

Механика

УДК 531.36

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ
ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ РЕЗОНАНСНЫХ ЗОНВ. М. Буданов¹, Л. Ф. Давудова²

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами. Показано его сведение к нелинейному уравнению первого порядка. Построены четвертое приближение для второй резонансной зоны и третье приближение для третьей резонансной зоны уравнения Матье, описывающие поведения решений в окрестности границ этих зон.

Ключевые слова: параметрический резонанс, уравнение с периодическими коэффициентами.

A second order differential equation with periodic coefficients is considered. The reduction of this equation to a first order nonlinear equation is shown. The fourth approximation of the second resonance zone and the third approximation of the third resonance zone are constructed for the Mathieu's equation describing the behavior of solutions near the boundaries of these zones.

Key words: parametric resonance, equation with periodic coefficients.

Введение. К системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами приводит ряд задач механики. Одной из типичных задач, сводящихся к рассмотрению этих уравнений, является задача о поперечных колебаниях стержня, находящегося под воздействием продольных периодических сил. В этой задаче дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня представляет собой известное уравнение Хилла (1886 г.), полученное им в связи с изучением движения Луны [1]. Для уравнения Хилла установлено большое количество результатов, которые систематически изложены в [2, 3]. Частным случаем уравнения Хилла является уравнение Матье, которое он привел в 1873 г. в книге “Cours De Physique Mathematique”, занимаясь исследованием колебаний эллиптической мембраны. В [4] представлен анализ общего вида кубического нелинейного уравнения Матье. В настоящей работе рассматривается уравнение Матье и описан подход, который позволяет строить приближенные решения как в самих областях неустойчивости, так и в их окрестностях.

Переход к новым переменным. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \quad (1)$$

где $p(t), q(t)$ — периодические функции времени с периодом T . Сделаем замену переменных

$$x = A \cos \psi, \quad \dot{x} = -A\theta \sin \psi, \quad \psi = \theta t + \alpha, \quad (2)$$

где θ — постоянная, но заранее не заданная частота; A, α — новые переменные.

Дифференцируя (2) и учитывая (1), получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A} \cos \psi - A(\theta + \dot{\alpha}) \sin \psi = -A\theta \sin \psi, \\ \ddot{x} &= -\dot{A}\theta \sin \psi - A\theta(\theta + \dot{\alpha}) \cos \psi = -q x - p\dot{x} = -q A \cos \psi + p A \theta \sin \psi. \end{aligned}$$

¹ Буданов Владимир Михайлович — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. лаб. общей механики НИИ механики МГУ, e-mail: vmbudanov@yandex.ru.

² Давудова Лавия Феликсовна — асп. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ldavudova96@mail.ru.

Budanov Vladimir Mikhailovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Laboratory of General Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Scientific Research Institute of Mechanics.

Davudova Lavia Feliksovna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

Разрешая данные уравнения относительно производных $\dot{A}, \dot{\alpha}$ и вводя новую переменную $s = \ln A$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{1}{2} \left[-p + p \cdot \cos 2\psi + \frac{1}{\theta} (q - \theta^2) \sin 2\psi \right], \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\theta} (q - \theta^2) (1 + \cos 2\psi) - p \cdot \sin 2\psi \right], \\ \psi &= \theta t + \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) точна, так как получена формальной заменой переменных, ее особенностью является отделенное уравнение для фазы, исследованием которого мы и займемся далее, рассматривая уравнение Матье, представляющее собой частный случай (1), когда $p(t) = 0$, $q(t) = \omega^2 + \mu \cdot \cos \nu t$, где ω — собственная частота, μ — амплитуда возбуждения, а ν — частота возбуждения:

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \mu \cos \nu t)x = 0. \quad (4)$$

В соответствии с этим система (3) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{1}{2\theta} \cdot (\omega^2 - \theta^2 + \mu \cos \nu t) \sin 2\psi, \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{2\theta} \cdot (\omega^2 - \theta^2 + \mu \cos \nu t) (1 + \cos 2\psi), \\ \psi &= \theta t + \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя ψ в (5), будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{1}{2\theta} \cdot \left[(\omega^2 - \theta^2) \sin 2(\theta t + \alpha) + \frac{\mu}{2} \sin((2\theta + \nu)t + 2\alpha) + \frac{\mu}{2} \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha) \right], \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{2\theta} \cdot \left[(\omega^2 - \theta^2) (1 + \cos 2(\theta t + \alpha)) + \mu \cos \nu t + \frac{\mu}{2} \cos((2\theta + \nu)t + 2\alpha) + \frac{\mu}{2} \cos((2\theta - \nu)t + 2\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что второе уравнение отделилось, его решение является ключевым для анализа уравнения Матье в рамках применяемой методики. Если это решение найдено как функция времени $\alpha(t)$, то амплитуда $A(t)$ определяется по формуле $s = \ln A$ и вычисляется из первого уравнения системы (6). И по формулам (2) получаем решения исходного уравнения Матье.

