При выбранных параметрах нижняя оценка сложности S_2 примет следующий вид:

$$L(S_2) \geqslant 2\frac{1}{9}n_2 - 2\frac{11}{18}.$$

Тогда, учитывая (1), получаем

$$L(S) \geqslant 3(n-n_2) + L(S_2) \geqslant 3(n-n_2) + 2\frac{1}{9}n_2 - 2\frac{11}{18} \geqslant 2\frac{1}{9}n - 2\frac{11}{18}.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18–01–00337).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. *Wegner I.* The complexity of the parity function in unbounded fan-in, unbounded depth circuits // Theor. Comput. Sci. 1991. **85**. 155–170.
3. *Комбаров Ю.А.* Верхняя оценка сложности реализации линейных функций схемами в одном базисе из многовходовых элементов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2015. № 5. 47–50.
4. *Клосс Б.М., Малышев В.А.* Оценки сложности некоторых классов функций // Вестн. Моск. ун-та Матем. Механ. 1965. № 4. 44–51.
5. *Редькин Н.П.* Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Пробл. кибернетики. 1970. **23**. 83–101.
6. *Редькин Н.П.* О минимальной реализации линейной функции схемой из функциональных элементов // Кибернетика. 1971. № 6. 31–38.
7. *Iwama K., Lachish O., Morizumi H., Raz R.* An explicit lower bound of $5n - o(n)$ for Boolean circuits // Proc. 33d STOC. Heraklion, 2001. 399–408.
8. *Find M., Golovnev A., Hirsch E., Kulikov A.* A better-than-3n lower bound for the circuit complexity of an explicit function // 2016 IEEE 57th Annual Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS). New Brunswick, 2016. 89–98.
9. *Комбаров Ю.А.* О минимальных схемах в базисе Шеффера для линейных булевых функций // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2013. **20**, № 4. 65–87.
10. *Подольская О.В.* Сложность реализации симметрических булевых функций схемами в базисе антицепных функций // Дискретн. матем. 2015. **27**, № 3. 95–107.
11. *Lai H. Ch., Muroga S.* Logic networks with a minimum number of NOR (NAND) gates for parity functions of n variables // IEEE Trans. Comput. 1987. **C-**36, N 2. 157–166.

Поступила в редакцию
21.10.2020

УДК 515.12

НОРМАЛЬНЫЕ ФУНКТОРЫ И ПАРАНОРМАЛЬНОСТЬ

А. А. Иванов[1]

Доказано, что если для какого-нибудь нормального функтора $\mathcal{F} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ степени $\geqslant 3$ в категории $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и совершенных отображений пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно паранормально, то пространство X метризуемо.

Ключевые слова: нормальный функтор, паракомпактное p-пространство, наследственная паранормальность, метризуемость.

It is proved that if $\mathcal{F} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ is a normal functor of degree $\geqslant 3$ in the category $\mathcal{P}$ of

[1] *Иванов Андрей Александрович* — студ. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: an98iv@yandex.ru.

Ivanov Andrey Aleksandrovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

paracompact p-spaces and perfect mappings, and the space $\mathcal{F}(X)$ is hereditarily paranormal, then the space X is metrizable.

Key words: normal functor, paracompact p-space, hereditarily paranormality, metrizability.

Все топологические пространства предполагаются регулярными. Под ординалом понимается множество всех меньших ординалов, кардинальное число — это начальный ординал. Терминология и обозначения, не разъясняемые ниже, следуют книге [1].

Рассматривается категория $\mathcal{P}$ паракомпактных p-пространств и их совершенных отображений. Ковариантный функтор $\mathcal{F}$ в категории $\mathcal{P}$ называется нормальным, если он мономорфен, эпиморфен, непрерывен, сохраняет вес, прообразы, пересечения, точку и пустое множество, а также удовлетворяет следующему условию: для любого паракомпактного p-пространства X и любого натурального числа n отображение Басманова $\pi_n : X^n \times \mathcal{F}(n) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ непрерывно (см. [2]). Отображение π_n задается равенством $\pi_n(\xi, r) = \mathcal{F}(\xi)(r)$, в котором $\xi \in X^n$ отождествляется с отображением $\xi : n \longrightarrow X$, где n — дискретное пространство, состоящее из n точек. В работе [2] доказана следующая

