Аналогично во втором случае

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{\nu^2} = -\frac{\mu^2}{16\,\nu^4} + \frac{\mu^3}{32\,\nu^6}, \tag{16}$$

или $\nu^2 = \dfrac{4}{9} - \dfrac{\mu^2}{16} + \dfrac{36\,\mu^3}{512}$.

С помощью замены $z = \nu t$, $\alpha = \dfrac{1}{\nu^2}$, $\beta = \frac{\mu}{\nu^2}$ рассматриваемое в настоящей работе уравнение (4) сводится к другой форме $x'' + (\alpha + \beta \cos z)x = 0$, используемой в [6], и полученные формулы (11), (12), (15), (16) приводятся к виду, записанному в [6]. В [7] уравнение $x'' + (\alpha + 4q \cos z_1)x = 0$ сводится к соответствующему уравнению в [6] заменой $z = 2z_1$, $\beta = -4q$.

Таким образом, получили уравнения граничных кривых, которые в точности совпадают с результатами [6] и [7].

Заключение. В работе применен метод исследования уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, существенной особенностью которого является то, что после стандартного перехода к амплитуде и фазе уравнение для фазы становится независимым. Построены первое, второе, третье и четвертое приближения для второй резонансной области, а также первое, второе и третье приближения для третьей резонансной области уравнения Матье, которые описывают поведение решений как внутри резонансной области, так и снаружи. Показано, что вблизи границы, но вне резонансных зон, имеет место движение типа биений, а внутри границы — экспоненциальный рост. Дано описание поведения решений вне резонансных зон в аналитическом виде, в том числе приведена оценка периода биений, что ранее не встречалось в литературе. Представлено сравнение полученных уравнений границ устойчивости с известными результатами, которое показывает, что, несмотря на неизученную сходимость данного метода, он дает формулы, которые в точности совпадают с известными в литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hill G.* On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon // Acta Math. 1886. **8**. 1–36.
2. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
3. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ, 1952.
4. *Norris J.W.* The nonlinear Mathieu equation //Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. **4**. 71–86.
5. *Буданов В.М.* Редукция уравнения Матье к нелинейному уравнению первого порядка // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 1. 66–69.
6. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009.
7. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию
02.10.2020

УДК 539.3

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. А. Бобылев[1]

Рассматривается оператор Пуанкаре–Стеклова, отображающий на части границы полуплоскости нормальные напряжения в нормальные перемещения. Сформулирована краевая задача, с помощью которой вводится оператор Пуанкаре–Стеклова. Приведено инте-

[1] *Бобылев Александр Александрович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ; ст. науч. сотр. Моск. центра фунд. и прикл. матем., e-mail: abobylov@gmail.com.

Bobylev Aleksandr Aleksandrovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

гральное представление исследуемого оператора, построенное на основе решения Фламана о действии сосредоточенной нормальной силы на границе упругой полуплоскости. Установлено, что свойства оператора Пуанкаре–Стеклова зависят от выбора кинематических условий, задающих смещения полуплоскости как жесткого целого. Получены условия положительной определенности оператора Пуанкаре–Стеклова. Показано, что для обеспечения положительной определенности оператора можно использовать соответствующее масштабирование расчетной области.

Ключевые слова: оператор Пуанкаре–Стеклова, упругая полуплоскость, положительно-определенный оператор.

The Poincaré–Steklov operator that maps normal stresses to normal displacements on a part of a half-plane boundary is studied. A boundary value problem is formulated to introduce the associated Poincaré–Steklov operator. An integral representation based on the solution to the Flamant problem for an elastic half-plane subjected to a concentrated normal force is given for the operator under consideration. It is found that the properties of the Poincaré–Steklov operator depend on the choice of kinematic conditions specifying the displacements of the half-plane as a rigid body. Positive definiteness conditions of the Poincaré–Steklov operator are obtained. It is shown that a suitable scaling of the computational domain can be used to provide the positive definiteness of this operator.

Key words: Poincaré–Steklov operator, elastic half-plane, positive definite operator.