Решение системы (6), прежде всего ее второго уравнения, будем искать методом последовательных приближений. Слагаемые, содержащие явно входящее время, назовем быстрыми, остальные — медленными. Будем искать переменные α, s в виде суммы быстрых α_f, s_f и медленных α_s, s_s составляющих. Быстрые составляющие вычисляются интегрированием быстрых слагаемых с учетом медленных констант. В уравнениях для медленных составляющих α_s, s_s учитываются и медленные слагаемые в правых частях уравнений системы (6), и усредненные по явно входящему времени добавки от быстрых составляющих α_f, s_f . Указанный алгоритм принципиально сходен с алгоритмом Пикара, который сходится всегда, поэтому есть основания надеяться, что изложенный метод сойдется и для немалого параметра.

Вторая резонансная зона. Первое приближение. Считаем, что $2\theta - \nu \neq 0$ (так как этот случай соответствует первой резонансной зоне и рассмотрен в [5]). Тогда, полагая нулю быстрые составляющие α_f , т.е. подставляя в (6) $\alpha = \alpha_s$, и усредняя правые части уравнений системы (6) по явно входящему времени, получаем систему для медленных составляющих (остальные слагаемые войдут в уравнения для быстрых составляющих):

$$\begin{aligned} \dot{s}_s &= 0, \\ \dot{\alpha}_s &= -\frac{\theta^2 - \omega^2}{2\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \omega, \\ \dot{s}_f &= \frac{\mu}{2\theta} \sin \nu t + \frac{\mu}{4\theta} \sin((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{4\theta} \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s), \\ \dot{\alpha}_f &= \frac{\mu}{2\theta} \cos \nu t + \frac{\mu}{4\theta} \cos((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{4\theta} \cos((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 s_s &= \text{const} \Rightarrow A_s = e^s = \text{const}, \\
 \alpha_s &= \alpha_0, \\
 s_f &= -\frac{1}{2\theta} \left[\frac{\mu}{\nu} \cos \nu t + \frac{\mu}{2(2\theta + \nu)} \cos((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{2(2\theta - \nu)} \cos((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s) \right], \\
 \alpha_f &= \frac{1}{2\theta} \left[\frac{\mu}{\nu} \sin \nu t + \frac{\mu}{2(2\theta + \nu)} \sin((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{2(2\theta - \nu)} \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s) \right].
 \end{aligned}$$

Решение представляет собой колебания математического маятника с частотой θ , равной собственной, на которые наложена составляющая от возмущающего члена в уравнении $x = A \cos(\alpha + \theta t)$, где $A = e^{s_s + s_f}$, $\alpha = \alpha_s + \alpha_f$.

Второе приближение. Положим $\varepsilon = \frac{\theta^2 - \omega^2}{2\theta}$ и $\gamma = \frac{\mu}{4\theta}$, тогда, подставляя $\alpha = \alpha_s + \alpha_f$ в систему (6), получим уравнения

$$\begin{aligned}
 \dot{s} &= -\varepsilon \sin 2(\theta t + \alpha_s + \alpha_f) + \gamma \sin((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s + 2\alpha_f) + \gamma \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s + 2\alpha_f), \\
 \dot{\alpha} &= -\varepsilon - \varepsilon \cos 2(\theta t + 2\alpha_s + 2\alpha_f) + 2\gamma \cos \nu t + \gamma \cos((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s + 2\alpha_f) + \\
 &\quad + \gamma \cos((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s + 2\alpha_f).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляем значение α_f , найденное в первом приближении, в (7), осредняя по времени, полагая $2\theta - \nu \neq 0$ и считая $\alpha_f \ll 1$, получим систему для медленных составляющих (остальные слагаемые войдут в быстрые составляющие). Например,

$$\begin{aligned}
 \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s + 2\alpha_f) &\approx \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s) + 2\alpha_f \cos((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s) = \\
 &= \frac{\mu}{4\theta(2\theta + \nu)} [\sin 2\nu t + \sin(4\theta t + 4\alpha_s)] + \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{2\theta\nu} [\sin(2(\nu - \theta)t - 2\alpha_s) + \sin(2\theta t + 2\alpha_s)] + \\
 &\quad + \frac{\mu}{4\theta(2\theta - \nu)} [1 + \sin((4\theta - 2\nu)t + 4\alpha_s)].
 \end{aligned}$$

