7. *De A., Kurur P.P., Saha C., Saptharishi R.* Fast integer multiplication using modular arithmetic // SIAM J. Comput. 2013. **42**, N 2. 685–699.

8. *Harvey D., van der Hoeven J.* Integer multiplication in time $O(n \log n)$ // HAL Techn. report N 02070778. 2019. Available at: https://hal.archives-ouverts.fr/hal-02070778.

Поступила в редакцию
22.11.2020

УДК 517.925.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ, ВРАЩАЕМОСТИ И БЛУЖДАЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

И. Н. Сергеев[1]

Даются определения показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости, аналогичных показателям Ляпунова и пригодных для нелинейных систем. Определения действуют даже тогда, когда решения не определены на всей положительной полуоси времени. Установлено совпадение новых показателей с ранее известными в случае линейной системы. Изучены различные взаимосвязи между этими показателями.

Ключевые слова: дифференциальная система, нелинейная система, показатели Ляпунова, характеристические частоты, колеблемость, вращаемость, блуждаемость.

The definitions of the indices of oscillation, rotation and wandering, similar to the Lyapunov exponents and suitable for nonlinear systems are given. Definitions are valid even when solutions are not defined on the entire positive time semiaxis. The coincidence of the new indicators with those previously known in the case of a linear system is established. Various relationships between these indicators have been studied.

Key words: differential system, nonlinear system, Lyapunov exponents, characteristic frequencies, oscillation, rotation, wandering.

Введение. Важную роль в исследовании устойчивости движения играют показатели (характеристичные числа [1, § 6]), носящие имя их создателя А.М. Ляпунова [2], одного из выдающихся учеников П.Л. Чебышёва. С помощью показателей Ляпунова решений осуществляется оценка сверху экспоненциального роста их нормы при возрастании времени.

Для изучения колебательных свойств движения были введены сначала аналогичные характеристические частоты скалярных решений дифференциальных уравнений [3], а затем и показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости векторных решений дифференциальных систем [4, 5].

Все перечисленные показатели оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определенным на всей положительной полуоси времени. Это затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В настоящей работе предпринята первая попытка (анонсированная в докладах [6–8]) распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, но в рамках непрерывной зависимости решений на компактах от начальных значений.

1. Базовые понятия. Для заданного натурального $n > 1$ и заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовом фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1), а через $x_f(\cdot, x_0)$ то из них, которое для заданного $x_0 \in G$ удовлетворяет задаче Коши:

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(0) = x_0. \tag{2}$$

---

[1] *Сергеев Игорь Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: igniserg@gmail.com.

Sergeev Igor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Equations.

Кроме того, нас будут интересовать частные случаи системы (1), а именно:

а) *линейная* система вида

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in G \equiv \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+), \tag{3}$$

где $A : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ — оператор-функция;

б) *автономная* система вида

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in G. \tag{4}$$

Непродолжаемые решения нелинейной системы (1) или (4) вовсе не обязательно определены на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, поскольку их фазовые кривые (кстати, не исключено, что все ненулевые вообще) могут за конечное время выходить на границу фазовой области (пусть лишь асимптотически). Зато с решениями линейной системы (3) такого не происходит в принципе, из-за чего каждое из них определено непременно на всей временно́й полуоси.

Определение 1 [4, 5]. Перечислим три основных *функционала* $\mathrm{K}(t,u)$, которые определены на множестве пар, образуемых моментами времени $t > 0$ и непрерывными функциями $u : [0,t] \to \mathbb{R}^n$. Эти функционалы отвечают показателям

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho \ \text{ соответственно при } \ \mathrm{K} = \mathrm{N}, \Theta, \mathrm{P} \tag{5}$$

и описывают следующие конкретные свойства решений:

