от переменных $T_1, \ldots, T_r$, где $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ пробегает все векторы с целыми неотрицательными координатами, удовлетворяющими неравенству $v_1 + \ldots + v_r \leqslant h$. Эти многочлены имеют степень не выше $h+d$ по совокупности переменых $T_1, \ldots, T_r$ и различные старшие мономы. Поэтому рассматриваемые как линейные формы от произведений степеней $T_1^{u_1} \ldots T_r^{u_r}$ с условиями $u_1 + \ldots + u_r \leqslant h+d$, они будут линейно независимы над $\mathbf{K}$. Количество таких многочленов равно $s = \binom{h+r}{r}$, и каждый из них дает линейное соотношение $B_{\overline{v}}(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_r}) = 0$ между числами $\omega_1, \ldots, \omega_m$ над полем $\mathbf{K}$. Значит, среди чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$ имеется не более $m - s$ линейно независимых над $\mathbf{K}$. Сравнивая эту оценку со следствием 1 и предложением 1, получаем неравенство $m - s \geqslant \frac{m}{\nu}$, противоречащее (6). Противоречие завершает доказательство теоремы Линдемана–Вейерштрасса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hermite Ch.* Oeuvres de Charles Hermite. Paris: Gauthier–Villars, 1912.
2. *Lindemann F.* Uber die Zahl π // Math. Ann. 1882. **20**. 213–225.
3. *Weierstrass K.* Zu Lindemann's Abhandlung: Uber die Ludolph'sche Zahl // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1885. 1067–1085.
4. *Бедулев Е.В.* О линейной независимости чисел над числовыми полями // Матем. заметки. 1998. **64**, вып. 4. 506–517.
5. *Нестеренко Ю.В.* О линейной независимости чисел // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1985. № 1. 46–49.
6. *Rivoal T.* La fonction zeta de Riemann prend une infinite de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // C. r. Acad. sci. A. 2000. **331**. 267–270.
7. *Siegel C.L.* Uber einige Anvendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1929. N 1.
8. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I // J. reine und angew. Math. 1931. **166**. 118–136; Teil II // J. reine und angew. Math. 1932. **166**. 137–150.

Поступила в редакцию
11.09.2020

УДК 511

О СВОЙСТВАХ (НАСЛЕДСТВЕННО) НОРМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. Ю. Лисеев[1]

В статье рассматриваются свойства нормального и наследственно нормального отображений, приведены их характеризации и примеры.

Ключевые слова: послойная топология, нормальное отображение, наследственно нормальное отображение.

Properties of normal and hereditarily normal mappings are considered in the paper, their charecterizations and examples are presented.

Key words: fiberwise topology, normal mapping, hereditarily normal mapping.

Послойная общая топология (или топология непрерывных отображений) — раздел математики, развивающийся на базе общей и алгебраической топологий. По-видимому, первое упоминание идеи, имеющей отношение к послойной общей топологии, можно найти в классической статье [1], где был определен и изучен класс бикомпактных (в современной терминологии — совершенных) отображений. Название "бикомпактное отображение" подчеркивает, что эти отображения выполняют роль компактов в классе непрерывных отображений. Последующее развитие обусловлено появлением понятия отделимости отображения [2], распространяющего с пространств на непрерывные отображения понятие хаусдорфовости. В статье Б. А. Пасынкова [3] окончательно формулируется

[1] *Лисеев Михаил Юрьевич* — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ; ст. исслед. Моск. центра фунд. и прикл. матем. МГУ, e-mail: liseev.mikhail@gmail.com.

Liseev Mikhail Yur'evich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry; Senior Researcher, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics MSU.

программа “от пространств — к отображениям”, впервые формулируются аксиомы отделимости для отображений. В настоящей работе используется определение нормального отображения из работы [4], поскольку при рассмотрении компактификаций отображений выяснилось, что это определение является “правильным” обобщением понятия нормальности. Пример 4, по-видимому, является первым примером преднормального, но не нормального отображения.

Под пространством мы понимаем топологическое пространство, а под отображением — непрерывное отображение пространств. Рассматриваются свойства нормальных и наследственно нормальных отображений, приводятся их характеризации. В качестве примеров отображений, в том числе и различающих различные типы нормальности, в основном используются постоянные (однослойные) отображения, тождественные (все слои одноточечные) и проекции произведений (все слои одинаковые). Исследуется нормальность слоев и тотального пространства X для отображений $f: X \to Y$ нормального типа.

Определение 1 [3, с. 73]. Подмножества A, B пространства X называются *отделимыми окрестностями в подпространстве* X' *пространства* X, если множества $A \cap X'$ и $B \cap X'$ имеют в X' дизъюнктные окрестности.

Определение 2 [3, с. 73]. Для отображения $f: X \to Y$ множества $A, B \subset X$ называются f*-отделимыми окрестностями*, если любая точка $y \in Y$ обладает окрестностью $\mathcal{O}y$, в прообразе $f^{-1}\mathcal{O}y$ которой множества A и B отделимы окрестностями.