Таким образом, в уравнениях появятся слагаемые с аргументом $(\theta - \nu)t$. Положим $\theta = \nu$ (внешняя частота близка к собственной $\nu \approx \omega$), тогда в указанных слагаемых исчезает явная зависимость от времени. В результате, подставляя $\gamma = \frac{\mu}{4\theta}$ в полученные после тригонометрических преобразований значения α_f и s_f , приходим к системе

$$\begin{aligned}
 \dot{s}_s &= k_1 \sin(2\alpha_s), \\
 \dot{\alpha}_s &= -k_2 + k_1 \cos(2\alpha_s),
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 s_f &= \frac{\mu^2 \cos[2t\nu]}{48\nu^4} - \frac{\mu \cos[2\alpha_s + t\nu]}{4\nu^2} + \frac{\varepsilon \cos[2\alpha_s + 2t\nu]}{2\nu} - \frac{\mu^2 \cos[4\alpha_s + 2t\nu]}{32\nu^4} - \frac{\mu \cos[2\alpha_s + 3t\nu]}{12\nu^2} - \\
 &\quad - \frac{\mu^2 \cos[2\alpha_s + 4t\nu]}{32\nu^4} - \frac{\mu^2 \cos[4\alpha_s + 4t\nu]}{48\nu^4} - \frac{\mu^2 \cos[4\alpha_s + 6t\nu]}{288\nu^4}, \\
 \alpha_f &= \frac{\mu \sin[t\nu]}{2\nu^2} - \frac{\mu^2 \sin[2t\nu]}{24\nu^4} + \frac{\mu \sin[2\alpha_s + t\nu]}{4\nu^2} - \frac{\varepsilon \sin[2\alpha_s + 2t\nu]}{2\nu} + \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 2t\nu]}{32\nu^4} + \frac{\mu \sin[2\alpha_s + 3t\nu]}{12\nu^2} + \\
 &\quad + \frac{\mu^2 \sin[2\alpha_s + 4t\nu]}{32\nu^4} + \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 4t\nu]}{48\nu^4} + \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 6t\nu]}{288\nu^4},
 \end{aligned}$$

где $k_1 = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\mu}{\nu^3}$, $k_2 = \varepsilon + \frac{1}{12} \cdot \frac{\mu}{\nu^3}$.

Полученная система (8) отличается от первого приближения. В ней существуют нетривиальные решения, исследуем их подробнее.

В зависимости от соотношения между параметрами k_1 и k_2 возможны 3 ситуации: $|k_2| < k_1$, $|k_2| = k_1$, $|k_2| > k_1$. На рис. 1 приведены графики правой части второго уравнения системы (8) для этих ситуаций.

I ($|k_2| < k_1$) — область неустойчивости с неограниченным нарастанием амплитуды колебаний. Второе уравнение системы (8) имеет 2 стационарных решения. Устойчивым является решение, которое лежит в диапазоне $0 < 2\alpha < \pi$. При этом из первого уравнения системы (8) следует, что s растет

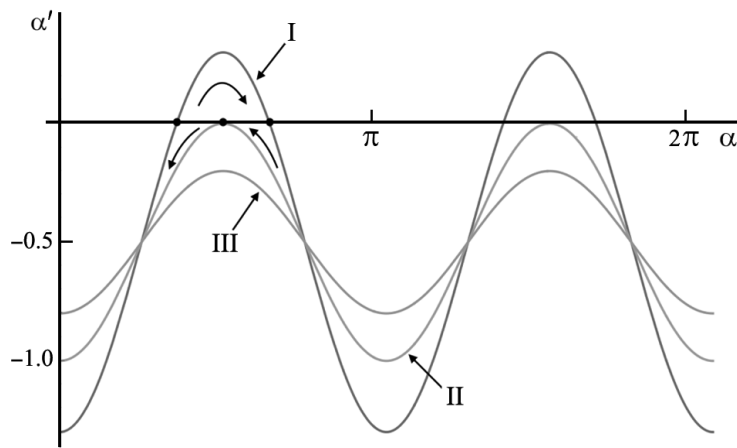


Рис. 1. Стационарные точки уравнения фазы

линейно, а амплитуда A — экспоненциально в соответствии с (3). Решения в диапазоне $\pi < 2\alpha < 2\pi$ неустойчивы. Им отвечают экспоненциально затухающие колебания.

