Подставляя сюда тензор $\hat{\Delta}$ из формулы (6) и соответствующий простому сдвигу тензор скорости деформации $\hat{V}$, получим определяющий тензор напряжений Коши $\hat{S}$ в задаче о простом сдвиге, совпадающий с приведенным в работе [6], где он найден в результате решения системы дифференциальных уравнений (9).

4. Заключение. Для кинематики простого сдвига найдены подвижные векторные базисы, в которых рассматриваемые в работе объективные производные тензоров второго ранга сводятся к производным по времени от их компонент. Полученное представление объективных производных позволило выразить тензор напряжений Коши в задаче о простом сдвиге в виде интеграла от известных функций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16–01–00669 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
2. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017.
3. *Gordon R.J., Schowalter W.R.* Anisotropic fluid theory: a different approach to the dumbbell theory of dilute polymer solutions // Trans. Soc. Rheol. 1972. **16**. 79–97.
4. *Бровко Г.Л.* Свойства и интегрирование некоторых производных от тензорных процессов в механике сплошной среды // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1990. № 2. 54–60.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1986.
6. *Мартынова Е.Д., Стеценко Н.С.* Использование однопараметрического семейства объективных производных Гордона–Шоуолтера для описания конечных деформаций вязкоупругих тел // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 6. 64–68.

Поступила в редакцию
17.07.2019

УДК 539.3

МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧЕ О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ КРУГЛОГО ДИСКА

Л. Д. Акуленко[1], **Д. В. Георгиевский**[2], **С. В. Нестеров**[3]

На основе разработанного авторами метода ускоренной сходимости численно-аналитически исследуются крутильные колебания насаженного на ось упругого диска, толщина которого зависит от радиуса. Внутренняя граница диска прикреплена к оси, тогда как внешняя свободна от нагрузок. Для различных отношений внешнего и внутреннего радиусов диска и разных распределений масс находятся первые частоты собственных крутильных колебаний.

Ключевые слова: крутильные колебания, круглый диск, задача Штурма–Лиувилля, метод ускоренной сходимости.

On the basis of the advanced convergence method developed by the authors, torsional

[1] *Акуленко Леонид Денисович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН.

[2] *Георгиевский Дмитрий Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: georgiev@mech.math.msu.su.

[3] *Нестеров Сергей Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, e-mail: kumak@ipmnet.ru.

Akulenko Leonid Denisovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientific Researcher, A.Yu. Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS.

Georgievskii Dimitri Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Elasticity Theory.

Nesterov Sergey Vladimirovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientific Researcher, A.Yu. Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS.

vibrations of a circular disk which is fixed on a shaft are investigated numerically and analytically. Thickness of the disk depends on the radius. The internal boundary of the disk is fixed on a shaft while the external one is free of loadings. The first few eigenvalue frequencies of torsional oscillations are obtained for various ratio of the external disk radius and the internal one as well as for various mass distributions.

Key words: torsional vibrations, circular disk, the Sturm–Liouville problem, advanced convergence method.

Под крутильными колебаниями диска, закрепленного на абсолютно жесткой оси, проходящей через его центр, понимается деформированное состояние, в котором цилиндрические слои различных радиусов поворачиваются друг относительно друга. В результате точки диска, первоначально лежавшие на одном радиусе, оказываются на некоторой спиралевидной кривой [1, 2]. Малые крутильные осесимметричные колебания диска из линейно упругого материала описываются одномерным волновым уравнением [3] относительно неизвестной функции $\varphi(r,t)$:

$$\rho r^3 H(r)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \mu\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^3 H(r)\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big), \quad b < r < a, \tag{1}$$

где a — внешний радиус диска; b — его внутренний радиус, равный радиусу оси, на которой закреплен диск; ρ — плотность; $H(r)$ — переменная по радиусу толщина; μ — модуль сдвига; φ — угол поворота цилиндрического слоя, находящегося на расстоянии r, по отношению к его состоянию при отсутствии деформации.

Стандартное разделение переменных $\varphi(r,t) = R(r)T(t)$ сводит уравнение (1) к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d}{dr}\Big(r^3 H(r)\frac{dR}{dr}\Big) + \frac{\lambda}{(a-b)^2}\,r^3 H(r) R = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{\lambda}{(a-b)^2}\,c^2 T = 0, \tag{3}$$

где $c = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость поперечных волн в упругом материале диска; $\lambda/(a-b)^2$ — постоянная разделения.

С целью интегрирования уравнения (2) при заданном законе изменения толщины $H(r)$ для определенности выберем следующие граничные условия: внутренний край диска жестко скреплен с осью, а внешний край свободен от усилий:

$$R(b) = 0, \quad \frac{dR}{dr}(a) = 0. \tag{4}$$

Представляет как практический, так и вычислительный интерес аппроксимация толщины $H(r)$ степенными функциями вида [3]

$$H(r) = H_0\Big(\frac{b}{r}\Big)^k, \quad k = 3, 2, 1, 0, -1. \tag{5}$$

Таким образом, возникающая задача Штурма–Лиувилля заключается в нахождении значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (2) с граничными условиями (4). Из общей теории задачи Штурма–Лиувилля известно, что существует счетное множество таких значений: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$.