Определение 3 [3, с. 73]. *Отображение* $f: X \to Y$ *преднормально*, если любые два дизъюнктных замкнутых подмножества A и B пространства X будут f-отделимы окрестностями.

Определение 4 [4; 5, с. 52]. *Отображение* $f: X \to Y$ *нормально*, если для любого элемента $\mathcal{O} \in \tau_Y$ отображение $f: f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ преднормально, где τ_Y — топология Y.

Необходимо отметить, что в [3] нормальным называется отображение, преднормальное в смысле [4].

Пример 1. Рассмотрим квадрат прямой Зоргенфрея $K \times K$ и отображение проектирования $p: K \times K \to K$. Тотальное пространство $K \times K$ не нормально (см. [6, п.2.3.12]). Отображение p послойно нормально, поскольку для всякой точки $y \in K$ слой $p^{-1}y = K$ нормален. Само отображение p не преднормально, поскольку для замкнутых множеств $F = \{(q, -q) : q \in \mathbb{Q}\}$ и $T = \{(r, -r) : r \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ и для любой окрестности $\mathcal{O}y \subset K$ точки $y \in K$ трубка $p^{-1}\mathcal{O}y$ будет содержать открыто-замкнутое подмножество $[z, z') \times [-z', -z)$ для $z, z' \in \mathcal{O}y$, $z < z'$, которое гомеоморфно $K \times K$ и в котором замкнутые множества $F \cap \big([z, z') \times [-z', -z)\big)$ и $T \cap \big([z, z') \times [-z', -z)\big)$ не отделимы окрестностями. $\square$

Пример 1 показывает, что из послойной нормальности отображения не следует его преднормальность.

Пример 2. Для всякого постоянного отображения f следующие условия эквивалентны: а) отображение f (не)преднормально; б) отображение f (не)нормально; в) тотальное пространство (не)нормально.

Пример 3. Всякое тождественное отображение нормально. Действительно, рассмотрим тождественное отображение id: $X \to X$ и $\mathcal{O} \in \tau_X$. Тогда $\mathrm{id}\big|_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ — ограничение тождественного отображения на прообраз $\mathcal{O}$ и его образ является тождественным отображением $\mathcal{O}$. Рассмотрим два дизъюнктных замкнутых в $\mathcal{O}$ подмножества F_1 и F_2 и точку $x \in \mathcal{O}$. Если $x \notin F_i$, то в окрестности $\mathcal{O}x = \mathrm{id}^{-1}\mathcal{O} \setminus F_i$, $i = 1, 2$, множества F_1 и F_2 $\mathrm{id}\big|_{\mathcal{O}}$-отделимы окрестностями. Так как $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то у любой точки из $\mathcal{O}$ есть окрестность, в прообразе которой множества F_1 и F_2 отделимы окрестностями. $\square$

В следующих предложении и примере показано, что нормальность тотального пространства при непрерывном отображении влечет только преднормальность самого отображения и понятия нормальности и преднормальности отображения не совпадают.

Предложение 1 [5, утверждение 1.22]. *Любое отображение* $f: X \to Y$ *нормального пространства* X *преднормально.*

Пример 4. Рассмотрим плоскость Тихонова $T = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0]) \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$, где ω_0 — начальный ординал мощности $\aleph_0$, а ω_1 — наименьший несчетный ординал. Она не является нормальным пространством (см. [4]). Заметим, что единственная компактификация плоскости Тихонова $\beta T = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0]$, имеющая одноточечный нарост $\{(\omega_1, \omega_0)\}$, является хаусдорфовым компактом, а значит, нормальным пространством.

Рассмотрим отображение $f: \beta T \to S$, где S — связное двоеточие (двухточечное пространство $S = \{s_1, s_2\}$ с топологией $\tau_S = \{\varnothing, s_1, \{s_1, s_2\}\}$), такое, что $f(T) = s_1$, а $f((\omega_1, \omega_0)) = s_2$. Очевидно, что отображение f непрерывно.

Из нормальности пространства βT и предложения 1 следует, что отображение f преднормально. Рассмотрим открытое в S множество $\mathcal{O} = s_1$. Постоянное отображение $f : f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ не преднормально (см. пример 2). Значит, отображение f не нормально. □

При предъявлении дополнительных условий к отображению или образу преднормальное и послойно нормальное отображения являются нормальными, этот факт приведен в следующих двух предложениях.

Предложение 2 [5, утверждение 1.16]. *Пусть отображение $f : X \to Y$ преднормально, а пространство Y регулярно, тогда отображение f нормально.*

Предложение 3 [5, утверждение 1.17]. *Пусть отображение $f : X \to Y$ замкнуто и для любой точки $y \in Y$ любые два дизъюнктных замкнутых в слое $f^{-1}y$ множества отделимы окрестностями в X, тогда f нормально.*

Определение 5 [3, с. 74]. Ограничение $f' = f\big|_{X'} : X' \to Y$ отображения $f : X \to Y$ на подпространство X' пространства X будем называть *подотображением отображения* f. Если X' есть замкнутое (открытое) подмножество пространства X, то f' будем называть *замкнутым* (*открытым*) *подотображением отображения* f.

