

УДК 531.01

## КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВЯЗКИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

А. В. Карапетян<sup>1</sup>

Обсуждается задача о движении по инерции твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью, при наличии внутреннего трения. Дан глобальный качественный анализ динамики системы и указаны ее предельные движения.

*Ключевые слова:* перманентные вращения, устойчивость, предельные движения.

The problem of motion by inertia of a rigid body with an ellipsoidal cavity filled with liquid in the presence of internal friction is discussed. The global qualitative analysis of system dynamics and the limiting motions are given.

*Key words:* permanent rotations, stability, limiting motions.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о движении по инерции твердого тела с полостью, целиком заполненной однородной жидкостью. При этом центр масс  $O$  тела с жидкостью без уменьшения общности можно считать неподвижным. Пусть  $Ox_1x_2x_3$  — главные оси инерции тела, а  $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$  — его тензор инерции для точки  $O$ . Предположим, что полость представляет собой трехосный эллипсоид с полуосями  $a_1, a_2, a_3$  и центром в точке  $O$ . При этом центральный эллипсоид инерции жидкости имеет вид  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ , где

$$I_1 = \frac{m}{5} (a_2^2 + a_3^2) \quad (123),$$

$m$  — масса жидкости. Здесь и далее символ (123) означает, что два невыписанных соотношения получаются из выписанного циклической перестановкой индексов 1, 2, 3.

Введем тензор инерции эквивалентного твердого тела [1]  $\mathbf{J}^* = \text{diag}(J_1^*, J_2^*, J_3^*)$ , где

$$J_1^* = \frac{m}{5} \frac{(a_2^2 - a_3^2)^2}{a_2^2 + a_3^2} \quad (123),$$

и тензоры  $\mathbf{A} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ ,  $\mathbf{B} = \text{diag}(B_1, B_2, B_3)$ ,  $\mathbf{C} = \text{diag}(C_1, C_2, C_3)$  по формулам  $\mathbf{A} = \mathbf{J} + \mathbf{J}^*$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{J}^*$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$ . Кроме того, введем вспомогательный тензор  $\mathbf{B}^* = \text{diag}(B_1^*, B_2^*, B_3^*)$ , где

$$B_1^* = 2B_1 \frac{a_1^2(a_2^2 + a_3^2)}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1^2 + a_3^2)} \quad (123).$$

Предположим, что жидкость совершает простое [1] движение, причем взаимодействие жидкости со стенками полости описывается вязким трением, линейным по разности угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  тела и половины вектора вихря  $\boldsymbol{\Omega}$  жидкости. При этом уравнения движения системы можно представить в виде (ср. с [1–4])

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}] = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{B}^*\boldsymbol{\Omega}] = -\mathbf{D}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), \quad (2)$$

где тензор  $\mathbf{D} = \text{diag}(D_1, D_2, D_3)$  характеризует интенсивность вязкого трения ( $D_{1,2,3} > 0$ ). Уравнение (1) выражает закон изменения кинетического момента системы  $\mathbf{K} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}$ , а уравнение (2) — закон изменения половины вектора вихря жидкости. При отсутствии трения ( $\mathbf{D} = 0$ ) это уравнение

---

<sup>1</sup> Карапетян Александр Владиленович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ.

*Karapetyan Alexander Vladilenovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

совпадает с уравнением Гельмгольца [1]. Очевидно, уравнения движения системы (1), (2) допускают невозрастающую функцию (кинетическую энергию системы)

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) \leq h, \tag{3}$$

где  $h$  — начальное значение кинетической энергии ( $\dot{H} = -(\mathbf{D}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})) \leq 0$ ), и первый интеграл (квадрат модуля кинетического момента)

$$K^2 = (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) = k^2. \tag{4}$$

**2. Перманентные вращения и их устойчивость.** Согласно модифицированной теории Рауса [5, 6], критические точки функции (3) при условии (4) соответствуют стационарным движениям системы. Для отыскания этих точек введем функцию  $V = H - \frac{1}{2}\lambda(K^2 - k^2) = V(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda)$  ( $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа) и выпишем условия ее стационарности по входящим в нее переменным. Уравнение  $\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0$  совпадает с соотношением (4), а уравнения  $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0$  и  $\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = 0$  принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_1} = A_1(1 - \lambda A_1)\omega_1 - \lambda A_1 B_1 \Omega_1 = 0 \tag{123},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \Omega_1} = -\lambda A_1 B_1 \omega_1 - B_1(1 - \lambda B_1)\Omega_1 = 0 \tag{123}$$

( $\omega_{1,2,3}$  и  $\Omega_{1,2,3}$  — компоненты векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  в главных осях инерции тела).