1) *колеблемость* в случае $\varkappa = \nu$, т.е. когда $\mathrm{K}(t,u) = \mathrm{N}(t,u)$ — *нормированное*, т.е. умноженное на π, число нулей на промежутке $(0,t]$ функции $P_1 u$, где P_1 — ортогональный проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$ (проходящую через точку 0), причем если хотя бы один из этих нулей *кратен* (т.е. является нулем еще и производной $(P_1 u)^{\cdot}$), то считаем $\mathrm{N}(t,u) = +\infty$;

2) *вращаемость* (*ориентированная*) в случае $\varkappa = \theta$, т.е. когда $\mathrm{K}(t,u) = \Theta(t,u) \equiv |\varphi(t, P_2 u)|$ — модуль *ориентированного угла* $\varphi(t, P_2 u)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(0, P_2 u) = 0$) между вектором $P_2 u(t)$ и начальным вектором $P_2 u(0)$, где P_2 — ортогональный проектор на фиксированную плоскость (проходящую через точку 0), причем если $P_2 u(\tau) = 0$ хотя бы при одном $\tau \in [0,t]$, то считаем $\Theta(t,u) = +\infty$;

3) *блуждаемость* в случае $\varkappa = \rho$, т.е. когда

$$\mathrm{K}(t,u) = \mathrm{P}(t,u) \equiv \int_0^t \left| \left(\frac{u(\tau)}{|u(\tau)|} \right)^{\cdot} \right| d\tau, \quad u(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0,t].$$

Известны и другие функционалы, которые отвечают за *неориентированную* или *частотную вращаемость* [5], за *поворачиваемость заданного ранга* [9], а также за *плоскую вращаемость* [10, 11].

Определение 2 [4, 5]. Для каждого функционала K из определения 1 введем соответствующие *показатели* (5) (*колеблемости*, *вращаемости* и *блуждаемости*, для определенности будем называть здесь эти показатели *линейными*) решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$, заданного на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, следующим образом:

а) *слабый* и *сильный нижние* показатели зададим формулами

$$\check{\varkappa}^\circ(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\mathrm{K}(t,Lx), \quad \check{\varkappa}^\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{K}(t,Lx), \tag{6}$$

где через $\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ обозначено множество всех невырожденных линейных операторов $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

б) *слабый* $\hat{\varkappa}^\circ(x)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}^\bullet(x)$ *верхние* показатели зададим теми же формулами (6), но с заменой в них нижних пределов при $t \to +\infty$ верхними;

в) в случае совпадения значений нижнего и верхнего показателей будем называть их *точными* и опускать в их обозначении галочку или крышечку;

г) в случае совпадения значений слабого и сильного показателей будем называть их *абсолютными* и опускать в их обозначении любой кружочек (пустой или полный).

2. Определение показателей в нелинейном случае. Формулы (6) для линейных показателей явно предполагают, что решение определено на всей полуоси времени. Поскольку для решений нелинейной системы (1) это, вообще говоря, не так, то для них определение 2 неприемлемо. Далее предлагаются три различных подхода к разрешению этой проблемы.

А. Сферические показатели. Первый подход, с виду довольно жесткий, основан на попытке все время принудительно удерживать решение на начальной сфере (при условии, конечно, что она целиком лежит в фазовой области системы). Получающиеся в результате показатели определяются по решениям фактически не исходной, а несколько измененной системы.

Определение 3 [6]. Сначала по заданной системе (1) построим *сферическую* систему того же вида, в правой части которой стоит подправленная (без радиальной составляющей) вектор-функция

$$f_s(t,x) \equiv P_x^{\perp} f(t,x), \quad x \in G' \setminus \{0\}, \quad f_s(t,0)=0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $P_x^{\perp}$ — ортогональный проектор на гиперплоскость (проходящую через нуль), ортогональную ненулевому вектору $x \in \mathbb{R}^n$, а подправленная фазовая область G' — наибольший открытый шар с центром в нуле, содержащийся в исходной фазовой области G. Далее, по этой сферической системе каждому функционалу K из набора (5), а также начальному значению $x_0 \in G'$, моменту $t > 0$ и преобразованию $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значение *сферического* функционала, определяемого равенством

$$\mathrm{K}_s(f, x_0, t, L) \equiv \mathrm{K}(t, Lx_{f_s}(\cdot, x_0)).$$

Затем определим соответствующие *слабый* и *сильный нижние сферические* показатели задачи Коши (2) с помощью формул

$$\check{\varkappa}_s^{\circ}(f,x_0) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\mathrm{K}_s(f,x_0,t,L), \quad \check{\varkappa}_s^{\bullet}(f,x_0) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{K}_s(f,x_0,t,L). \tag{7}$$