1. Введение. Операторы Пуанкаре–Стеклова, отображающие граничные условия одного типа в граничные условия другого типа, применяются в вычислительных алгоритмах решения различных классов краевых задач математической физики [1]. Использование операторов Пуанкаре–Стеклова позволяет получить вариационные формулировки контактных задач теории упругости с односторонними связями в виде граничных вариационных неравенств и задач минимизации граничных функционалов, при численном решении которых требуется дискретизировать лишь часть границы области — зону возможного контакта [2]. Это существенно уменьшает размерность получаемых дискретных задач и снижает вычислительные затраты при решении контакных задач с заранее неизвестными площадками фактического контакта, включая задачи множественного контакта.

Рассмотрим задачу о вдавливании жесткого штампа в упругое полупространство, используемую в трибологии для моделирования локального контакта. Можно показать [3], что при отсутствии трения распределение нормальных контактных напряжений σ_n по области возможного контакта Γ_q является решением задачи минимизации граничного функционала

$$J(\sigma_n) = \inf_{q \in V_q} \left\{ J(q) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_q} qSq\, d\Gamma_p - \int\limits_{\Gamma_q} \Phi q\, d\Gamma_p \right\}, \quad \sigma_n \in V_q, \tag{1}$$

где $S : \sigma_n \mapsto u_n$ — оператор Пуанкаре–Стеклова, отображающий на части Γ_q граничной плоскости полупространства нормальные напряжения σ_n в нормальные перемещения u_n; Φ — функция, описывающая форму и положение штампа; $V_q = \{q \in V : \ q \leqslant 0\}$ — множество допустимых нормальных напряжений; V — функциональное пространство, элементами которого являются нормальные напряжения.

Достаточным условием существования и единственности решения задачи минимизации (1) является положительная определенность оператора Пуанкаре–Стеклова S на множестве V_q [4]. Используя решение Буссинеска для упругого полупространства и предполагая, что массовые силы отсутствуют, а главный вектор нормальных контактных напряжений конечен, для оператора $S : \sigma_n \mapsto u_n$ можно получить интегральное представление

$$u_n(\boldsymbol{x}) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{\sigma_n(\boldsymbol{\xi})}{r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})}\, d\Gamma_q(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_q, \tag{2}$$

где $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ — расстояние между точками $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого полупространства. Полагая, что область возможного контакта Γ_q является ограниченной, несложно показать, что оператор Пуанкаре–Стеклова, определенный формулой (2), будет положительно-определенным, например, на пространстве $V \equiv L_2(\Gamma_q)$.

В случае контакта двух цилиндрических тел, оси которых параллельны, задачу можно рассматривать как плоскую. Задача о вдавливании жесткого штампа в упругую полуплоскость является классической контактной задачей теории упругости, для ее решения, как правило, применяются методы, основанные на использовании комплексных потенциалов [5]. При наличии в постановке задачи условий одностороннего контакта, содержащих неравенства, задача становится нелинейной, размеры фактических площадок контакта заранее неизвестны. Для их определения используют различные итерационные алгоритмы, однако обеспечить сходимость последних в задачах множественного контакта весьма затруднительно. Поэтому представляет интерес построение вариационной формулировки, аналогичной (1), для упругой полуплоскости. Основная возникающая при этом проблема состоит в следующем.

В соответствии с решением Буссинеска при действии сосредоточенной силы, нормальной к границе полупространства, перемещения и повороты в бесконечно удаленной точке полупространства равны нулю, т.е. смещения полупространства как жесткого целого отсутствуют. В случае плоской задачи согласно решению Фламана при действии сосредоточенной силы, нормальной к границе полуплоскости, перемещения изменяются с увеличением расстояния r от точки нагружения как $\ln r$. Следовательно, требуется введение в постановку задачи дополнительных кинематических условий, задающих смещения полуплоскости как жесткого целого. Ясно, что от выбора этих условий зависит вид оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругой полуплоскости нормальные напряжения в нормальные перемещения. В литературе приведено несколько вариантов (см., например, [6, 7]) условий "закрепления" полуплоскости, однако соответствующие им операторы Пуанкаре–Стеклова являются несимметрическими. Вопрос о положительной определенности операторов Пуанкаре–Стеклова для упругой полуплоскости ранее не исследовался. Настоящая работа посвящена определению условий, обеспечивающих положительную определенность оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругой полуплоскости нормальные напряжения в нормальные перемещения.