Как и в случае пространств, представляет интерес ряд элементарных свойств нормальных отображений. Следующее предложение, приведенное в статье [3] для случая преднормального отображения, очевидно, справедливо и для нормального отображения.

Предложение 4. *Замкнутое подотображение нормального отображения нормально.*

Доказательство. Пусть $f_{X_0} = f|_{X_0} : X_0 \to Y$ — замкнутое подотображение нормального отображения $f : X \to Y$. Фиксируем произвольное $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и произвольную точку $y_0 \in \mathcal{O}$. Рассмотрим два произвольных дизъюнктных замкнутых в $f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}$ подмножества F_1 и F_2. Тогда, поскольку $f_{X_0}^{-1}\mathcal{O} = X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}$, множества F_1 и F_2 замкнуты в $f^{-1}\mathcal{O}$ и дизъюнктны.

Из нормальности отображения $f : X \to Y$ следует, что найдется такая окрестность $\mathcal{O}y_0 \subset \mathcal{O}$ точки y_0, что множества F_1 и F_2 отделимы открытыми в $f^{-1}\mathcal{O}y_0$ множествами $\mathcal{O}'_1$ и $\mathcal{O}'_2$. Так как $f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}y_0 = X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}y_0$ и $F_i \subset \mathcal{O}'_i$, то $F_i \cap f_{X_0}^{-1}\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'_i \cap f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}$, где $i = 1, 2$, и множества $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}'_1 \cap f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}'_2 \cap f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}$ открыты в $f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}$, дизъюнктны и отделяют подмножества F_1 и F_2 в $f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}y_0$. Тем самым отображение $f_{X_0} : f_{X_0}^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ преднормально для любого $\mathcal{O} \in \tau_Y$. Значит, отображение f_{X_0} нормально. □

Далее приведем аналог "малой леммы Урысона" для отображений.

Предложение 5. *Отображение $f : X \to Y$ нормально тогда и только тогда, когда для всяких $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и $y \in \mathcal{O}$ и любой окрестности $\mathcal{O}F$ произвольного замкнутого в $f^{-1}\mathcal{O}$ множества F найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$ точки y, что в $f^{-1}\mathcal{O}y$ существует окрестность V множества $F \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, такая, что $(F \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \subset \mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(V) \subset (\mathcal{O}F \cap f^{-1}\mathcal{O}y)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Фиксируем произвольные множество $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и точку $y \in \mathcal{O}$. Для замкнутого в $f^{-1}\mathcal{O}$ множества F и его окрестности $\mathcal{O}F$ рассмотрим множество $f^{-1}\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}F$, оно замкнуто в $f^{-1}\mathcal{O}$ и $F \cap (f^{-1}\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}F) = \varnothing$. Поскольку отображение f нормально, то для y найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$, что в прообразе $f^{-1}\mathcal{O}y$ множества F и $f^{-1}\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}F$ отделимы окрестностями, обозначим их $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ соответственно. То есть имеем $(F \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \subset \mathcal{O}_1$, $((f^{-1}\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}F) \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \subset \mathcal{O}_2$. Тогда из условия $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$ следует, что $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\mathcal{O}_1) \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$, значит, $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\mathcal{O}_1) \cap ((f^{-1}\mathcal{O}\backslash\mathcal{O}F) \cap f^{-1}\mathcal{O}y) = \varnothing$ и $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\mathcal{O}_1) \subset (\mathcal{O}F \cap f^{-1}\mathcal{O}y)$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{O} \in \tau_Y$, фиксируем произвольную точку $y \in \mathcal{O}$ и рассмотрим два дизъюнктных замкнутых подмножества F_1 и F_2 множества $f^{-1}\mathcal{O}$. Обозначим множество $\mathcal{O}F_1$ через $f^{-1}\mathcal{O}\backslash F_2$, оно открыто и $\mathcal{O}F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Тогда найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$ точки y, что в $f^{-1}\mathcal{O}y$ можно выбрать окрестность V_1 множества $F_1 \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, такую, что $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(V_1) \subset (\mathcal{O}F_1 \cap f^{-1}\mathcal{O}y) = (f^{-1}\mathcal{O}\backslash F_2) \cap f^{-1}\mathcal{O}y = f^{-1}\mathcal{O}y\backslash F_2$. Следовательно, $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(V_1) \cap (F_2 \cap f^{-1}\mathcal{O}y) = \varnothing$, значит, $(F_2 \cap f^{-1}\mathcal{O}y) \subset (f^{-1}\mathcal{O}y\backslash\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(V_1))$. Доказали, что отображение $f : f^{-1}\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ преднормально, значит, отображение f нормально. □