II ($|k_2| = k_1$) — граница, на которой существует периодическое решение. Два решения сливаются, и возникает стационарная точка второго уравнения системы (8), которая при подходе с одной стороны является устойчивой, а с другой — неустойчивой.

При $k_1 = k_2$ система имеет вид

$$\dot{s}_s = k_2 \sin(2\alpha_s),$$

$$\dot{\alpha}_s = k_2(-1 + \cos(2\alpha_s)) = -2k_2 \sin^2 \alpha_s.$$

Деля второе уравнение последней системы на $\sin^2 \alpha_s$, получим $(\text{ctg } \alpha_s)' = 2k_2$, таким образом,

$$\alpha_s = \text{arctg}(2k_2 t + C), \quad \text{где } C = \frac{1}{2} \text{ctg } \alpha_0,$$

$$\dot{s}_s = k_2 \sin(2 \text{arctg}(2k_2 t + C)) = 2k_2 \frac{2k_2 t + C}{1 + (2k_2 t + C)^2}.$$

Проинтегрировав s , с учетом (3) будем иметь

$$A = A_0 e^s = A_0 \sqrt{\frac{1 + (2k_2 t + C)^2}{1 + C^2}}.$$

Применяя формулу Тейлора, несложно заметить, что амплитуда растет как линейная функция времени.

III ($|k_2| > k_1$) — режим биений. Частота внешнего возбуждения остается близкой к собственной частоте, но $|k_1| > k_2$ и второе уравнение системы (8) не имеет стационарного решения, но имеет монотонно возрастающее при $k_2 < 0$ или убывающее при $k_2 > 0$. При этом

$$\alpha_s = - \text{arctg} \left[\sqrt{\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}} \text{tg} \left(t \sqrt{k_2^2 - k_1^2} - C \right) \right],$$

$$A = A_0 \sqrt{\frac{k_2 + k_1 \cos \left(2t \sqrt{k_2^2 - k_1^2} - 2C \right)}{k_2 + k_1 \cos 2C}}, \tag{9}$$

где $C = \text{arctg} \left[\sqrt{\frac{k_2 + k_1}{k_2 - k_1}} \cdot \text{tg } \alpha_0 \right]$.

То есть амплитуда является периодической функцией времени, движения по исходной переменной x представляют собой биения, при приближении параметров к границе резонансной зоны разность $k_2^2 - k_1^2$ уменьшается, а период биений увеличивается.

Третье приближение. Как и в предыдущем пункте, подставляем значение α_f , найденное во втором приближении, в преобразованные слагаемые системы (7). Считая $\alpha_f \ll 1$, раскладываем \sin и \cos до второго порядка ($\sin x = x - \frac{x^3}{6}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$), осредняя по времени и полагая $\theta = \nu$, получаем в третьем приближении для медленных составляющих систему

$$\dot{s}_s = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} \cdot \sin[2\alpha_s],$$

$$\dot{\alpha}_s = -\varepsilon - \frac{1}{12} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} \cdot \cos[2\alpha_s],$$

а из оставшихся слагаемых составляем систему для быстрых переменных, которые не выписаны в связи с громоздкостью формул. Видно, что система для медленных переменных в точности совпадает с полученной во втором приближении.

Четвертое приближение. Как и ранее, найденное в третьем приближении значение α_f подставляем в преобразованные слагаемые системы (7), считая $\alpha_f \ll 1$, раскладываем \sin и \cos до третьего порядка ($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$) и осредняем по времени, полагая $\theta = \nu$. Получаем в четвертом приближении для медленных составляющих систему, которая имеет структуру (8) с иными коэффициентами k_1 и k_2 :

$$\begin{aligned} \dot{s}_s &= \left(-\frac{1}{8} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} - \frac{\varepsilon\mu^2}{4\nu^4} + \frac{\mu^4}{144\nu^7} \right) \cdot \sin(2\alpha_s), \\ \dot{\alpha}_s &= -\varepsilon - \frac{1}{12} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} - \frac{\varepsilon\mu^2}{6\nu^4} - \frac{\varepsilon^2}{2\nu} + \frac{145\mu^4}{6912\nu^7} + \left(-\frac{1}{8} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} - \frac{\varepsilon\mu^2}{4\nu^4} + \frac{7\mu^4}{288\nu^7} \right) \cdot \cos(2\alpha_s), \end{aligned} \tag{10}$$

а из оставшихся слагаемых составляем систему для быстрых переменных, которые не выписаны в связи с громоздкостью формул.