Наконец, определим *слабый* $\hat{\varkappa}_s^{\circ}(f,x_0)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}_s^{\bullet}(f,x_0)$ *верхние сферические* показатели задачи Коши (2), а также *точные* и *абсолютные* их разновидности в соответствии с пп. *б–г* определения 2, но с заменой в них формул (6) формулами (7).

Б. Радиальные показатели. Следующий подход, кажущийся более гибким, предусматривает на каждом отрезке времени замену исходного решения другими решениями той же системы, начинающимися на том же луче (с началом в нуле), но сколь угодно близко к нулю (чтобы они гарантированно существовали на данном отрезке) — фактически по этому лучу берется предел.

Определение 4 [7]. Сначала каждому функционалу K из набора (5), а также системе (1), начальному значению $x_0 \in G$, моменту $t > 0$ и преобразованию $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значения *нижнего* и *верхнего радиальных* функционалов, определяемых соответственно равенствами

$$\check{\mathrm{K}}_r(f,x_0,t,L) \equiv \varliminf_{\mu\to+0} \mathrm{K}(t, Lx_f(\cdot,\mu x_0)), \quad \hat{\mathrm{K}}_r(f,x_0,t,L) \equiv \varlimsup_{\mu\to+0} \mathrm{K}(t, Lx_f(\cdot,\mu x_0))$$

(заметим, что выражения, стоящие в этих равенствах под знаками нижнего и верхнего пределов, при достаточно малых значениях $\mu > 0$ обязательно определены в силу непрерывной зависимости решений от начальных значений на компакте $[0,t]$). Затем определим соответствующие *слабый* и *сильный нижние радиальные* показатели задачи Коши (2) с помощью формул

$$\check{\varkappa}_r^{\circ}(f,x_0) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\check{\mathrm{K}}_r(f,x_0,t,L), \quad \check{\varkappa}_r^{\bullet}(f,x_0) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\check{\mathrm{K}}_r(f,x_0,t,L). \tag{8}$$

Наконец, определим *слабый* $\hat{\varkappa}_r^{\circ}(f,x_0)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}_r^{\bullet}(f,x_0)$ *верхние радиальные* показатели задачи Коши (2) теми же формулами (8), но с заменой в них нижних пределов при $t \to +\infty$ и нижних радиальных функционалов верхними, а *точные* и *абсолютные* их разновидности определим в соответствии с пп. *в* и *г* определения 2.

Из этого определения видно, что значения радиальных функционалов и показателей зависят фактически не прямо от начального значения x_0, а лишь целиком от луча, на котором это значение берется.

В. Шаровые показатели. Последний, также предельный, но относительно более грубый подход состоит в том, чтобы на каждом отрезке времени рассматривать решения, начинающиеся в шаре с центром в нуле сколь угодно малого радиуса (чтобы эти решения были определены на всем данном отрезке). Экстремальные показатели, получающиеся таким образом, оказываются связанными уже не с отдельными решениями, а с самой исходной системой.