Лемма (об ужатии). *Пусть отображение $f : X \to Y$ нормально, тогда для всяких $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и $y \in \mathcal{O}$ и любого конечного открытого покрытия $\lambda = \{O_1, \ldots, O_n\}$ пространства $f^{-1}\mathcal{O}$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$ точки y, что существует конечное открытое покрытие $\mu_y = \{V_1, \ldots, V_n\}$ пространства $f^{-1}\mathcal{O}y$, комбинаторно вписанное в покрытие $\lambda \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, такое, что $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}y}(V_i) \subset O_i \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ для любого $i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные элемент $\mathcal{O} \in \tau_Y$, покрытие $\lambda = \{O_1, \ldots, O_n\}$ пространства $f^{-1}\mathcal{O}$ и точку $y \in \mathcal{O}$. Построим множества V_i по индукции. При $n = 1$ множество

$F_1 = f^{-1}\mathcal{O} \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{n} O_i$ замкнуто в $f^{-1}\mathcal{O}$ и, очевидно, $F_1 \subset O_1$. Тогда по предложению 5 найдется такая окрестность $\mathcal{O}^1 y \subset \mathcal{O}$ точки y, что в трубке $f^{-1}\mathcal{O}^1 y$ существует окрестность $\mathcal{O}F_1$ множества $F_1 \cap f^{-1}\mathcal{O}^1 y$, такая, что $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}^1 y}\mathcal{O}F_1 \subset O_1 \cap f^{-1}\mathcal{O}^1 y$. Положим $\mathcal{O}F_1 = V_1$. Таким образом, семейство $v_1 = \{V_1, O_2 \cap f^{-1}\mathcal{O}^1 y, \ldots, O_n \cap f^{-1}\mathcal{O}^1 y\}$ покрывает подпространство $f^{-1}\mathcal{O}^1 y$ и комбинаторно вписано в покрытие $\lambda \cap f^{-1}\mathcal{O}^1 y$.

Предположим, что для точки y и некоторого целого числа m $(1 \leqslant m < n)$ найдена окрестность $\mathcal{O}^m y \subset \mathcal{O}^{m-1} y \subset \ldots \subset \mathcal{O}^1 y$, такая, что семейство $v_m = \{V_1 \cap f^{-1}\mathcal{O}^m y, \ldots, V_{m-1} \cap f^{-1}\mathcal{O}^m y, V_m, O_{m+1} \cap f^{-1}\mathcal{O}^m y, \ldots, O_n \cap f^{-1}\mathcal{O}^m y\}$ покрывает $f^{-1}\mathcal{O}^m y$, вписано в семейство $\lambda \cap f^{-1}\mathcal{O}^m y$ и $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}^m y}(\mathcal{O}F_m) \subset (O_m \cap f^{-1}\mathcal{O}^m y)$, где $F_m = f^{-1}\mathcal{O}^{m-1} y \setminus \big((V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{m-1} \cup O_{m+1} \cup \ldots \cup O_n) \cap f^{-1}\mathcal{O}^{m-1} y\big)$, а $V_m = \mathcal{O}F_m$.

Рассмотрим множество $F_{m+1} = f^{-1}\mathcal{O}^m y \setminus \big((V_1 \cup \ldots \cup V_m \cup O_{m+2} \cup \ldots \cup O_n) \cap f^{-1}\mathcal{O}^m y)\big)$. Оно замкнуто в $f^{-1}\mathcal{O}^m y$ и, очевидно, $F_{m+1} \subset (O_{m+1} \cap f^{-1}\mathcal{O}^m y)$. Тогда по предложению 5 найдется такая окрестность $\mathcal{O}^{m+1} y \subset \mathcal{O}^m y$ точки y, что в трубке $f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y$ существует окрестность $\mathcal{O}F_{m+1}$ множества $F_{m+1} \cap f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y$, такая, что $\mathrm{cl}_{f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y}(\mathcal{O}F_{m+1}) \subset (O_{m+1} \cap f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y)$. Обозначим $V_{m+1} = \mathcal{O}F_{m+1}$. Таким образом, семейство $v_{m+1} = \{V_1 \cap f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y, \ldots, V_m \cap f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y, V_{m+1}, O_{m+2} \cap f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y, \ldots, O_n \cap f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y\}$ покрывает подпространство $f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y$ и вписано в семейство $\lambda \cap f^{-1}\mathcal{O}^{m+1} y$. Завершая шаг индукции, заключаем, что покрытие $v_n = \{V_i'\}_{i=1}^n$, где $V_i' = V_i \cap f^{-1}\mathcal{O}^n y$ при $i = \overline{1, n-1}$, а $V_n' = V_n$, очевидно, является искомым. □

Широко известно так называемое двойственное определение нормального пространства (пространство нормально тогда и только тогда, когда в любое конечное открытое покрытие можно комбинаторно вписать конечное замкнутое покрытие). Следующее предложение иллюстрирует, что в случае отображений имеет место аналогичное двойственное определение нормальности.