На рис. 2, *a* приведено наложение второго и четвертого приближений на результат численного интегрирования (4) и показан явный вид биений. На рис. 2, *b* цифрой 1 обозначен результат численного интегрирования уравнения Матье (4); 2 – решение уравнения $x = A \cos(\alpha + \theta t)$, $A = \exp[s_s + s_f]$, $\alpha = \alpha_s + \alpha_f$, здесь $s_s, s_f, \alpha_s, \alpha_f$ взяты из четвертого приближения; 3 – решение $x = A \cos(\alpha + \theta t)$, где $A = \exp[s_s + s_f]$, $\alpha = \alpha_s + \alpha_f$, а значения $s_s, s_f, \alpha_s, \alpha_f$ взяты из второго приближения; 4 – ошибка четвертого приближения, увеличенная в 10 раз; 5 – ошибка второго приближения, увеличенная в 10 раз, где ошибка вычисляется по формуле

$$\text{Еггор}_i = x_{\text{численное интегрирование}} - x_{i\text{-е приближение}}, \quad i = 2, 4.$$

Как показано на рис. 2, *b*, четвертое приближение точнее описывает характер изменения амплитуды решения. При данных значениях параметров из (9) получаем аналитические оценки частоты биений 0.106 и периода $T = 59$ с, что находится в хорошем соответствии с приведенными графиками.

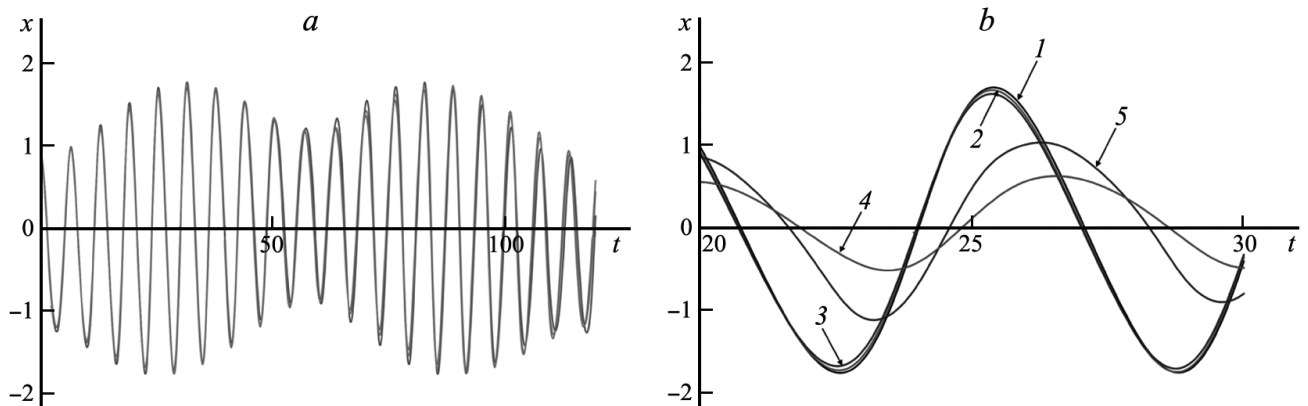


Рис. 2. Биения при $\nu = 1.03, \mu = 0.5$

Уравнения границы. На границе имеем $k_1 = |k_2|$, где k_1 и k_2 определены в (10). Таким образом, получаем два уравнения границы второй резонансной зоны:

$$\begin{aligned} 1) \quad & -\varepsilon - \frac{1}{12} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} - \frac{\varepsilon\mu^2}{6\nu^4} - \frac{\varepsilon^2}{2\nu} + \frac{145\mu^4}{6912\nu^7} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} - \frac{\varepsilon\mu^2}{4\nu^4} + \frac{7\mu^4}{288\nu^7}, \\ 2) \quad & -\varepsilon - \frac{1}{12} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} - \frac{\varepsilon\mu^2}{6\nu^4} - \frac{\varepsilon^2}{2\nu} + \frac{145\mu^4}{6912\nu^7} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\mu^2}{\nu^3} + \frac{\varepsilon\mu^2}{4\nu^4} - \frac{7\mu^4}{288\nu^7}. \end{aligned}$$

Решая уравнения методом последовательных приближений относительно ε и подставляя $\varepsilon = \frac{\nu^2 - 1}{2\nu}$ в уравнения границы, получаем в первом случае

$$1 - \frac{1}{\nu^2} = \frac{\mu^2}{12\nu^4} - \frac{5\mu^4}{3456\nu^8}, \tag{11}$$

или $\nu^2 = 1 + \frac{\mu^2}{12} - \frac{29\mu^4}{3456}$.