Теорема 1. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$, действующий в категории $\mathcal{P}$. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормально, то X — метризуемое пространство.*

Категория Comp компактов и их непрерывных отображений является подкатегорией $\mathcal{P}$, а ограничение нормального функтора в категории $\mathcal{P}$ на категорию Comp будет нормальным функтором в Comp в смысле Е. В. Щепина (см. [3, 4]). Поэтому теорема 1 обобщает известную теорему В. В. Федорчука (см. [5]). В работе [6] доказана аналогичная теорема для случая наследственно счетно-паракомпактного $\mathcal{F}(X)$, а именно следующая

Теорема 2. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$, действующий в категории $\mathcal{P}$. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно счетно-паракомпактно, то X — метризуемое пространство.*

Рассмотрим следующее определение: пространство X называется паранормальным (в смысле П. Никоша [7]), если для любой счетной дискретной системы замкнутых подмножеств $\{F_n : n < \omega\}$ найдется локально конечная система открытых множеств $\{U_n : n < \omega\}$, такая, что $F_n \subset U_n$, и $F_m \cap U_n \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $F_m = F_n$.

Несложно показать, что все нормальные и все счетно-паракомпактные пространства являются паранормальными. Как отмечено в работе [8], примеры паранормальных, но не нормальных пространств, а также паранормальных, но не счетно-паракомпактных пространств фактически приведены в книге [1]. Несколько другой пример паранормального пространства, не являющегося нормальным, содержится и в статье [9]. Плоскость Немыцкого является примером тихоновского не паранормального пространства. Таким образом, следующая теорема, доказанная в работе [8], также обобщает теорему Федорчука.

Теорема 3. *Если для нормального функтора $\mathcal{F}$ степени $\geqslant 3$, действующего в категории* Comp, *пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно паранормально, то X — метризуемый компакт.*

Основной результат настоящей заметки — следующая теорема, являющаяся обобщением всех предыдущих теорем.

Теорема 4. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$ в категории $\mathcal{P}$. Тогда если пространство $\mathcal{F}(X)$ наследственно паранормально, то пространство X метризуемо.*

Доказательство. Следуя [4], обозначим через $\exp_c(X)$ пространство компактных подмножеств пространства X с топологией Вьеториса, и пусть для любого натурального числа k

$$\exp_k(X) = \{F \in \exp_c(X) : |F| \leqslant k\}.$$

При $k > 2$ пространство $\exp_k(X)$ называется k-й гиперсимметрической степенью пространства X (см. [10]).

В работе [2] для любого совершенного отображения $f : X \longrightarrow Y$ паракомпактных p-пространств определено отображение $\exp_c(f) : \exp_c(X) \longrightarrow \exp_c(Y)$ и доказано, что $\exp_c(\cdot)$ и $\exp_k(\cdot)$ являются нормальными функторами в категории $\mathcal{P}$.

Предложение 1. *Пусть X — паракомпактное p-пространство с единственной неизолированной точкой x_0, причем $\chi(x_0, X) \geqslant \omega_1$. Тогда гиперсимметрическая степень $\exp_3 X$ не является наследственно паранормальным пространством.*

Доказательство. Паракомпактное p-пространство X является пространством точечно-счетного типа (см. [11]), поэтому существует компакт $K \subset X$, такой, что $x_0 \in K$ и $\chi(K, X) \leqslant \omega_0$. Значит, $\chi(x_0, K) \geqslant \omega_1$, т.е. компакт K не удовлетворяет первой аксиоме счетности, и, следовательно, этот компакт и неметризуем. Так как $\exp_3(\cdot)$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$ в категории Comp, то из теоремы 3 следует, что пространство $\exp_3(K)$ не наследственно паранормально, а значит, и пространство $\exp_3(X)$ не наследственно паранормально. Предложение 1 доказано.

Для дальнейшего доказательства теоремы 4 необходима следующая теорема, доказанная в работе [12].