Предложение 6. *Отображение $f : X \to Y$ нормально тогда и только тогда, когда для всяких $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и $y \in \mathcal{O}$ и любого конечного открытого покрытия $\lambda = \{O_1, \ldots, O_n\}$ пространства $f^{-1}\mathcal{O}$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$ точки y, что существует конечное замкнутое покрытие $\mu_y = \{F_1, \ldots, F_n\}$ пространства $f^{-1}\mathcal{O}y$, комбинаторно вписанное в покрытие $\lambda \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, т.е. $F_i \subset O_i \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ для любого $i = \overline{1, n}$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1. Для доказательства достаточности зафиксируем произвольный элемент $\mathcal{O} \in \tau_Y$ и произвольную точку $y_0 \in \mathcal{O}$. Рассмотрим два произвольных дизъюнктных замкнутых подмножества F_1 и F_2 множества $f^{-1}\mathcal{O}$. Множества $O_1 = f^{-1}\mathcal{O} \setminus F_1$ и $O_2 = f^{-1}\mathcal{O} \setminus F_2$ открыты и образуют покрытие пространства $f^{-1}\mathcal{O}$. По условию найдется такая окрестность $\mathcal{O}y_0 \subset \mathcal{O}$ точки y_0, что существуют замкнутые в прообразе $f^{-1}\mathcal{O}y_0$ множества A_1 и A_2, для которых $A_1 \subset (O_2 \cap f^{-1}\mathcal{O}y_0)$, $A_2 \subset (O_1 \cap f^{-1}\mathcal{O}y_0)$ и $A_1 \cup A_2 = f^{-1}\mathcal{O}y_0$.

Рассмотрим множества $f^{-1}\mathcal{O}y_0 \setminus A_1$ и $f^{-1}\mathcal{O}y_0 \setminus A_2$, они открыты в $f^{-1}\mathcal{O}y_0$, являются окрестностями множеств $F_1 \cap f^{-1}\mathcal{O}y_0$ и $F_2 \cap f^{-1}\mathcal{O}y_0$ соответственно, кроме того, эти окрестности дизъюнктны, так как $(f^{-1}\mathcal{O}y_0 \setminus A_1) \cap (f^{-1}\mathcal{O}y_0 \setminus A_2) = f^{-1}\mathcal{O}y_0 \setminus (A_1 \cup A_2) = \varnothing$. □

Определение 6 [7, определение 10]. Отображение $f : X \to Z$ называется *наследственно нормальным*, если каждое его подотображение нормально.

Предложение 7. *Отображение наследственно нормально тогда и только тогда, когда всякое его подотображение преднормально.*

Доказательство. Необходимость очевидна, поскольку из наследственной нормальности отображения следует нормальность и тем более преднормальность всякого его подотображения. Для доказательства достаточности рассмотрим отображение $f : X \to Y$ и его произвольное подотображение $f_{X_0} : X_0 \to Y$. Зафиксируем произвольные окрестность $\mathcal{O} \in Y$ и точку $y \in \mathcal{O}$. Пусть F_1 и F_2 — произвольные замкнутые в $f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}$ дизъюнктные подмножества. По условию подотображение f_{X_0} преднормально, значит, для y найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$, что для отображения $f' = f\big|_{(X_0 \cap f_{X_0}^{-1}\mathcal{O})}$ в трубке $(f')^{-1}\mathcal{O}y = X_0 \cap f_{X_0}^{-1}\mathcal{O} \cap f^{-1}\mathcal{O}y = X_0 \cap f_{X_0}^{-1}\mathcal{O}$ множества $F_1 \cap (f')^{-1}\mathcal{O}y$ и $F_2 \cap (f')^{-1}\mathcal{O}y$ будут отделимы окрестностями для отображения f'. Значит, подотображение $f_{X_0} : X_0 \to Y$ нормально и отображение f наследственно нормально. □

Предложение 8. *Любое отображение $f : X \to Y$ наследственно нормального пространства X наследственно нормально.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное подотображение $f_1 : X' \to Y$ отображения f, из наследственной нормальности X следует, что подпространство X' нормально. Значит, по предложению 1 отображение f_1 преднормально, и предложение 7 завершает доказательство. □

Пример 5. Постоянное отображение пространства X наследственно нормально в том и только в том случае, когда X — наследственно нормальное пространство.

Предложение 9. *Отображение $f : X \to Y$ наследственно нормально тогда и только тогда, когда для любых двух отделенных в X подмножеств* [8, с. 23] *P и Q и каждой точки $y \in Y$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$, что в $f^{-1}\mathcal{O}y$ множества P и Q отделимы окрестностями.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим подпространство $X_0 = X \backslash (\mathrm{cl}(P) \cap \mathrm{cl}(Q))$ пространства X. Поскольку множества P и Q отделены в X, то из соотношения $P \cap \mathrm{cl}(Q) = \varnothing$ следует, что $P \cap (\mathrm{cl}(P) \cap \mathrm{cl}(Q)) = \varnothing$, т.е. $P \subset X_0$. Из аналогичных рассуждений получаем $Q \subset X_0$.