Определение 5 [8]. Сначала каждому функционалу K из набора (5), а также системе (1), моменту $t > 0$ и преобразованию $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие значения *нижнего* и *верхнего шаровых* функционалов, определяемых соответственно равенствами

$$\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varliminf_{x_0\to 0} \mathrm{K}(t, Lx_f(\cdot,x_0)), \quad \hat{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varlimsup_{x_0\to 0} \mathrm{K}(t, Lx_f(\cdot,x_0)).$$

Затем определим соответствующие *слабый* и *сильный нижние шаровые* показатели системы (1) с помощью формул

$$\check{\varkappa}_b^{\circ}(f) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L), \quad \check{\varkappa}_b^{\bullet}(f) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L). \tag{9}$$

Наконец, определим *слабый* $\hat{\varkappa}_b^\circ(f)$ и *сильный* $\hat{\varkappa}_b^\bullet(f)$ *верхние шаровые* показатели системы (1) теми же формулами (9), но с заменой в них нижних пределов при $t \to +\infty$ и нижних шаровых функционалов верхними, а *точные* и *абсолютные* их разновидности — в соответствии с пп. *в* и *г* определения 2.

3. Свойства нелинейных показателей. Переход от исходной системы к сферической, как и переход от исходного решения к задачам Коши с начальными значениями на том же луче, на первый взгляд может показаться совершенно искусственным. Однако уже в линейном случае эти переходы в определенном смысле оправдывает

Теорема 1. *Для любой линейной системы* (3), *любого ее решения* $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *и любого функционала* (5) *верны равенства*

$$\check{\mathrm{K}}_r(f, x(0), t, L) = \hat{\mathrm{K}}_r(f, x(0), t, L) = \mathrm{K}_s(f, x(0), t, L) = \mathrm{K}(t, Lx), \quad t > 0, \quad L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n,$$

а для любого показателя (5) — *равенства*

$$\tilde{\varkappa}_s^*(f, x(0)) = \tilde{\varkappa}_r^*(f, x(0)) = \tilde{\varkappa}^*(x) \quad \textit{при} \;\; \sim\, = \,\check{}\,, \hat{} \quad \textit{и} \;\; * = \circ, \bullet.$$

В работах [4, 5] приведен полный набор соотношений между линейными показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем. Различные сферические и радиальные показатели не более упорядочены между собой, чем их исходные линейные варианты, как показывает

Теорема 2. *Если данное соотношение* (*равенство или неравенство*) *между линейными показателями реализуется хотя бы на одном решении какой-либо линейной системы* (3), *то это же соотношение между одноименными сферическими показателями, равно как и между одноименными радиальными, реализуется на соответствующей задаче Коши для той же системы.*

С помощью шаровых функционалов и показателей системы осуществляются оценки снаружи всего множества их радиальных аналогов, проистекающих от всевозможных задач Коши для той же системы, о чем и говорит

Теорема 3. *Для любой системы* (1), *любого значения* $x_0 \in G \setminus \{0\}$ *и любого функционала* (5) *верны неравенства*

$$\check{\mathrm{K}}_b(f, t, L) \leqslant \check{\mathrm{K}}_r(f, x_0, t, L) \leqslant \hat{\mathrm{K}}_r(f, x_0, t, L) \leqslant \hat{\mathrm{K}}_b(f, t, L), \quad t > 0, \quad L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^n,$$

а для любого показателя (5) — *неравенства*

$$\check{\varkappa}_b^*(f) \leqslant \check{\varkappa}_r^*(f, x_0) \leqslant \hat{\varkappa}_r^*(f, x_0) \leqslant \hat{\varkappa}_b^*(f) \quad \textit{при} \;\; * = \circ, \bullet.$$

Оценки, содержащиеся в формулировке теоремы 3, вообще говоря, уже не распространяются с радиальных функционалов и показателей на их сферические аналоги. Более того, для нелинейных систем взаимосвязи между различными линейными, сферическими и радиальными показателями бывают почти непредсказуемыми, что и подтверждает