Аналогично во втором случае

$$1 - \frac{1}{\nu^2} = -\frac{5\mu^2}{12\nu^4} + \frac{763\mu^4}{3456\nu^8}, \quad (12)$$

$$\text{или } \nu^2 = 1 - \frac{5\mu^2}{12} + \frac{163\mu^4}{3456}.$$

Полученные соотношения (11) и (12) дают неявную связь между параметрами ν и μ , которую мы будем использовать в дальнейшем.

Третья резонансная зона. Первое приближение. Считаем, что $2\theta = 3\nu$. Тогда, полагая нулю быстрые составляющие α_f в правых частях уравнений системы (6) и осредняя их по явно входящему времени, получаем систему для медленных составляющих (оставшиеся слагаемые дают систему для быстрых составляющих):

$$\begin{aligned} \dot{s}_s &= 0, \\ \dot{\alpha}_s &= -\frac{\theta^2 - \omega^2}{2\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \omega, \\ \dot{s}_f &= \frac{\mu}{2\theta} \cdot \sin \nu t + \frac{\mu}{4\theta} \cdot \sin((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{4\theta} \cdot \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s), \\ \dot{\alpha}_f &= \frac{\mu}{2\theta} \cdot \cos \nu t + \frac{\mu}{4\theta} \cdot \cos((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{4\theta} \cdot \cos((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s). \end{aligned}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} s_s &= \text{const} \quad \Rightarrow \quad A_s = e^s = \text{const}, \\ \alpha_s &= \alpha_0, \\ s_f &= -\frac{1}{2\theta} \cdot \left[\frac{\mu}{\nu} \cos \nu t + \frac{\mu}{2(2\theta + \nu)} \cos((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{2(2\theta - \nu)} \cos((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s) \right], \\ \alpha_f &= \frac{1}{2\theta} \cdot \left[\frac{\mu}{\nu} \sin \nu t + \frac{\mu}{2(2\theta + \nu)} \sin((2\theta + \nu)t + 2\alpha_s) + \frac{\mu}{2(2\theta - \nu)} \sin((2\theta - \nu)t + 2\alpha_s) \right]. \end{aligned}$$

Решение представляет собой колебания математического маятника с его собственной частотой, на которые наложена составляющая от возмущающего члена в уравнении $x = A \cos(\alpha + \theta t)$, где $A = e^{s_s + s_f}$, $\alpha = \alpha_s + \alpha_f$.

Второе приближение. Слагаемые \cos и \sin из уравнений системы (7) представляем в виде суммы или разности \cos и \sin с одним из аргументов α_f . Считая $\alpha_f \ll 1$, раскладываем их в ряды Тейлора до первого порядка малости ($\cos(2\alpha_f) \approx 1$, $\sin(2\alpha_f) \approx 2\alpha_f$). Подставляем α_f из первого приближения в уравнения для \dot{s} и $\dot{\alpha}$ системы (7), в результате чего появляются члены вида $\cos \cdot \cos$ и $\sin \cdot \sin$. Преобразуем их согласно тригонометрическим формулам, как показано в примере для второго приближения второй резонансной зоны.

В уравнениях появляются слагаемые с аргументом $(2\theta - 3\nu)t$. Положим $2\theta = 3\nu$, тогда в указанных слагаемых исчезает явная зависимость от времени. В результате получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{s}_s &= 0, \\ \dot{\alpha}_s &= -\frac{\varepsilon}{3} - \frac{3\mu^2}{144\nu^3} = 0, \quad \varepsilon = \frac{9\nu^2 - 1}{3\nu}, \\ \dot{s}_f &= -\frac{\mu^2 \sin[2t\nu]}{144\nu^3} - \frac{\mu^2 \sin[2\alpha_s + t\nu]}{18\nu^3} + \frac{\mu \sin[2\alpha_s + 2t\nu]}{6\nu} - \varepsilon \sin[2\alpha_s + 3t\nu] + \frac{\mu \sin[2\alpha_s + 4t\nu]}{6\nu} + \\ &+ \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 4t\nu]}{72\nu^3} + \frac{\mu^2 \sin[2\alpha_s + 5t\nu]}{18\nu^3} + \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 6t\nu]}{48\nu^3} + \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 8t\nu]}{144\nu^3}, \\ \dot{\alpha}_f &= \frac{\mu \cos[\nu t]}{3\nu} - \frac{\mu^2 \cos[2t\nu]}{48\nu^3} - \frac{\mu^2 \cos[2\alpha_s + t\nu]}{18\nu^3} + \frac{\mu \cos[2\alpha_s + 2t\nu]}{6\nu} - \varepsilon \cos[2\alpha_s + 3t\nu] + \\ &+ \frac{\mu \cos[2\alpha_s + 4t\nu]}{6\nu} + \frac{\mu^2 \cos[4\alpha_s + 4t\nu]}{72\nu^3} - \frac{\mu^2 \cos[2\alpha_s + 5t\nu]}{18\nu^3} + \frac{\mu^2 \cos[4\alpha_s + 6t\nu]}{48\nu^3} + \frac{\mu^2 \cos[4\alpha_s + 8t\nu]}{144\nu^3}. \end{aligned}$$

