Математика

УДК 511.4

ТЕОРЕМА ЛИНДЕМАНА–ВЕЙЕРШТРАССА

Ю. В. Нестеренко[1]

В статье обсуждаются вопросы алгебраической независимости значений функции e^z в алгебраических точках. Наиболее общий результат был установлен в конце XIX века и называется теоремой Линдемана–Вейерштрасса. Эта исторически первая теорема об алгебраической независимости чисел в настоящее время может быть доказана различными способами. Мы предлагаем еще один путь доказательства.

Ключевые слова: алгебраическая независимость, критерий линейной независимости, метод перевала, экспоненциальная функция.

We discuss issues of algebraic independence for values of the function e^z at algebraic points. The most general result of this kind was established at the end of the 19th century and is called the Lindemann–Weierstrass theorem. This is historically the first theorem on the algebraic independence of numbers and it can be proved now in various ways. Below we propose one more way to prove it.

Key words: algebraic independence, criterion of linear independence, saddle point method, exponential function.

В 1873 г. Ш. Эрмит [1, т. 3, с. 150–181] доказал трансцендентность числа e, т.е. доказал, что e не может быть корнем какого-либо многочлена с целыми коэффициентами. В 1882 г. Ф. Линдеман [2] внес в рассуждения Эрмита ряд новых идей и доказал трансцендентность числа π, тем самым решив знаменитую задачу квадратуры круга. Фактически Линдеман установил значительно более общее утверждение: *для любого алгебраического числа $a \neq 0$ значение e^a трансцендентно.* Из этого утверждения следует также трансцендентность натуральных логарифмов отличных от 0 и 1 алгебраических чисел и, в частности, трансцендентность $\pi = i^{-1}\ln(-1)$, а также трансцендентность значений тригонометрических функций.

Линдеман сформулировал без доказательства еще более общую теорему (см. теорему 2 ниже), указав, что она может быть установлена с использованием тех же идей.

Теорема 1 (теорема Линдемана–Вейерштрасса). *Если алгебраические числа $\theta_1, \ldots, \theta_r$ линейно независимых над полем $\mathbb{Q}$, то значения экспоненциальной функции $e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_r}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.*

Эквивалентная формулировка:

Теорема 2 (теорема Линдемана–Вейерштрасса.) *Если $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, m \geqslant 1,$ — различные алгебраические числа, то*

$$e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m} \tag{1}$$

линейно независимы над полем всех алгебраических чисел.

Доказательство второй теоремы было опубликовано К. Вейерштрассом в 1885 г. [3]. В настоящее время ее принято называть теоремой Линдемана–Вейерштрасса.

1. Достаточное условие линейной независимости чисел. Пусть $\mathbf{K}$ — конечное расширение поля рациональных чисел степени ν. Для оценки снизу количества линейно независимых над полем $\mathbf{K}$ чисел в заданной совокупности может быть использовано следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть τ — положительное число, $\sigma(t)$ — определенная для всех положительных значений t, монотонно возрастающая начиная с некоторого места и неограниченная функция, такая, что*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)} = 1.$$

[1] *Нестеренко Юрий Валентинович* — доктор физ.-мат. наук, проф., член.-корр. РАН, зав. каф. теории чисел мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: nester@mi-ras.ru.

Nesterenko Yuri Valentinovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of Chair of Number Theory.

Пусть $\overline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ *и* $L_N(\overline{x})$ — *последовательность линейных форм с целыми коэффициентами из поля* $\mathbf{K}$, *удовлетворяющая условиям*

$$\ln \overline{|L_N|} \leqslant \sigma(N),\ N \geqslant N_0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{\ln |L_N(\overline{\omega})|}{\sigma(N)} = -\tau.$$

Тогда среди чисел $\omega_1, \dots, \omega_m$ *имеется не менее* $\frac{\tau}{\nu}$ *линейно независимых над* $\mathbf{K}$.

Это утверждение есть ослабленный вариант следствия, доказанного в работе [4]. Утверждение в случае $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$ доказано в работе [5]. Оно, в частности, использовалось Т. Ривоалем (см. [6]) для доказательства бесконечномерности линейного пространства над $\mathbb{Q}$, порожденного значениями дзета-функции Римана $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$. В настоящей работе мы используем его вариант для доказательства теоремы Линдемана–Вейерштрасса, который позволяет обойтись в доказательстве без конструкции полной системы линейно независимых линейных форм от рассматриваемых чисел (см. статьи К.Л. Зигеля [7] и К. Малера [8]).