Теорема 4. *При* $n = 2$ *и* $G = \mathbb{R}^2$ *для каждой из следующих четырех строк соотношений в отдельности*

$$\begin{gathered} 0 = \varkappa_b(f) = \varkappa_r(f, x(0)) < \varkappa_s(f, x(0)) < \varkappa(x) = +\infty, \\ 0 = \varkappa_b(f) = \varkappa_r(f, x(0)) = \varkappa(x) < \varkappa_s(f, x(0)) < +\infty, \\ 1 = \varkappa_b(f) = \varkappa_r(f, x(0)) > \varkappa_s(f, x(0)) > \varkappa(x) = 0, \quad 1 = \varkappa_b(f) = \varkappa_r(f, x(0)) = \varkappa(x) > \varkappa_s(f, x(0)) > 0 \end{gathered}$$

существует автономная система (4), *любое решение* $x \in \mathcal{S}_*(f)$ *которой определено на всей полуоси* $\mathbb{R}_+$, *а все линейные, сферические, радиальные и шаровые показатели точны, абсолютны и удовлетворяют соотношениям именно этой строки.*

4. Доказательства сформулированных теорем. Теперь докажем последовательно сформулированные выше теоремы 1–4.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что значения функционалов (5) не меняются при умножении вектор-функции u на любую положительную (и даже на отрицательную) непрерывно дифференцируемую скалярную функцию.

Далее, если функция $x \in \mathcal{S}_*(f)$ — решение задачи Коши (2) для линейной системы (3), то решение $y \in \mathcal{S}_*(f_s)$ той же задачи Коши для соответствующей сферической системы записывается в виде $y(t) \equiv |x_0|\, e(t)$, где $e(t) \equiv x(t)/|x(t)|$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $x(t)$. Действительно, $y(0) = |x(0)|\, e(0) = x_0$ и при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\dot{y}(t) = \frac{|x_0|}{|x(t)|} \dot{x}(t) - \frac{\big(\dot{x}(t), x(t)\big)\, |x_0|}{|x(t)|^3} x(t) = f(t, y(t)) - \big(f(t, y(t)), e(t)\big)\, e(t) = P_{y(t)}^{\perp} f(t, y(t)),$$

что непосредственно согласуется с определением 3.

Поэтому при переходе от решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ линейной системы (3) к соответствующему решению $y \in \mathcal{S}_*(f_s)$ сферической системы все получаемые сферические функционалы и показатели из определения 3 сохраняются прежними, т.е. совпадают с одноименными линейными из определения 2.

Аналогично (и даже еще более просто) дело обстоит с радиальными показателями из определения 4, при вычислении которых требуется умножать исходные решения на малые константы $\mu > 0$, что в случае линейной системы (3) вообще не меняет вычисляемых величин.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 получается простым применением теоремы 1, утверждающей, что значения любых линейных показателей для каждого решения линейной системы (3) совпадают с одноименными сферическими и радиальными показателями для соответствующей этому решению задачи Коши.

Доказательство теоремы 3. Сравнение определений 4 и 5 показывает, что при вычислении шаровых функционалов пределы (верхний и нижний) от выражения $\mathrm{K}(t, Lx_f(\cdot, x_0))$ при $x_0 \to 0$ берутся по всему фазовому пространству (представляющему собой полную окрестность нуля), а при вычислении радиальных функционалов — лишь по его подмножеству (а именно по лучу).

Таким образом, для шаровых показателей нижний предел будет не больше, а верхний не меньше, чем для радиальных. Отсюда вытекают все оценки снаружи для радиальных функционалов и показателей, осуществляемые их нижними и верхними шаровыми аналогами.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Для каждой из четырех строк соотношений, фигурирующих в формулировке этой теоремы, рассмотрим автономную систему (1), которая в фиксированном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^2$ записывается в виде

$$\dot{x} = \sigma E x + \zeta\,(x)\, I x \equiv f(x), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где число σ совпадает с $\sigma_+ = 1$ для первой и третьей строк и с $\sigma_- = -1$ для второй и четвертой строк, а функция ζ совпадает с $\zeta_0(x) = |x|$ для первых двух строк и с $\zeta_1(x) = 1/(1 + |x|^2)$ для последних двух строк (при этом во всех случаях имеем $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$).