Рассмотрим замкнутые в X_0 множества $A = X_0 \cap \mathrm{cl}(P)$ и $B = X_0 \cap \mathrm{cl}(Q)$, они дизъюнктны, поскольку $A \cap B = X_0 \cap \mathrm{cl}(P) \cap \mathrm{cl}(Q) = \varnothing$ и

$$P \subset A, Q \subset B. \tag{1}$$

Фиксируем произвольную точку $y \in Y$. Из преднормальности подотображения $f_0 : X_0 \to Y$ отображения f следует, что для y найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$, что в $f_0^{-1}\mathcal{O}y$ множества $A \cap f_0^{-1}\mathcal{O}y$ и $B \cap f_0^{-1}\mathcal{O}y$ отделимы открытыми в $f_0^{-1}\mathcal{O}y$ множествами $\mathcal{O}A$ и $\mathcal{O}B$ соответственно. То есть

$$A \cap f_0^{-1}\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}A, \text{ а } B \cap f_0^{-1}\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}B. \tag{2}$$

Заметим, что из непрерывности подотображения f_0 следует, что множество $f_0^{-1}\mathcal{O}y$ открыто в X_0, а в силу того, что подмножество X_0 открыто в X, множество $f_0^{-1}\mathcal{O}y$ открыто в X. Таким образом, множества $\mathcal{O}A$ и $\mathcal{O}B$ открыты в X.

Из (1) и (2), учитывая, что $f_0^{-1}\mathcal{O}y = X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, получаем $P \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset A \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}A$ и $Q \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset B \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}B$. Таким образом, для произвольного $y \in Y$ найдена такая окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$, что в $f^{-1}\mathcal{O}y$ отделенные в X множества P и Q отделимы окрестностями $\mathcal{O}A$ и $\mathcal{O}B$ соответственно.

Достаточность. Рассмотрим произвольное подотображение $f_0 : X_0 \to Y$ отображения f. Пусть подмножества P и Q замкнуты в X_0 и дизъюнктны. Множества P и Q отделены в X_0 и, очевидно, отделены в X. Фиксируем произвольную точку $y \in Y$. Тогда по условию найдется такая окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$, что открытые в $f^{-1}\mathcal{O}y$ множества $\mathcal{O}_P$ и $\mathcal{O}_Q$ отделяют множества $P \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ и $Q \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ соответственно. Поскольку $f_0^{-1}\mathcal{O}y = X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}y$, то $P \cap f_0^{-1}\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}'_P = \mathcal{O}_P \cap X_0 \subset f_0^{-1}\mathcal{O}y$ и $Q \cap f_0^{-1}\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}'_Q = \mathcal{O}_Q \cap X_0 \subset f_0^{-1}\mathcal{O}y$. Кроме того, из условия $\mathcal{O}_P \cap \mathcal{O}_Q = \varnothing$ следует, что $\mathcal{O}'_P \cap \mathcal{O}'_Q = \varnothing$. То есть подотображение $f_0 : X_0 \to Y$ преднормально, значит, из предложения 7 заключаем, что отображение f наследственно нормально. □

Известно, что если нормальность пространства наследуется его открытыми подмножествами, то такое пространство наследственно нормально. Аналогичное утверждение справедливо и для отображений.

Предложение 10. *Отображение $f : X \to Y$ наследственно нормально тогда и только тогда, когда всякое открытое подотображение отображения f преднормально.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Перейдем к доказательству достаточности. Рассмотрим произвольное подотображение $f_0 : X_0 \to Y$ отображения f, любые открытые подотображения которого преднормальны. Пусть подмножества F_1 и F_2 замкнуты в X_0 и $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Зафиксируем произвольную точку $y \in Y$. В силу предложения 7 необходимо доказать преднормальность отображения f_0. Положим

$$\Phi_1 = \mathrm{cl}_X F_1, \ \Phi_2 = \mathrm{cl}_X F_2, \ \Psi = \Phi_1 \cap \Phi_2 \text{ и } X_0 \subset X \setminus \Psi = X'. \tag{3}$$

Отображение $f' : X' \to Y$ — открытое подотображение отображения f. По условию отображение f' преднормально. Подмножества $\Phi_1 \cap X'$ и $\Phi_2 \cap X'$ замкнуты в X' и дизъюнктны.

Поскольку отображение f' преднормально, то для точки y найдется окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$, такая, что в $(f')^{-1}\mathcal{O}y$ множества $\Phi_1 \cap X' \cap (f')^{-1}\mathcal{O}y$ и $\Phi_2 \cap X' \cap (f')^{-1}\mathcal{O}y$ отделимы окрестностями $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ соответственно. Множества $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ открыты в $(f')^{-1}\mathcal{O}y$ и, значит, открыты в X' и в X. Из (3) следует, что

$$F_i \cap (f')^{-1}\mathcal{O}y \subset \Phi_i \cap X' \cap (f')^{-1}\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}_i, i = 1, 2.$$

Тогда $F_i \cap f^{-1}Oy \subset X_0 \cap \mathcal{O}_i$, $i = 1, 2$, и отображение f_0 преднормально. Предложение 7 завершает доказательство. □

В определении 4 подотображение определяется как сужение отображения на подмножество тотального пространства (далее для удобства будем обозначать сужение отображения на подмножество тотального пространства через $f\big|_B$, где $B \subset X$). Рассматривая сужения на подмножество образа и на подмножества прообраза и образа, имеем следующие определения подотображения.