2. Аналитическая конструкция. Изложенный в этом пункте материал основан на работах К. Малера (см., например, [8]), использовавшего в свою очередь интегральное тождество Эрмита, дающее приближения Эрмита–Паде второго рода.

Пусть даны m различных комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и целое неотрицательное число n. Положим

$$N = m(n+1) - 1, \qquad Q(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k)^{n+1}.$$

Тогда, как впервые в 1893 г. доказал Ш. Эрмит [1, т. IV, с. 357–377], справедливо следующее тождество:

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{z\zeta} d\zeta}{(\zeta - \alpha_1)^{n+1} \dots (\zeta - \alpha_m)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) e^{\alpha_k z}, \tag{2}$$

где C есть окружность, содержащая внутри все точки $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Для каждого $k, 0 \leqslant k \leqslant m$, коэффициент $P_k(z)$ есть многочлен от z степени n:

$$P_k(z) = \sum_{j=0}^{n} a_{kj} \frac{z^{n-j}}{(n-j)!}, \qquad a_{kj} = \sum_{\mathbf{l}} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m} \frac{(-1)^{l_i}(n+l_i)!}{n! l_i!} (\alpha_k - \alpha_i)^{-1-n-l_i}, \tag{3}$$

где суммирование происходит по всем наборам целых неотрицательных чисел $l_1, \dots, l_{k-1}, l_{k+1}, \dots, l_m$, сумма которых равна j.

Предложение 2. *Пусть* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — *различные алгебраические числа.*

1) *Если* q — *наименьшее натуральное число, такое, что* $q(\alpha_i - \alpha_j)^{-1} \in \mathbb{Z}_{\mathbf{K}},\ 1 \leqslant i < j \leqslant m$, *то*

$$n! q^N P_k(1) \in \mathbb{Z}_{\mathbf{K}}, \qquad \overline{|P_k(1)|} \leqslant (2M+1)^N, \tag{4}$$

где $M = \max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m} \overline{|\alpha_i - \alpha_j|}^{\,-1}$.

2) *При* $n \longrightarrow \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$R_n(1) = (2\pi)^{-1/2} e^{m^{-1}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)} N^{-N-1/2} e^N (1 + o(1)),$$

где $N = m(n+1) - 1$.

Положим $\overline{\omega} = (e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m})$ и $L_n(\overline{\omega}) = n! q^N R(1)$.

Следствие 1. *Определенная выше величина* $L_n(\overline{\omega})$ *есть линейная форма от координат* ω_j *вектора* $\overline{\omega}$. *Коэффициенты* L_n *принадлежат* $\mathbb{Z}_{\mathbf{K}}$, *и*

$$\ln \overline{|L_n|} \leqslant \sigma(n) = n \ln n + cn, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\ln |L_n(\overline{\omega})|}{\sigma(n)} = 1 - m,$$

где постоянная c *зависит только от чисел* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Доказательство предложения 2. Правая часть тождества (2) есть сумма вычетов функции, стоящей под интегралом в левой части (2), в точках $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Включение (4) сразу же следует из представления (3), если учесть, что

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{m}(n+1+l_i)=N-n+j\leqslant N.$$

Для доказательства неравенства (4) оценим коэффициенты многочлена $P_k(z)$. Из (2) следует представление

$$a_{kj}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{(\zeta-\alpha_k)^{n+1}d\zeta}{Q(\zeta)(\zeta-\alpha_k)^{j+1}},$$

где C_k есть окружность $|\zeta-\alpha_k|=\frac{1}{2M}$. Учитывая, что на окружности C_k при $i\neq k$ справедливо неравенство

$$|\zeta-\alpha_i|\geqslant|\alpha_k-\alpha_i|-|\zeta-\alpha_k|\geqslant\frac{1}{M}-\frac{1}{2M}=\frac{1}{2M},$$

получаем оценку

$$|a_{kj}|\leqslant(2M)^{N-n+j}.$$

Такая же оценка справедлива и для сопряженных числа a_{kj}, поскольку из (2) следует, что для них существует такое же интегральное представление, как и для a_{kj}, но с заменой подынтегральной функции $\dfrac{(\zeta-\alpha_k)^{n+1}}{Q(\zeta)(\zeta-\alpha_k)^{j+1}}$ на сопряженную. Теперь из (3) находим

$$\overline{|P_k(1)|}\leqslant\sum_{j=0}^{n}\overline{|a_{kj}|}\frac{1}{(n-j)!}\leqslant\sum_{j=0}^{n}\frac{(2M)^{N-n+j}}{(n-j)!}\leqslant(2M)^N\big(1+\frac{1}{2M}\big)^N,$$

что и доказывает неравенство (4).