Интегрируя $\dot{\alpha}_f$, имеем

$$\alpha_f = \frac{\mu \sin[t\nu]}{3\nu^2} - \frac{\mu^2 \sin[2t\nu]}{96\nu^4} - \frac{\mu^2 \sin[2\alpha_s + t\nu]}{18\nu^4} + \frac{\mu \sin[2\alpha_s + 2t\nu]}{12\nu^2} - \frac{\varepsilon \sin[2\alpha_s + 3t\nu]}{3\nu} +$$

$$+ \frac{\mu \sin[2\alpha_s + 4t\nu]}{24\nu^2} + \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 4t\nu]}{288\nu^4} + \frac{\mu^2 \sin[2\alpha_s + 5t\nu]}{90\nu^4} + \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 6t\nu]}{288\nu^4} + \frac{\mu^2 \sin[4\alpha_s + 8t\nu]}{1152\nu^4}.$$

Третье приближение. Аналогично описанному выше подставляем значение α_f , найденное во втором приближении, в преобразованные слагаемые системы (7), считая $\alpha_f \ll 1$, раскладываем \sin и \cos до второго порядка ($\sin x = x - \frac{x^3}{3!}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}$) и, осредняя по времени (полагая $2\theta = 3\nu$), получаем в третьем приближении систему для медленных составляющих, которая имеет структуру (8) с иными коэффициентами k_1 и k_2 :

$$\dot{s}_s = \frac{\mu^3}{96\nu^5} \cdot \sin(2\alpha_s), \tag{13}$$

$$\dot{\alpha}_s = -\varepsilon - \frac{\mu^2}{48\nu^3} + \frac{\mu^3}{96\nu^5} \cdot \cos(2\alpha_s). \tag{14}$$

На рис. 3 и 4 приведено сравнение графика 1 — результата численного интегрирования уравнения (4) и графика 2 — огибающей по третьему приближению, которая является решением уравнения (13) и его дальнейшего преобразования к амплитуде $A = e^s$.

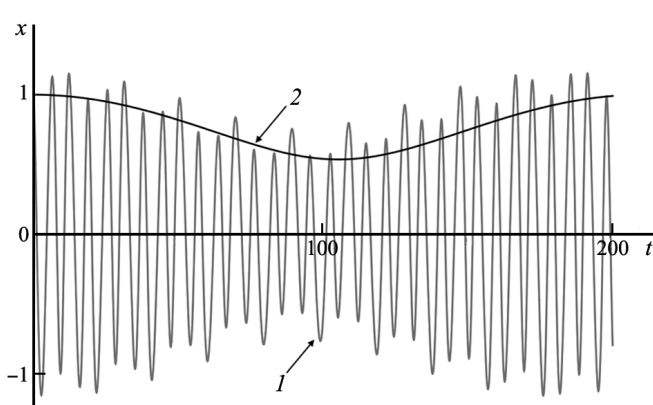


Рис. 3. Биения при значениях параметров $\nu = 0.666877, \mu = 0.5$

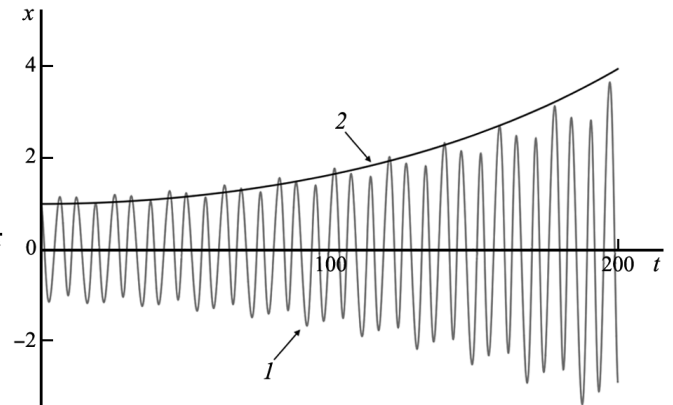


Рис. 4. Экспоненциальный рост при значениях параметров $\nu = 0.657667, \mu = 0.5$