2. Постановка краевой задачи. Сформулируем краевую задачу, с помощью которой вводится исследуемый оператор Пуанкаре–Стеклова. Пусть невесомая однородная изотропная упругая полуплоскость занимает область $\Omega = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in R^2 : x_2 \leqslant 0\}$ с границей Γ. Под $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $\underset{\sim}{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$, $\underset{\sim}{\sigma}(\boldsymbol{x})$ будем понимать соответственно значения вектора перемещений и тензоров деформации и напряжений в точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Предполагается, что полуплоскость находится в условиях плоской деформации, деформации малы, а напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние полуплоскости описывается системой уравнений

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{def} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \quad \underset{\sim}{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}(\boldsymbol{x}), \quad \operatorname{div} \underset{\sim}{\sigma}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{3}$$

где $\operatorname{def} \equiv 1/2\,(\operatorname{grad} + \operatorname{grad}^{\mathsf{T}})$; $\underset{\sim}{C}$ — тензор модулей упругости.

На части границы $\Gamma_q \subset \Gamma$ приложена нормальная нагрузка

$$\sigma_{22}(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}), \quad \sigma_{21}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_q. \tag{4}$$

Остальная часть границы полуплоскости свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{22}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{21}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_q. \tag{5}$$

Предполагается, что участок границы Γ_q является конечным, а главный вектор внешних усилий имеет ограниченную величину и отличен от нуля:

$$\operatorname{diam} \Gamma_q < \infty, \quad 0 < \Big| \int\limits_{\Gamma_q} q\, d\Gamma_q \Big| < \infty. \tag{6}$$

Чтобы выделить класс единственности решения в рассматриваемой краевой задаче, необходимо наложить дополнительные условия на поведение решения на бесконечности и на смещения полуплоскости как жесткого целого.

В монографии [8] рассмотрен случай, когда на бесконечности напряжения и вращение стремятся к нулю. Показано, что эти условия обеспечивают единственность поля напряжений. Если при этом отсутствуют массовые силы, а главный вектор внешних поверхностных усилий имеет ограниченную величину и отличен от нуля, то напряжения и соответствующие перемещения имеют асимптотическое представление

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = O\left(|\boldsymbol{x}|^{-1}\right), \quad u_i(\boldsymbol{x}) = O\left(\ln|\boldsymbol{x}|\right), \quad i,j=1,2, \quad \text{при } |\boldsymbol{x}|\to\infty. \tag{7}$$

Смещения полуплоскости как жесткого целого имеют вид

$$v_1(\boldsymbol{x}) = \delta_1 - \omega x_2, \quad v_2(\boldsymbol{x}) = \delta_2 + \omega x_1, \tag{8}$$

где δ_1 и δ_2 — компоненты поступательного перемещения; ω — поворот полуплоскости как жесткого целого.

Значение параметра δ_1 не влияет на нормальные перемещения границы полуплоскости, поэтому будем полагать $\delta_1 = 0$. Значения параметров δ_2 и ω далее выбираются так, чтобы исследуемый оператор Пуанкаре–Стеклова был положительно-определенным.

3. Функциональные пространства. Классическое решение $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ краевой задачи (3)–(8) принадлежит классу функций $\left[C^2(\Omega)\right]^2 \cap \left[C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right]^2$. Однако для исследования и решения вариационных задач типа (1) целесообразно использовать классы обобщенных функций [4]. Введем необходимые функциональные пространства. Учитывая условия (7), компоненты вектора перемещений $u_i(\boldsymbol{x})$, $i=1,2$, будем рассматривать как элементы функционального пространства Соболева с весами [9]:

$$H^1(\Omega;\rho) = \left\{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \, \rho u \in L_2(\Omega);\, \partial u/\partial x_i \in L_2(\Omega),\, i=1,2\right\},$$

где $\mathcal{D}'(\Omega)$ — пространство распределений на Ω; $L_2(\Omega)$ — пространство (классов) функций с интегрируемым квадратом по области Ω; $\rho(\boldsymbol{x}) = \left(1+|\boldsymbol{x}|^2\right)^{-1/2}/\ln\left(2+|\boldsymbol{x}|^2\right)$ — весовая функция.