Доказательство второй части предложения 2 использует метод перевала, и я весьма признателен А. Ю. Попову, подсказавшему мне приведенный вариант рассуждений.

Положим при достаточно большом n радиус окружности C равным $N=m(n+1)-1$. Тогда для $z=Ne^{i\varphi}$ имеем $dz=Nie^{i\varphi}d\varphi$, так что

$$I_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{Ne^{i\varphi}}(Ne^{i\varphi})^{-N}a_n(\varphi)d\varphi,$$

где $a_n(\varphi)=\prod_{j=1}^{m}\left(1-\alpha_jN^{-1}e^{-i\varphi}\right)^{-n-1}$. При достаточно большом n получаем

$$a_n(\varphi)=\exp\left(e^{-i\varphi}\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{m}+O(n^{-1})\right),\tag{5}$$

где постоянная в $O(.)$ зависит только от α_j, m и не зависит от φ.

Справедливо представление $I_n=N^{-N}e^NF_n$, где

$$F_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{N(e^{i\varphi}-1-i\varphi)}a_n(\varphi)d\varphi.$$

Обозначим $\lambda_n=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ и

$$G_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n}e^{N(e^{i\varphi}-1-i\varphi)}a_n(\varphi)d\varphi.$$

Тогда в силу неравенства

$$\Re\left(e^{i\varphi}-1-i\varphi\right)=\cos\varphi-1\leqslant\begin{cases}-\frac{\varphi^2}{\pi}, & \text{если } |\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2};\\ -1, & \text{если } \frac{\pi}{2}\leqslant|\varphi|\leqslant\pi,\end{cases}$$

при $\frac{\pi}{2}\geqslant|\varphi|\geqslant\lambda_n$ имеем

$$\Re\left(e^{i\varphi}-1-i\varphi\right)\leqslant-\frac{\ln^2 n}{\pi n},$$

так что, используя (5) и последнее неравенство, получаем

$$|F_n - G_n| \leqslant \exp\left(-\frac{m}{3}\ln^2 n\right).$$

При $|\varphi| \leqslant \lambda_n$ имеем

$$N\left(e^{i\varphi} - 1 - i\varphi\right) = N\left(-\frac{\varphi^2}{2} + O(\varphi^3)\right) = -\frac{N\varphi^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln^3 n)$$

и, значит,

$$e^{N\left(e^{i\varphi}-1-i\varphi\right)} = e^{-\frac{N\varphi^2}{2}}\left(1 + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln^3 n)\right).$$

Кроме того, из (5) находим

$$a_n(\varphi) = \exp\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{m}\right) + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln n),$$

так что

$$G_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{-\frac{N\varphi^2}{2}} a_n(\varphi)d\varphi\left(1 + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln^3 n)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{m}\right)\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{-\frac{N\varphi^2}{2}}d\varphi\left(1 + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln^3 n)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{m}\right)N^{-\frac{1}{2}}\int_{-\lambda_n N^{\frac{1}{2}}}^{\lambda_n N^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\left(1 + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln^3 n)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\exp\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{m}\right)N^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt(1 + o(1).$$

Итак, $G_n = (2\pi N)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha_j}{m}\right)(1 + o(1))$, откуда и следует нужное утверждение.

3. Доказательство теоремы Линдемана–Вейерштрасса. Видимо, К. Л. Зигель был первым (см. [7]), кто использовал соображения, связанные с отображением Веронезе, в теории трансцендентных чисел для сведения задач об алгебраической независимости чисел к задачам о линейной независимости (ср. формулировки теорем 1 и 2). Мы сейчас воспользуемся его идеей.

Предположим в обозначениях теоремы 1, что числа (1) алгебраически зависимы над полем всех алгебраических чисел. Тогда существует многочлен A от r переменных $T_1, \ldots, T_r$, $A \neq 0$, с целыми алгебраическими коэффициентами, такой, что $A(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_r}) = 0$. Обозначим буквой $\mathbf{K}$ поле, порожденное над $\mathbb{Q}$ алгебраическими числами $\theta_1, \ldots, \theta_r$ и коэффициентами многочлена A. Пусть также $\nu = [\mathbf{K} : \mathbb{Q}]$ и d — степень многочлена A по совокупности всех его переменных. Выберем и зафиксируем достаточно большое натуральное число $h > d$, такое, что выполняется неравенство

$$(h+1)(h+2)\cdot\ldots\cdot(h+r) > \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)(h+d+1)(h+d+2)\cdot\ldots\cdot(h+d+r). \tag{6}$$