Определение 7 [6, с. 113]. Сужение отображения $f : X \to Y$ на подпространства $A \subset X$ и $f(A) \subset Y$ будем называть *подотображением отображения f в смысле ограничения на образ и прообраз* и обозначать $f\big|\big|_A$. Сужение отображения $f : X \to Y$ на подпространство $L \subset Y$ будем называть *подотображением отображения f в смысле ограничения на образ* и обозначать f_L.

Определение 8. Отображение $f : X \to Y$ назовем *наследственно нормальным в смысле ограничения на прообраз и образ*, если каждое его подотображение (в смысле ограничения на прообраз и образ) нормально. Отображение $f : X \to Y$ назовем *наследственно нормальным в смысле ограничения на образ*, если каждое его подотображение (в смысле ограничения на образ) нормально.

Отметим, что в терминологии определения 6 отображение $f : X \to Y$ нормально, если любое его подотображение в смысле сужения на любое открытое подмножество Y преднормально.

Предложение 11. *Всякое наследственно нормальное отображение наследственно нормально в смысле сужения на прообраз и образ.*

Каждое наследственно нормальное в смысле сужения на прообраз и образ отображение наследственно нормально в смысле сужения на образ.

Всякое наследственно нормальное в смысле сужения на образ отображение нормально.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f : X \to Y$. Пусть f наследственно нормально в смысле сужения на прообраз. По предложению 7 это условие эквивалентно тому, что любое подотображение $f\big|_{X_0} : X_0 \to Y$ преднормально. Но из преднормальности отображения $f\big|_{X_0} : X_0 \to Y$ следует преднормальность отображения $f\big|\big|_{X_0} : X_0 \to f(X_0)$, так как $f(X_0) \subset Y$ и $\tau_{f(X_0)} = \tau_Y \cap f(X_0)$, т.е. отображение f наследственно нормально в смысле сужения на прообраз и образ.

Пусть f наследственно нормально в смысле сужения на прообраз и образ. Тогда для любого подмножества $X_0 \subset X$ сужение отображения $f\big|\big|_{X0} : X_0 \to f(X_0)$ на прообраз и образ нормально. Значит, нормально и отображение $f\big|\big|_{f^{-1}(f(X_0))} : f^{-1}(f(X_0)) \to f(X_0)$, т.е. отображение f наследственно нормально в смысле сужения на образ.

Пусть f наследственно нормально в смысле сужения на образ. Тогда произвольное подотображение (в смысле сужения на образ) отображения f нормально, значит, отображение f нормально. $\square$

Утверждение 1 [5, с. 56]. *Если пространство Y регулярно и паракомпактно, а отображение $f : X \to Y$ преднормально, то пространство X нормально.*

Предложение 12. *Если пространство Y регулярно и паракомпактно, а отображение $f : X \to Y$ наследственно нормально в смысле сужения на прообраз, то тотальное пространство X наследственно нормально.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное подотображение $f\big|_{X_0} : X_0 \to Y$ в смысле сужения на прообраз, по условию оно преднормально. Тогда из регулярности и паракомпактности пространства Y и утверждения 1 следует, что подпространство X_0 нормально. $\square$

В следующих примерах показано, что утверждения, обратные заявленным в предложении 11, вообще говоря, неверны.

Пример 6. Рассмотрим постоянное отображение $f : \beta T \to \{y\} = Y$ компактификации βT плоскости Тихонова. Поскольку образ состоит из одной точки, то любое подотображение (в смысле сужения на образ) совпадает с f. Из нормальности пространства βT и примера 2 заключаем, что отображение f наследственно нормально в смысле сужения на образ. Рассмотрим подотображение (в смысле сужения на образ и прообраз) $f\big|\big|_T : T \to f(T) = \{y\}$. Из примера 2 и того, что пространство T не нормально, следует, что подотображение $f\big|\big|_T$ не преднормально, значит, отображение f не наследственно нормально в смысле сужения на образ и прообраз.

Пример 7. Рассмотрим тождественное отображение $\mathrm{id} : \beta T \to \beta T$ компактификации βT плоскости Тихонова. Для произвольного подпространства $B \subset \beta T$ рассмотрим подотображение в смысле сужения на образ и прообраз $\mathrm{id}\big|\big|_B : B \to f(B)$. Оно тождественное, следовательно, нормально (см. пример 3). Таким образом, отображение id наследственно нормально в смысле сужения на образ и прообраз.

Далее будем рассматривать подотображение в смысле сужения на прообраз $\mathrm{id}\big|_T : T \to \beta T$. В образе рассмотрим точку $y = (\omega_0, \omega_1)$ и ее произвольную окрестность $\mathcal{O}y$. Тогда $(\mathrm{id}\big|_T)^{-1}\mathcal{O}y = \mathrm{id}^{-1}\mathcal{O}y \cap T$, но подпространство $\mathrm{id}^{-1}\mathcal{O}y \cap T$ не нормально (дизъюнктные замкнутые в $\mathrm{id}^{-1}\mathcal{O}y$ множества $A \cap \mathrm{id}^{-1}\mathcal{O}y = \{(\omega_0, \alpha) | 0 \leqslant \alpha < \omega_1\} \cap \mathrm{id}^{-1}\mathcal{O}y$ и $B \cap \mathrm{id}^{-1}\mathcal{O}y = \{(n, \omega_1) | 0 \leqslant n < \omega_0\} \cap \mathrm{id}^{-1}\mathcal{O}y$ не отделимы окрестностями в трубке $\mathrm{id}^{-1}\mathcal{O}y \cap T$), значит, подотображение $\mathrm{id}\big|_T$ не преднормально, а отображение id не наследственно нормально в смысле сужения на прообраз.