Система уравнений (5) имеет ненулевое решение, если и только если  $\lambda = 1/C_1$  (123). При этом из системы (5) и уравнения (4) следует, что  $\omega_1 = \Omega_1 = k/C_1$  (123). Полагая  $C_1 \neq C_2 \neq C_3 \neq C_1$ , заключаем, что функция (3) при условии (4) имеет три однопараметрических семейства критических точек вида

$$\omega_1 = \Omega_1 = k/C_1, \quad \omega_2 = \Omega_2 = \omega_3 = \Omega_3 = 0 \tag{123).}$$

Эти точки соответствуют перманентным движениям системы как твердого тела вокруг главных осей инерции.

Исследуем характер этих критических точек. Для этого найдем вторую вариацию  $\delta^2 V$  функции  $V$  на линейном многообразии  $\delta(K^2) = 0$ . Для решений (6) эти многообразия имеют вид

$$A_1 \delta \omega_1 + B_1 \delta \Omega_1 = 0 \tag{123).}$$

Вычисляя вторые производные функции  $V$  по  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$  на решении (6.1) (с учетом соотношения  $\lambda = 1/C_1$ ), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \omega_1^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \Omega_1^2} = \frac{A_1 B_1}{C_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial \omega_1 \partial \Omega_1} &= -\frac{A_1 B_1}{C_1}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \omega_j^2} &= \frac{A_j(C_1 - A_j)}{C_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial \Omega_j^2} &= \frac{B_j(C_1 - B_j)}{C_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial \omega_j \partial \Omega_j} &= \frac{A_j B_j}{C_1} \quad (j = 2, 3). \end{aligned}$$

Таким образом,  $2\delta^2 V \Big|_{(7)} = V_1 + V_2 + V_3$ , где

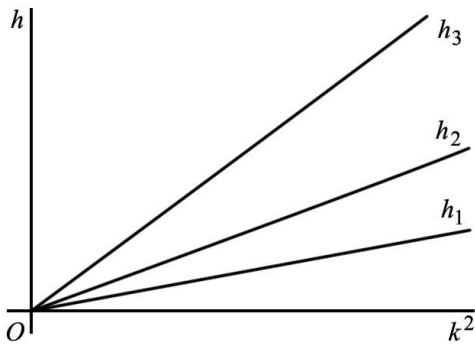
$$V_1 = \frac{A_1 B_1}{C_1} (\delta \omega_1 - \delta \Omega_1)^2 \Big|_{(7)} = A_1 (\delta \omega_1)^2 > 0,$$

$$V_j = [A_j(C_1 - A_j)(\delta \omega_j)^2 + 2A_j B_j (\delta \omega_j)(\delta \Omega_j) + B_j(C_1 - B_j)(\delta \Omega_j)^2] C_1^{-1} \quad (j = 2, 3).$$

Квадратичная форма  $V_1$  всегда положительна, а квадратичные формы  $V_j$  положительны только при  $C_1 > C_j$  ( $j = 2, 3$ ). Пусть для определенности  $C_1 > C_2 > C_3$ . При этом функция (3) при условии (4) принимает строго минимальное значение на решении (6.1), а на решениях (6.2) и (6.3) не принимает даже нестрого минимальных значений.

Очевидно, множество всех стационарных движений (6) системы (1), (2) является полным в том смысле, что функция  $H$  убывает на всех решениях системы (1), (2), отличных от (6). Это

означает, что если  $C_1 > C_2 > C_3$ , то решения (6.1) устойчивы, причем любое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к одному из решений семейства (6.1), которое соответствует возмущенному значению постоянной  $k^2$ , а решения (6.2) и (6.3) неустойчивы.



Геометрическая интерпретация

**3. Геометрическая интерпретация и предельные движения системы.** Дадим геометрическую интерпретацию полученных результатов и (на основе этой интерпретации) глобальный качественный анализ динамики рассматриваемой системы. Вычисляя значение кинетической энергии системы на стационарных движениях (6), имеем

$$h = h_1 = k^2/2C_1 \quad (123).$$

Рассмотрим плоскость  $(k^2; h)$  и построим на этой плоскости прямые  $h = h_{1,2,3}$  (см. рисунок). Прямая  $h = h_1$  соответствует устойчивым равномерным вращениям системы вокруг оси наибольшего момента инерции, а прямые  $h = h_2$

и  $h = h_3$  — неустойчивым равномерным вращениям вокруг осей соответственно среднего и наименьшего моментов инерции. Все точки прямых  $h = h_{1,2,3}$  инвариантны относительно фазового потока системы (1), (2), а все остальные точки плоскости  $(k^2; h)$  эволюционируют вдоль прямых  $k^2 = \text{const}$  в сторону уменьшения  $h$ , асимптотически (при  $t \rightarrow +\infty$ ) приближаясь к той или иной из прямых  $h = h_{1,2,3}$ .