Это можно сделать, ведь многочлены от h, стоящие в левой и правой частях этого неравенства, имеют одинаковые степени и положительные старшие коэффициенты, причем старший коэффициент левого многочлена больше старшего коэффициента многочлена, стоящего справа.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_m$ — упорядоченные каким-либо способом числа вида $u_1\theta_1 + \ldots + u_r\theta_r$, где $(u_1, \ldots, u_r)$ — все наборы целых неотрицательных чисел с условием $u_1 + \ldots + u_r \leqslant h + d$. Так как $\theta_1, \ldots, \theta_r$ линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$, то все числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$ различны и $m = \binom{h+d+r}{r}$.

Рассмотрим многочлены

$$B_{\overline{v}}(T_1, \ldots, T_r) = T_1^{v_1}\ldots T_r^{v_r}A(T_1, \ldots, T_r)$$

от переменных $T_1, \ldots, T_r$, где $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ пробегает все векторы с целыми неотрицательными координатами, удовлетворяющими неравенству $v_1 + \ldots + v_r \leqslant h$. Эти многочлены имеют степень не выше $h+d$ по совокупности переменых $T_1, \ldots, T_r$ и различные старшие мономы. Поэтому рассматриваемые как линейные формы от произведений степеней $T_1^{u_1} \ldots T_r^{u_r}$ с условиями $u_1 + \ldots + u_r \leqslant h + d$, они будут линейно независимы над $\mathbf{K}$. Количество таких многочленов равно $s = \binom{h+r}{r}$, и каждый из них дает линейное соотношение $B_{\overline{v}}(e^{\theta_1}, \ldots, e^{\theta_r}) = 0$ между числами $\omega_1, \ldots, \omega_m$ над полем $\mathbf{K}$. Значит, среди чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$ имеется не более $m - s$ линейно независимых над $\mathbf{K}$. Сравнивая эту оценку со следствием 1 и предложением 1, получаем неравенство $m - s \geqslant \frac{m}{\nu}$, противоречащее (6). Противоречие завершает доказательство теоремы Линдемана–Вейерштрасса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hermite Ch.* Oeuvres de Charles Hermite. Paris: Gauthier–Villars, 1912.
2. *Lindemann F.* Uber die Zahl π // Math. Ann. 1882. **20**. 213–225.
3. *Weierstrass K.* Zu Lindemann's Abhandlung: Uber die Ludolph'sche Zahl // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1885. 1067–1085.
4. *Бедулев Е.В.* О линейной независимости чисел над числовыми полями // Матем. заметки. 1998. **64**, вып. 4. 506–517.
5. *Нестеренко Ю.В.* О линейной независимости чисел // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1985. № 1. 46–49.
6. *Rivoal T.* La fonction zeta de Riemann prend une infinite de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // C. r. Acad. sci. A. 2000. **331**. 267–270.
7. *Siegel C.L.* Uber einige Anvendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1929. N 1.
8. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I // J. reine und angew. Math. 1931. **166**. 118–136; Teil II // J. reine und angew. Math. 1932. **166**. 137–150.

Поступила в редакцию
11.09.2020

УДК 511

О СВОЙСТВАХ (НАСЛЕДСТВЕННО) НОРМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М. Ю. Лисеев[1]

В статье рассматриваются свойства нормального и наследственно нормального отображений, приведены их характеризации и примеры.

Ключевые слова: послойная топология, нормальное отображение, наследственно нормальное отображение.

Properties of normal and hereditarily normal mappings are considered in the paper, their charecterizations and examples are presented.

Key words: fiberwise topology, normal mapping, hereditarily normal mapping.

Послойная общая топология (или топология непрерывных отображений) — раздел математики, развивающийся на базе общей и алгебраической топологий. По-видимому, первое упоминание идеи, имеющей отношение к послойной общей топологии, можно найти в классической статье [1], где был определен и изучен класс бикомпактных (в современной терминологии — совершенных) отображений. Название "бикомпактное отображение" подчеркивает, что эти отображения выполняют роль компактов в классе непрерывных отображений. Последующее развитие обусловлено появлением понятия отделимости отображения [2], распространяющего с пространств на непрерывные отображения понятие хаусдорфовости. В статье Б. А. Пасынкова [3] окончательно формулируется

[1] *Лисеев Михаил Юрьевич* — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ; ст. исслед. Моск. центра фунд. и прикл. матем. МГУ, e-mail: liseev.mikhail@gmail.com.

Liseev Mikhail Yur'evich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry; Senior Researcher, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics MSU.