На рис. 3 иллюстрируется режим биений: точка, соответствующая параметрам, при которых производится интегрирование, лежит вне резонансной области. При данных значениях параметров из (9) получаем аналитические оценки частоты биений 0.0298 и периода $T = 210$ с, что находится в хорошем соответствии с приведенным графиком. На рис. 4 показан экспоненциальный рост: точка лежит внутри резонансной области.

Уравнения границы. На границе имеем $k_1 = |k_2|$, где k_1 и k_2 определены в (13), (14).

Таким образом, получаем два уравнения границ:

$$1) -\varepsilon - \frac{\mu^2}{48\nu^3} = \frac{\mu^3}{96\nu^5},$$

$$2) -\varepsilon - \frac{\mu^2}{48\nu^3} = -\frac{\mu^3}{96\nu^5}.$$

Подставляя $\varepsilon = \frac{9\nu^2 - 1}{3\nu}$ в уравнения границы и умножая на $\frac{3}{\nu}$, получаем в первом случае

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{\nu^2} = -\frac{\mu^2}{16\nu^4} - \frac{\mu^3}{32\nu^6}, \tag{15}$$

или $\nu^2 = \frac{4}{9} - \frac{\mu^2}{16} - \frac{36\mu^3}{512}$.

Аналогично во втором случае

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{\nu^2} = -\frac{\mu^2}{16\nu^4} + \frac{\mu^3}{32\nu^6}, \quad (16)$$

$$\text{или } \nu^2 = \frac{4}{9} - \frac{\mu^2}{16} + \frac{36\mu^3}{512}.$$

С помощью замены $z = \nu t$, $\alpha = \frac{1}{\nu^2}$, $\beta = \frac{\mu}{\nu^2}$ рассматриваемое в настоящей работе уравнение (4) сводится к другой форме $x'' + (\alpha + \beta \cos z)x = 0$, используемой в [6], и полученные формулы (11), (12), (15), (16) приводятся к виду, записанному в [6]. В [7] уравнение $x'' + (\alpha + 4q \cos z_1)x = 0$ сводится к соответствующему уравнению в [6] заменой $z = 2z_1$, $\beta = -4q$.

Таким образом, получили уравнения граничных кривых, которые в точности совпадают с результатами [6] и [7].

Заключение. В работе применен метод исследования уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, существенной особенностью которого является то, что после стандартного перехода к амплитуде и фазе уравнение для фазы становится независимым. Построены первое, второе, третье и четвертое приближения для второй резонансной области, а также первое, второе и третье приближения для третьей резонансной области уравнения Матье, которые описывают поведение решений как внутри резонансной области, так и снаружи. Показано, что вблизи границы, но вне резонансных зон, имеет место движение типа биений, а внутри границы — экспоненциальный рост. Дано описание поведения решений вне резонансных зон в аналитическом виде, в том числе приведена оценка периода биений, что ранее не встречалось в литературе. Представлено сравнение полученных уравнений границ устойчивости с известными результатами, которое показывает, что, несмотря на неизученную сходимости данного метода, он дает формулы, которые в точности совпадают с известными в литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill G. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon // Acta Math. 1886. 8. 1–36.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
3. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ, 1952.
4. Norris J.W. The nonlinear Mathieu equation // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. 4. 71–86.
5. Буданов В.М. Редукция уравнения Матье к нелинейному уравнению первого порядка // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 1. 66–69.
6. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию
02.10.2020

УДК 539.3

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. А. Бобылев¹

Рассматривается оператор Пуанкаре–Стеклова, отображающий на части границы полуплоскости нормальные напряжения в нормальные перемещения. Сформулирована краевая задача, с помощью которой вводится оператор Пуанкаре–Стеклова. Приведено инте-

¹ Бобылев Александр Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ; ст. науч. сотр. Моск. центра фонд. и прикл. матем., e-mail: abobylov@gmail.com.

Bobylev Aleksandr Aleksandrovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.