Пример 8. Рассмотрим отображение $f : \beta T \to S$ компактификации βT плоскости Тихонова на

S — слипшееся двоеточие (двухточечное пространство $S = \{s_1, s_2\}$ с топологией $\tau_S = \{\varnothing, \{s_1, s_2\}\}$), такое, что $f(T) = s_1$, а $f((\omega_1, \omega_0)) = s_2$. Очевидно, что отображение f непрерывно и нормально. Рассмотрим сужение отображения f на подмножество s_1 множества S, тогда подотображение $f_{s_1} : (f^{-1}s_1 = T) \to s_1$ в смысле сужения на образ отображения f не преднормально (см. пример 2). То есть отображение f не наследственно нормально в смысле сужения на образ.

Замечание 1 (о слоях отображений). (a) Из нормальности отображения не следует его послойная нормальность. (b) Наследственно нормальное (в смысле сужения на образ) отображение послойно нормально. (c) Наследственно нормальное (в смысле сужения на прообраз и образ) отображение послойно наследственно нормально.

Доказательство. Утверждение (a) следует из примера 8. Поскольку сужения на одноточечные подмножества образа наследственно нормальных (в смысле сужения на образ) отображений нормальны, справедливо утверждение (b). Пусть отображение $f : X \to Y$ наследственно нормально (в смысле сужения на прообраз и образ). Рассмотрим произвольную точку $y \in Y$. Подотображение $f_y = f\big|\big|_{f^{-1}y} : f^{-1}y \to y$ нормально. Кроме того, для любого подмножества $X_0 \subset f^{-1}y$ имеем $f_y(X_0) = y$, т.е. сужение $f_y\big|\big|_{X_0} : X_0 \to f_y(X_0) = y$ нормально и справедливо утверждение (c).

Замечание 2 (о тотальном пространстве). Из нормальности тотального пространства не следует наследственная нормальность отображения (см. пример 7), хотя в ряде случаев удается построить наследственно нормальное отображение, тотальное пространство которого не нормально. Например, тождественное отображение плоскости Тихонова. Действительно, плоскость Тихонова имеет покрытие из открытых множеств, которые являются наследственно нормальными подпространствами.

Следующее предложение для наследственно нормальных в смысле сужения на прообраз и образ (образ) отображений аналогично предложению 7.

Предложение 13. *Отображение наследственно нормально в смысле сужения на прообраз и образ* (*образ*) *тогда и только тогда, когда всякое его сужение на прообраз и образ* (*образ*) *преднормально.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to Y$ наследственно нормально в смысле сужения на образ. Необходимость очевидна, поскольку всякое сужение отображения f на образ нормально и тем более преднормально. Для доказательства достаточности рассмотрим произвольные подотображение (в смысле сужения на образ) $f_{Y_0} : f^{-1}Y_0 \to Y_0$ и $\mathcal{O} \in \tau_{Y_0}$, где τ_{Y_0} — топология на Y_0. Поскольку $\mathcal{O} \subset Y_0$, то $f_{Y_0}^{-1}\mathcal{O} = f^{-1}\mathcal{O}$. По условию отображение $f_{\mathcal{O}} : (f_{Y_0}^{-1}\mathcal{O} = f^{-1}\mathcal{O}) \to \mathcal{O}$ преднормально, следовательно, отображение f_{Y_0} нормально и f наследственно нормально (в смысле сужения на образ).

Пусть теперь отображение $f : X \to Y$ наследственно нормально в смысле сужения на прообраз и образ. Необходимость очевидна, поскольку всякое сужение отображения f на прообраз и образ нормально и тем более преднормально. Доказательство достаточности аналогично доказательству достаточности из предложения 7. $\square$

Автор приносит благодарность профессору Б. А. Пасынкову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе, рецензенту — за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнштейн И.А.* О замкнутых отображениях метрических пространств // Докл. АН СССР. 1947. **57**, № 4. 319–321.
2. *Dieudonné J., Grothendieck A.* Éléments de géométrie algébrique : I. Le langage des schémas // Publ. Math. l'IHÉS. 1960. **4**. 5–228.
3. *Пасынков Б.А.* О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984. 72–102.
4. *Матвеев В.А.* Об отделимых бикомпактификациях отображений // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1988. № 1. 94–96.
5. *Мусаев Д.К., Пасынков Б.А.* О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. Ташкент: АН Республики Узбекистан, 1994.
6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
7. *Лисеев М.Ю.* Сохранение свойств отображений типа нормальности замкнутыми map-морфизмами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 6. 61–64.
8. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию
06.11.2020