Пространство $H^1(\Omega;\rho)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u,v)_{H^1(\Omega;\rho)} = \int\limits_\Omega \rho^2 uv\, d\Omega + \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\Omega.$$

Введем далее пространство вектор-функций

$$\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\rho) = \left\{\boldsymbol{u} = (u_1,u_2) \in \left[H^1(\Omega;\rho)\right]^2 : \, \mathrm{div}\,\underset{\sim}{\sigma}(\vec{u}) \in [L_2(\Omega)]^2\right\}.$$

Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\rho)} = (u_1,v_1)_{H^1(\Omega;\rho)} + (u_2,v_2)_{H^1(\Omega;\rho)} + (\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\sigma}(\boldsymbol{u}), \mathrm{div}\,\underset{\sim}{\sigma}(\boldsymbol{v}))_{[L_2(\Omega)]^2}.$$

Можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях относительно свойств гладкости $q(\boldsymbol{x})$ на Γ_q классическое решение $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ краевой задачи (3)–(8) принадлежит пространству $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\rho)$. Далее будем полагать, что обобщенное решение краевой задачи (3)–(8) также принадлежит пространству $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\rho)$. Введем необходимые для определения оператора Пуанкаре–Стеклова пространства следов функций из $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega;\rho)$.

Рассмотрим произвольную ограниченную подобласть $\Omega' \subset \Omega$ с границей Γ' класса $C^{1,1}$, примыкающую к границе Γ полуплоскости так, что

$$\Gamma_q \Subset \Gamma \cap \Gamma'. \tag{9}$$

Известно [10], что существуют линейные непрерывные операторы

$$\boldsymbol{\gamma}'_u : \boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega') \to [H^{1/2}(\Gamma')]^2, \quad \boldsymbol{\gamma}'_t : \boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega') \to [H^{-1/2}(\Gamma')]^2, \tag{10}$$

определяющие для полей перемещений из $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega') \equiv \boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,;\Omega';1)$ соответственно векторные функции перемещений и напряжений на Γ'.

Введем пространство сужений на Γ_q функций из $H^{1/2}(\Gamma')$:

$$H^{1/2}(\Gamma_q) = \{v = w|_{\Gamma_q} : w \in H^{1/2}(\Gamma')\}$$

и оснастим его нормой

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_q)} = \inf_{w \in H^{1/2}(\Gamma')} \{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma')} : v = w|_{\Gamma_q}\}.$$

Имеет место вложение пространств $H^{1/2}(\Gamma_q) \subset L_2(\Gamma_q)$ [11]. Двойственным к пространству $H^{1/2}(\Gamma_q)$ является пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)$ — пополнение $L_2(\Gamma_q)$ по норме

$$\|q\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)} = \sup_{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_q)}=1} |(q, v)_{L_2(\Gamma_q)}|,$$

т.е. отношение двойственности ${}_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)}\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_q)}$ порождено продолжением стандартного скалярного произведения на $L_2(\Gamma_q)$. Следовательно, имеет место плотное вложение

$$L_2(\Gamma_q) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q). \tag{11}$$

Весовая функция $\rho(\boldsymbol{x})$ непрерывна и ограничена в ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$, поэтому сужения функций из $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega; \rho)$ на Ω' принадлежат пространству $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega')$, для элементов которого определены операторы следа (10). Как следствие при выполнении условия (9) существуют линейные непрерывные операторы

$$\gamma_u : \boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega; \rho) \to H^{1/2}(\Gamma_q), \quad \gamma_q : \boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega; \rho) \to \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q), \tag{12}$$

определяющие для полей перемещений из $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega; \rho)$ соответственно функции нормальных перемещений и нормальных напряжений на Γ_q.

Можно показать, что при выполнении условия (9) пространства $H^{1/2}(\Gamma_q)$ и $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)$, а также операторы следа (12) не зависят от выбора области Ω'.