Теорема 5. *Если произведение $X \times Y$ наследственно паранормально, то или пространство X совершенно нормально, или все счетные подмножества пространства Y замкнуты.*

Предложение 2. *Пусть X — паракомпактное p-пространство, гиперсимметрическая степень $\exp_3(X)$ наследственно паранормальна. Тогда пространство X метризуемо.*

Доказательство. Если все точки пространства X изолированы, то оно, очевидно, метризуемо. Если в X одна изолированная точка x_0, то из предложения 1 следует, что $\chi(x_0, X) \leqslant \omega_0$. В таком случае X обладает σ-дискретной базой и, следовательно, метризуемо по метризационной теореме Бинга (см. [1, п. 4.4.8]).

Пусть теперь X содержит две неизолированные точки x_1 и x_2. Выберем открытые множества U_1, U_2, V_1 и V_2, такие, что $x_1 \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset U_1$, $x_2 \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Положим $F_1 = X \setminus U_1$ и $F_2 = X \setminus U_2$. Так как $\overline{V_1} \cap F_1 = \varnothing$, то $\overline{V_1} \times \exp_2(F_1)$ гомеоморфно подпространству $\exp_3(X)$ и, следовательно, наследственно паранормально. Множества $\overline{V_1}$ и F_1 замкнуты в X, поэтому они являются паракомпактными p-пространствами (см. [11]). Следовательно, $\overline{V_1}$ — пространство точечно-счетного типа с неизолированной точкой, а значит, содержит счетное незамкнутое множество. Тогда по теореме 5 пространство $\exp_2(F_1)$ совершенно нормально. Отсюда следует метризуемость F_1 (см. [2, предложение 5]). Аналогично показывается, что пространство F_2 метризуемо. Поскольку $X = F_1 \cup F_2$, в силу теоремы [1, п. 4.4.19] пространство X метризуемо. Предложение 2 доказано.

Далее, пусть $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени $\geqslant 3$, действующий в категории $\mathcal{P}$. Тогда существует элемент $a \in \mathcal{F}(3)$, такой, что $|\mathrm{supp}(a)| = 3$. Определим $\mathcal{F}_a(X) = \pi_3(X^3 \times \{a\})$. Рассмотрим отображение supp как однозначное, действующее из $\mathcal{F}_a(x)$ в $\exp_3(X)$. Известно [2, лемма 1], что это отображение совершенно и является эпиморфизмом. Пространство $\mathcal{F}_a(X)$ наследственно паранормально, так как $\mathcal{F}_a(X) \subset \mathcal{F}(X)$, следовательно, $\exp_3(X)$ тоже наследственно паранормально как совершенный образ $\mathcal{F}_a(x)$ (см. [8, лемма 7]). Теперь из предложения 2 следует, что пространство X метризуемо. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
2. *Добрынина М.А.* К теореме Федорчука о нормальном функторе // Матем. заметки. 2011. **90**, № 4. 630–633.
3. *Щепин Е.В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи матем. наук. 1981. **36**, № 3. 3–62.
4. *Федорчук В.В., Филиппов В.В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
5. *Федорчук В.В.* К теореме Катетова о кубе // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1989. № 4. 93–96.
6. *Комбаров А.П.* Счетная паракомпактность и нормальные функторы // Матем. заметки. 2015. **98**, № 5. 794–796.
7. *Nyikos P.* Problem section: Problem B // Topol. Proc. 1984. **9**. 367.
8. *Комбаров А.П.* Об одной слабой форме нормальности // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 5. 48–51.
9. *Комбаров А.П.* О Σ-произведениях топологических пространств // Докл. АН СССР. 1971. **199**, № 3. 526–528.
10. *Щепин Е.В.* О $\varkappa$-метризуемых пространствах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. **43**, № 2. 442–478.
11. *Архангельский А.В.* Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства // Матем. сб. 1965. **67(109)**, № 1. 55–88.
12. *Комбаров А.П.* Паранормальность в топологических произведениях // Матем. заметки. 2017. **102**, № 3. 477–480.

Поступила в редакцию
20.01.2021