Уравнение (2), очевидно, допускает аналитическое решение, если $H(r) = H_0(b/r)^3$, т.е. при $k = 3$ в (5). В этом случае интегрирование задачи (2), (4) приводит к следующим собственным значениям и собственным функциям:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2}{4}\,(2n+1)^2, \quad R_n(r) = C_n \sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\,\frac{r-b}{a-b}\Big) = C_n \sin\Big((2n+1)\,\frac{\pi(r-b)}{2(a-b)}\Big).$$

Периодические решения уравнения (3) записываются в виде

$$T_n(t) = A_n\,\mathrm{e}^{ic\Omega_n t/b}, \quad \Omega_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\gamma-1} = \frac{\pi(2n+1)}{2(\gamma-1)}, \quad \gamma = \frac{a}{b} > 1, \tag{6}$$

где Ω_n — безразмерные частоты колебаний, зависящие от отношения граничных радиусов диска.

Отметим, что аналитическое решение задачи (2), (4) допустимо и для более общей зависимости толщины от радиуса: $H(r) = H_0(b/r)^3\,\mathrm{e}^{-\varkappa r}$, $\varkappa = \mathrm{const}$. Имеются и другие зависимости $H(r)$, при которых существуют аналитические решения, выраженные через специальные функции. Не останавливаясь на них, перейдем к численному анализу крутильных колебаний диска на основе разработанного авторами [4] метода ускоренной сходимости.

Введем новую безразмерную пространственную переменную x:

$$x = \frac{r-b}{a-b}, \quad 0 < x < 1$$

и преобразуем задачу (2), (4), (5) к виду

$$\frac{d}{dx}\Big[\big(1+(\gamma-1)x\big)^{3-k}\frac{dR}{dx}\Big] + \lambda\big(1+(\gamma-1)x\big)^{3-k}R = 0, \quad R(0) = 0, \quad \frac{dR}{dx}(1) = 0. \tag{7}$$

γ	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
10	0,0286; 0,0123	0,5331; 0,5824	0,8852; 0,9282	1,2833; 1,2696
9	0,0355; 0,0159	0,5970; 0,6493	0,9991; 1,0375	1,3849; 1,4218
8	0,0451; 0,0215	0,6788; 0,7343	1,1315; 1,1771	1,5797; 1,6168
7	0,0593; 0,0300	0,7873; 0,8459	1,3158; 1,3621	1,8393; 1,8761
6	0,0814; 0,0442	0,9387; 0,9997	1,5734; 1,6197	2,2025; 2,2385
5	0,1191; 0,0702	1,1649; 1,2269	1,9597; 2,0044	2,7473; 2,7813
4	0,1916; 0,1242	1,5416; 1,6009	2,6036; 2,6440	3,6557; 3,6857
3	0,3625; 0,2633	2,2972; 2,3447	3,8938; 3,9243	5,4745; 5,4968
2	0,9866; 0,8250	4,5887; 4,6005	7,7815; 7,7891	10,944; 10,950

Приведем для некоторых значений k результаты численно-аналитического решения задачи (7). В таблице для $k = 0$, т.е. в случае постоянной толщины H_0, и для $k = -1$ (случай линейно расширяющегося к периферии диска) представлены первые четыре безразмерные частоты крутильных колебаний диска $\Omega_n = \sqrt{\lambda_n}/(\gamma-1)$, $n = 1, 2, 3, 4$, в зависимости от γ. В каждом элементе таблицы левое число соответствует значению $k = 0$, а правое — значению $k = -1$. Размерные частоты колебаний на основании (6) равны $c\Omega_n/b$.

Как следует из приведенных численных результатов, безразмерные частоты колебаний убывают с ростом параметра γ. Это утверждение справедливо для других k и для других, отличных от (4) граничных условий. Так, в аналитически исследованном выше случае $k = 3$ согласно (6) убывание Ω_n с ростом γ происходит просто по гиперболе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 19–01–00016а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник: В 6 т./ Под ред. В.В. Болотина. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978.
2. *Маслов Г.С.* Расчеты колебаний валов: Справочник. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1980.
3. *Пфейффер П.* Колебания упругих тел. 2-е изд. М.: КомКнига, 2006 (*Pfeiffer F.* Handbuch der Physik. B. VI. Mechanik der Elastischen Körper. Berlin: Springer, 1928).
4. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-Precision Method in Eigenvalue Problems and Their Applications. London: Chapman and Hall/CRC. Boca Raton, 2005.

Поступила в редакцию
28.02.2020