4. Интегральное представление решения. Решение краевой задачи (3)–(8) для $q \in L_2(\Gamma_q)$ можно представить в виде [12]

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Gamma_p} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) q(\boldsymbol{\xi})\, d\Gamma_p(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\delta} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ — поле перемещений, соответствующее решению задачи Фламана о действии сосредоточенной нормальной силы на границе упругой полуплоскости и вычисляемое с точностью до смещений полуплоскости как жесткого целого. Последние два слагаемых в правой части (13) соответствуют смещениям полуплоскости как жесткого целого (8).

Из свойств решения задачи Фламана следует, что оператор $\boldsymbol{F} : q \mapsto \boldsymbol{u}$, определяемый формулой (13), является непрерывным оператором в $L_2(\Gamma_q)$. Учитывая вложение (11), оператор $\boldsymbol{F}$ можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)$. Функцию $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}q$, соответствующую $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)$, будем называть обобщенным решением краевой задачи (3)–(8).

5. Оператор Пуанкаре–Стеклова. Рассмотрим оператор Пуанкаре–Стеклова $Q : q \mapsto v$, отображающий посредством решения (13) краевой задачи (3)–(8) нормальные напряжения $q(x_1) = \sigma_{22}(x_1, 0)$ на части Γ_q границы упругой полуплоскости в нормальные перемещения $v(x_1) = u_2(x_1, 0)$ на Γ_q.

Из свойств решения задачи Фламана следует, что сужение функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, определяемой формулой (13), на область Ω' принадлежит пространству $\boldsymbol{H}^1(\mathrm{div}\,; \Omega')$. Учитывая существование операторов следа (10), а также определения пространств $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)$ и $H^{1/2}(\Gamma_q)$, будем рассматривать Q как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)$ в $H^{1/2}(\Gamma_q)$.

Соответствующий решению (13) оператор Пуанкаре–Стеклова $Q : q \mapsto v$ для $q \in L_2(\Gamma_q)$ имеет вид [12]

$$v(x_1) = -D \int\limits_{\Gamma_q} q(\xi_1) \ln|x_1 - \xi_1| \, d\Gamma_q(\xi_1) + \delta_2 + \omega x_1, \tag{14}$$

где $D = 2(1-\nu^2)/(\pi E)$.

Интегральный оператор (14) с логарифмическим ядром является непрерывным. Учитывая плотность вложения (11), продолжим оператор (14) по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)$.

Из формулы (14) следует, что оператор Пуанкаре–Стеклова Q зависит от выбора параметров δ_2 и ω, определяемых из кинематических условий, задающих смещение упругой полуплоскости как жесткого целого. Выберем эти условия таким образом, чтобы рассматриваемый оператор Пуанкаре–Стеклова для упругой полуплоскости был положительно-определенным.

Нетрудно видеть, что в (14) последнее слагаемое несимметрично относительно переменных x_1 и ξ_1, поэтому необходимым условием симметричности оператора Q является условие

$$\omega = 0. \tag{15}$$

Можно показать, что при выполнении условия (15) напряжения и вращение, соответствующие полю перемещений (13), на бесконечности стремятся к нулю. Следовательно, имеет место асимптотическое представление (7) и обобщенное решение краевой задачи (3)–(8) принадлежит пространству $\boldsymbol{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \rho)$.

Далее положим

$$\delta_2 = D \ln L \int\limits_{\Gamma_q} q(\xi_1) \, d\Gamma_q(\xi_1), \tag{16}$$

где $L > 0$ — константа, значение которой будет уточнено далее. Отметим, что интеграл в (16) равен равнодействующей внешней нагрузки.

Подставив (15) и (16) в (14), получим

$$v(x_1) = -D \int\limits_{\Gamma_q} q(\xi_1) \ln \frac{|x_1 - \xi_1|}{L} \, d\Gamma_q(\xi_1). \tag{17}$$

Ядро интегрального представления (17) оператора Пуанкаре–Стеклова $Q : q \mapsto v$ является симметричным. Установим условия, при которых этот оператор будет положительно-определенным.

