1. Проверим условия равновесия задачи (A). Функции $W_\pm$ непрерывны в $\mathbb{C}$. Вычислим вещественные производные этих функций на вещественной оси: $W'_\pm=\operatorname{Re}(h_\pm-h_*)$. Если $1/p<x<z_-$, то величины $h_+(x)$ и $h_*(x)$ комплексно-сопряженные. Следовательно, $W'_+(x)=0$, т.е. функция $W_+=w_+$ постоянна на Δ_+. Если $z_-<x<z_+$, то $h_+(x)>h_*(x)$. Следовательно, $W'_+(x)>0$, т.е. функция W_+ возрастает на отрезке $[z_-,z_+]$ и тем самым $W_+\geqslant w_+$ на этом отрезке. Для обобщенного потенциала W_- условия равновесия проверяются аналогично.

Пусть $1<p<p_0$. Положим $\Phi(z)=z^3\exp\{\Sigma_*(z)\}$. Имеем

$$\Phi(z)=\frac{z^3}{x^2(x-z)}\,\frac{(t-p)^2(pt-1)^2}{t-x},$$

где величины t и x удовлетворяют уравнениям (5) и (7) соответственно. Исключая эти величины, приходим к уравнению

$$\Phi^3+a\Phi^2+b\Phi+c=0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
&a=((1+p^2)(1-34p^2+p^4)+4p(5+22p^2+5p^4)z+(1+p^2)(1-34p^2+p^4)z^2)/p,\\
&b=(1-p^2)^4(-27p^2+18p(1+p^2)z+(1-4p^2+p^4)z^2+18p(1+p^2)z^3-27p^2z^4)/p^2,\\
&c=16(1-p^2)^8z^3/p^2.
\end{aligned}$$

Пусть $\{\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3\}$ — множество корней уравнения (9) (с учетом кратности). Положим

$$\begin{aligned}
y_1&=\Phi_2/\Phi_3+\Phi_3/\Phi_2,\\
y_2&=\Phi_3/\Phi_1+\Phi_1/\Phi_3,\\
y_3&=\Phi_1/\Phi_2+\Phi_2/\Phi_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

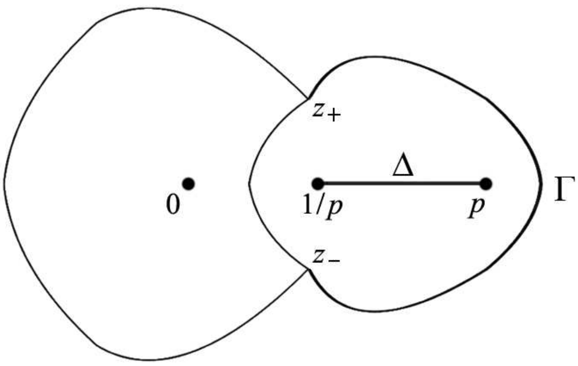

Рис. 2

Величины (10) служат корнями уравнения $y^3+Ay^2+By+C=0$, коэффициенты которого вычисляются по теореме Виета:

$$\begin{aligned}
&A=(3c-ab)/c,\\
&B=(a^3c+3c^2+b^3-5abc)/c^2,\\
&C=(c^2-a^2b^2+2a^3c+2b^3-4abc)/c^2.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\mathsf{L}=\mathsf{L}_p$ множество точек $z\in\mathbb{C}$, для которых хотя бы два корня уравнения (9) имеют равные модули. Тогда L — это прообраз отрезка $[-2,2]$ при отображении $y(z)$. Структура этого множества зависит от параметра p. Снова имеет место бифуркация, когда при $z=p$ все три корня уравнения (9) имеют равные модули. Критическое значение p_* находим из уравнения $c=ab$.

Пусть $1<p<p_*$. Тогда L состоит из отрезка Δ и трех простых аналитических дуг с общими концами $z_\pm$ (см. рис. 2). Одну из них (правую) обозначим Γ. Имеем $h_*=\mathsf{h}_{\lambda_\Delta}$, $h_+=-\mathsf{h}_{\lambda_\Delta}+\mathsf{h}_{\lambda_\Gamma}+3/z$, $h_-=-\mathsf{h}_{\lambda_\Gamma}$, где $\lambda_\Delta=\lambda$ — мера величины 2 с носителем Δ, λ_Γ — мера величины 1 с носителем Γ. Эти меры решают задачу (N). Действительно, на вещественной оси $W^*_\Delta=\operatorname{Re}(-2\mathsf{h}_{\lambda_\Delta}+\mathsf{h}_{\lambda_\Gamma}+3/x)=$