Прежде всего заметим, что соответствующая сферическая система имеет вид

$$\dot{x} = \zeta\,(x)\, I x \equiv f_s(x),$$

а угловая скорость любого ее решения $x_{f_s}(\cdot, x_0)$ постоянна и равна $\zeta(x_0)$. Отсюда для первых двух строк получаем равенства

$$\varkappa_s(f, x_0) = \zeta_0(x_0) = |x_0| \in (0, +\infty),$$

а для последних двух строк — равенства

$$\varkappa_s(f, x_0) = \zeta_1(x_0) = 1/(1 + |x_0|^2) \in (0, 1).$$

Далее, в каждом из четырех рассматриваемых случаев все радиальные и шаровые показатели равны числу $\zeta(0)$, поскольку при взятии пределов при $\mu \to +0$ и $x_0 \to 0$ для подсчета радиальных и шаровых функционалов в определениях 4 и 5 соответствующие решения попадают в зону значений функции ζ, все более и более близких к ее значению в нуле. Поэтому для первых двух строк и соответственно для последних двух строк получаем равенства

$$\varkappa_b(f) = \varkappa_r(f, x_0) = \zeta_0(0) = 0, \quad \varkappa_b(f) = \varkappa_r(f, x_0) = \zeta_1(0) = 1.$$

Наконец, если $\sigma = \sigma_+$, то любое решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ с ростом времени неограниченно удаляется от нуля и оказывается в зоне значений функции ζ, все более близких к ее предельному значению на бесконечности, а если $\sigma = \sigma_-$, то любое решение стремится к нулю и оказывается в зоне значений функции ζ, все более близких к ее значению в нуле. Поэтому при подсчете линейных показателей для первой и третьей строк получаем соответственно равенства

$$\varkappa(x) = \lim_{x_0 \to \infty} \zeta_0(x_0) = +\infty, \quad \varkappa(x) = \lim_{x_0 \to \infty} \zeta_1(x_0) = 0,$$

а для второй и четвертой строк — равенства

$$\varkappa(x) = \lim_{x_0 \to 0} \zeta_0(x_0) = 0, \quad \varkappa(x) = \lim_{x_0 \to 0} \zeta_1(x_0) = 1.$$

Теорема 4 доказана.

Автор приносит благодарность В.В. Быкову за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
2. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
3. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2006. **25**. 249–294.
4. *Сергеев И.Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. **2**, № 46. 171–183.
5. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2016. **31**. 177–219.
6. *Сергеев И.Н.* Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. **56**, № 6. 839–840.
7. *Сергеев И.Н.* Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. **56**, № 11. 1560–1562.
8. *Сергеев И.Н.* Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. **57**, № 6. 859–861.
9. *Сергеев И.Н.* Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. **50**, № 10. 1353–1361.
10. *Сергеев И.Н.* Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2019. **32**. 325–348.
11. *Сергеев И.Н.* О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 1. 21–26.

Поступила в редакцию
18.01.2021

УДК 519.212.2

О ТЕОРЕМЕ ЧЕБЫШЁВА И ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ БЕРНУЛЛИ

О. П. Виноградов[1]

В статье приведено доказательство закона больших чисел для случая бросания правильной монеты. Это доказательство основано на методе, который применил Чебышёв при доказательстве неравенства, носящего теперь его имя, и не требует знакомства с такими понятиями, как независимость, математическое ожидание и дисперсия. Предполагаются известными лишь понятия равновозможности событий, формула классической вероятности, а также простейшие понятия комбинаторики и формула бинома Ньютона.

Ключевые слова: теорема Бернулли о законе больших чисел, неравенство Чебышёва, теорема Чебышёва.

Using the method applyed by Chebyshev to prove the inequality that bears his name, the article provides a proof of the law of large numbers for the case of throwing the fair coin. This proof does not require familiarity with such concepts as independence, expectation, and variance. It is assumed that only the concept of equal possibility of events, the formula of

[1] *Виноградов Олег Павлович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ovinogradov@mail.ru.

Vinogradov Oleg Pavlovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Probability Theory.