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\int\limits_{\Gamma_q} p(\xi_1) \, d\Gamma_q(\xi_1) = 1; \quad \int\limits_{\Gamma_q} p(\xi_1) \ln|x_1 - \xi_1| \, d\Gamma_q(\xi_1) = s, \quad x_1 \in \Gamma_q. \tag{18}$$

Известно [11], что она имеет единственное решение $(p, s) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q) \times R$. В частности, если Γ_q представляет собой отрезок $[-a; a]$, то решение системы уравнений (18) имеет вид [5]

$$p(x_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x_1^2}}; \quad s = \ln\frac{a}{2}. \tag{19}$$

Следуя [11, 13], введем логарифмическую емкость компакта Γ_q формулой

$$C_l(\Gamma_q) = \exp(s), \tag{20}$$

где s — решение системы уравнений (18).

Как указано в [11], интегральный оператор (17) будет положительно-определенным на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_q)$ тогда и только тогда, когда

$$L > C_l(\Gamma_q). \tag{21}$$

Логарифмическая емкость, определенная формулой (20), есть монотонно возрастающая функция компакта [13], т.е. из включения $\Gamma_1 \Subset \Gamma_2$ следует, что $C_l(\Gamma_1) < C_l(\Gamma_2)$. С учетом этого, используя решение (19), несложно показать, что из условия (21) для L следует оценка

$$L > \operatorname{diam}\Gamma_q/4, \tag{22}$$

где

$$\operatorname{diam}\Gamma_q = \max_{x_1,\xi_1\in\Gamma_q} |x_1 - \xi_1|.$$

6. Масштабирование расчетной области. Произведем масштабирование (линейное отображение) расчетной области $\Gamma_q \to \tilde{\Gamma}_q$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{diam}\tilde{\Gamma}_q < 4. \tag{23}$$

Тогда с учетом (22) в (17) можно положить

$$L = 1 \tag{24}$$

и использовать положительно-определенный оператор Пуанкаре–Стеклова $\tilde{Q} : \tilde{q} \mapsto \tilde{v}$ для упругой полуплоскости в виде

$$\tilde{v}(\tilde{x}_1) = -\tilde{D} \int\limits_{\tilde{\Gamma}_q} \tilde{q}(\tilde{\xi}_1) \ln|\tilde{x}_1 - \tilde{\xi}_1|\, d\tilde{\Gamma}_q(\tilde{\xi}_1).$$

Отметим, что условие (24) эквивалентно условию $\delta_2 = 0$.

7. Выводы. Для использования в граничных вариационных формулировках контактных задач с односторонними связями оператор Пуанкаре–Стеклова, отображающий в области возможного контакта нормальные напряжения в нормальные перемещения, должен быть положительно-определенным. В случае упругой полуплоскости наличие этого свойства оператора Пуанкаре–Стеклова, построенного на основе решения Фламана о действии сосредоточенной нормальной силы на границе упругой полуплоскости, зависит от выбора кинематических условий, задающих смещения полуплоскости как жесткого целого. Необходимым условием положительной определенности оператора является стремление вращения на бесконечности к нулю. Компонента δ_2 поступательного перемещения полуплоскости как жесткого целого может выбираться в виде (16), при этом определяющая ее константа L должна удовлетворять условию (21). Применение масштабирования расчетной области, обеспечивающего выполнение условия (23), позволяет исключить компоненту перемещения δ_2, положив ее равной нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. М.: Отдел вычисл. матем. АН СССР, 1983.
2. *Antes H., Panagiotopoulos P.D.* The Boundary Integral Approach to Static and Dynamic Contact Problems: Equality and Inequality Methods. Basel: Birkhäuser-Verlag, 2013.
3. *Kalker J.J., van Randen Y.* A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-Hertzian half-space contact problems // J. Eng. Math. 1972. **6**, N 2. 193–206.
4. *Kravchuk A.S., Neittaanmäki P.J.* Variational and quasi-variational inequalities in mechanics. Dordrecht: Springer, 2007.
5. *Galin L.A.* Contact problems. Dordrecht: Springer, 2008.
6. *Ишлинский А.Ю.* О перемещениях упругой полуплоскости // Уч. зап. МГУ. 1940. Вып. 39. 83–86.
7. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
9. *Amrouche C., Girault V., Giroire J.* Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator. An approach in weighted Sobolev spaces // J. math. pures et appl. 1997. **76**, N 1. 55–81.
10. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
11. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2000.
12. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979.
13. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию
25.01.2021