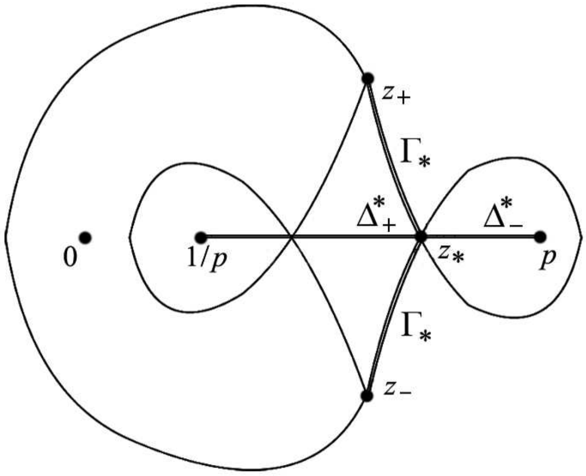

Рис. 3

$\mathrm{Re}\,(h_+ - h_*)$. На отрезке Δ величины h_+ и h_* комплексно-сопряженные. Следовательно, $W'_\Delta = 0$, т.е. функция W_Δ постоянна на Δ. Далее, $W_\Gamma = \log|\Phi_+/\Phi_-| + w_\Gamma$, где $\Phi_J = \exp\{\int h_J dz\}$, и w_Γ — постоянная интегрирования. По определению дуги Γ имеем $W_\Gamma = w_\Gamma$ на Γ. Это условие равновесия равносильно положительности меры λ_Γ и S-свойству дуги Γ.

Пусть $p_* < p < p_0$. Тогда множество L состоит из отрезка Δ, одной простой дуги и двух самопересекающихся кривых с общими концами $z_\pm$. Через Γ_* обозначим множество, отмеченное на рис. 3. Меры λ_{Γ_*} и $\lambda^*_\pm$ определим соотношениями

$$h_* = \mathsf{h}_{\lambda^*_+} + \mathsf{h}_{\lambda^*_-}, \quad h_+ = -\mathsf{h}_{\lambda^*_+} + \mathsf{h}_{\lambda_{\Gamma_*}} + 3/z, \quad h_- = -\mathsf{h}_{\lambda^*_-} - \mathsf{h}_{\lambda_{\Gamma_*}}.$$

Тогда условия равновесия задачи (AN) проверяются так же, как в предыдущем случае.

Исследование выполнено при финансовой поддержке МЦФПМ, соглашение с Минобрнауки России № 075–15–2022–283, и РНФ, проект № 19–71–30004 (раздел 3 статьи).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сорокин В.Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде функции Вейля и ее производной для дискретных мер // Матем. сб. 2020. **211**, № 10. 139–156.
2. *Сорокин В.Н.* О многочленах совместной ортогональности для дискретных мер Мейкснера // Матем. сб. 2010. **201**, № 10. 137–160.
3. *Никишин Е.М.* О совместных аппроксимациях Паде // Матем. сб. 1980. **113**. 499–519.
4. *Сорокин В.Н.* О совместных двухточечных аппроксимациях Паде марковских функций // Укр. матем. журн. 1991. **43**, № 4. 584–588.
5. *Markov A.A.* Deux demonstrations de la convergence de certains fractions continues // Acta Math. 1895. 93–104.
6. *Гончар А.А., Рахманов Е.А.* О задаче равновесия для векторных потенциалов // Успехи матем. наук. 1985. **40**, № 4. 155–156.
7. *Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н.* Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. **188**, № 5. 33–58.
8. *Angelesco A.* Sur deux extensions des fractions continues algebriques // C.r. Acad. sci. Paris. 1919. **168**. 262–265.
9. *Никишин Е.М.* Асимптотическое поведение линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // Изв. вузов. Матем. 1986. № 2. 33–41.
10. *Лысов В.Г.* Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для системы стилтьесовских функций с весом Лагерра // Матем. сб. 2005. **196**, № 12. 99–122.
11. *Сорокин В.Н.* Об асимптотических режимах совместных многочленов Мейкснера. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 46. М., 2016.

Поступила в редакцию
21.04.2021

УДК 511

ОЦЕНКИ ПОРЯДКОВ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТОВ

Н. В. Муравьев [1]

При совпадении входного и выходного алфавитов автомата возможно рассматривать задачу определения его порядка относительно суперпозиции. В работе приводятся точные верхние оценки порядков линейных автоматов над конечными полями и полем рациональных чисел.

[1] *Муравьев Никита Валерьевич* — асп. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ne-ki-tos@yandex.ru.

Muravev Nikita Valerevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intellectual Systems.