Если начальное значение  $h_0$  кинетической энергии меньше, чем  $h_1$ , то движение невозможно. Если  $h_0 \in (h_1, h_2)$ , то движение системы стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к равномерному вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. Если  $h_0 \in (h_2, h_3)$  или  $h_0 > h_3$ , то движение системы с вероятностью 1 тоже стремится к вращению вокруг оси наибольшего момента инерции и с вероятностью 0 — к вращению вокруг оси среднего (при  $h_0 \in (h_2, h_3)$ ) или вокруг оси среднего либо наименьшего момента инерции (при  $h_0 > h_3$ ).

Здесь вероятность понимается как отношение меры множества начальных значений фазовых переменных, для которого имеет место соответствующее предельное движение, к полной мере всех начальных значений.

**4. Сравнение с консервативным случаем.** Рассмотрим теперь случай, когда внутреннего трения нет ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ). При этом система (1), (2) допускает три первых интеграла: энергии  $H = h$ , квадрата модуля кинетического момента  $K^2 = k^2$  и постоянства интенсивности вихря [1]:

$$G = (\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}) = g^2. \quad (8)$$

Стационарные движения системы соответствуют критическим точкам функции (3) при условиях (4) и (8). Для отыскания этих точек рассмотрим функцию  $W = V - \frac{1}{2}\mu(G - g^2) = W(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, \mu)$  ( $\mu$  — еще один множитель Лагранжа) и выпишем условия ее стационарности по входящим в нее переменным. Уравнения  $\frac{\partial W}{\partial \lambda} = 0$  и  $\frac{\partial W}{\partial \mu} = 0$  совпадают с соотношениями (4) и (8) соответственно, а уравнения  $\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0$  и  $\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = 0$  принимают вид (ср. с уравнениями (5))

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\omega}_1} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\omega}_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Omega}_1} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\Omega}_1} - \mu B_1 I_1 \boldsymbol{\Omega}_1 = 0 \quad (123).$$

Очевидно, система (9) по-прежнему допускает три однопараметрических семейства вида (6), при этом  $\lambda = 1/C_1$  (123),  $\mu = 0$ .

Для исследования характера этих критических точек достаточно вычислить вторую вариацию  $\delta^2 W$  функции  $W$  на линейном многообразии  $\delta(K^2) = 0, \delta G = 0$ . Для решений (6) эти многообразия имеют вид

$$\delta \boldsymbol{\omega}_1 = 0, \quad \delta \boldsymbol{\Omega}_1 = 0 \quad (123).$$

Следовательно, вторая вариация  $\delta^2 W$  на решении (6.1) имеет вид  $\delta^2 W \Big|_{(10)} = V_2 + V_3$  и всегда положительна при  $C_1 > C_j$  ( $j = 2, 3$ ) и отрицательна при  $C_1 < C_j$  ( $j = 2, 3$ ). В первом случае у функции (3) при условиях (4), (8) строгий минимум, а во втором — строгий максимум на решении

(6.1). Согласно классической теории Рауса ( $H$  — первый интеграл) решение (6.1) устойчиво в обоих этих случаях. Если же  $(C_1 - C_2)(C_1 - C_3) < 0$ , то определитель квадратичной формы  $V_2 + V_3$  отрицателен и решение (6.1) неустойчиво согласно обращению теоремы Рауса (см. [6]).

Таким образом, при отсутствии внутреннего трения устойчивы вращения вокруг оси и наибольшего, и наименьшего моментов инерции. Однако сколь угодно малое внутреннее трение разрушает устойчивость последних. Более того, как показано в п. 3, почти все возмущенные движения стремятся к вращениям вокруг оси наибольшего момента инерции.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19–01–00140.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
2. *Досаев М.З., Самсонов В.А.* Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем // Прикл. матем. и механ. 2002. **66**, вып. 3. 427–433.
3. *Карпетян А.В., Самсонов В.А., Сумин Т.С.* Об устойчивости перманентных вращений твердого тела с жидким наполнителем // Прикл. матем. и механ. 2004. **68**, вып. 6. 994–998.
4. *Карпетян А.В.* Обобщенные диаграммы Смейла для диссипативных систем с симметрией // Прикл. матем. и механ. 2021. **85**, вып. 4. 461–468.
5. *Karapetyan A.V.* Invariant sets of mechanical systems // Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications. Wien; New York: Springer, 1998. 153–210.
6. *Карпетян А.В.* Устойчивость и бифуркация движений. М.: Изд-во МГУ, 2020.

Поступила в редакцию  
13.04.2021