7. *Артамонов В.А.* Об алгебрах без собственных подалгебр // Матем. сб. 1977. **104**, № 3. 428–459.
8. *Szendrei A.* Simple surjective algebras having no proper subalgebras // J. Austral. Math. Soc. 1990. **48**. 434–454.
9. *Салий В.Н.* Универсальная алгебра и автоматы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1988.
10. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V.* Monoids, acts and categories. Berlin; N.Y.: W. de Gruyter, 2000.
11. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сараванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
12. *Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подкользин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
13. *Warshall S.* A theorem on boolean matrices // JACM. 1962. **9**. 11–12.
14. *Tarjan R.* Depth-first search and linear graph algorithms // SIAM J. Comput. 1972. **1**, N 2. 146–160.

Поступила в редакцию
28.02.2020

---

УДК 539.3

# ЛАГРАНЖЕВО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ОБЪЕКТИВНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГОРДОНА–ШОУОЛТЕРА ПРИ ПРОСТОМ СДВИГЕ

**Е. Д. Мартынова**[1]

В работе рассматривается однопараметрическое семейство объективных производных Гордона–Шоуолтера, включающее производные Олдройда, Коттер–Ривлина и Яуманна. Для движения простого сдвига найдены подвижные базисы, в которых рассматриваемые дифференциальные операторы сводятся к полным производным по времени от компонент тензора. Для всех производных из рассматриваемого семейства, кроме производных Олдройда и Коттер–Ривлина, векторы базисов, лежащие в плоскости сдвига, вращаются с определенным периодом, меняя свою длину и взаимную ориентацию.

*Ключевые слова:* конечные деформации, простой сдвиг, объективные производные, однопараметрическое семейство объективных производных Гордона–Шоуолтера, лагранжево представление объективных производных.

The paper deals with the one-parameter family of Gordon–Showalter objective derivatives, which includes the Oldroyd, Cotter–Rivlin, and Jaumann derivatives. For a simple shift, movable bases were found in which the considered differential operators are reduced to the total time derivatives of the tensor components. For all derivatives of the family under consideration, except for Oldroyd and Cotter–Rivlin derivatives, the vectors of bases lying in the shear plane rotate with a certain period, changing their length and mutual orientation.

*Key words:* finite deformations, simple shift, objective derivatives, one-parameter family of Gordon–Showalter objective derivatives, Lagrangian representation of objective derivatives.

**1. Введение.** Принцип материальной объективности, лежащий в основе современной теории определяющих соотношений (ОС) [1], требует, чтобы тензоры, входящие в определяющее соотношение, принадлежали к одному типу объективности, т.е. преобразовывались одинаковым образом при замене системы отсчета. Тензоры, преобразующиеся при переходе к новой системе отсчета по формуле

$$\hat{Z}_*(t) = \hat{\theta}(t)\hat{Z}(t)\hat{\theta}^T(t), \tag{1}$$

где $\hat{\theta}(t)$ — ортогональный тензор перехода к новой системе отсчета, называются индифферентными (пространственно ориентированными или левыми) [2]. Примером является тензор напряжений Коши.

[1] *Мартынова Елена Дмитриевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: elemarta@mail.ru.

*Martynova Elena Dmitrievna* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity.

Входящие в ОС производные по времени от тензоров должны сохранять тип их объективности. В частности, для индифферентных тензоров производная $D[\hat{Z}]$ должна быть определена так, чтобы получающийся тензор $D[\hat{Z}]$ также являлся индифферентным, т.е. преобразовывался по формуле (1).

В настоящей работе рассматривается однопараметрическое семейство объективных производных Гордона–Шоуолтера (Г–Ш) [3]:

$$D_a[\hat{S}] := \dot{\hat{S}} - \hat{\Omega}\hat{S} + \hat{S}\hat{\Omega} - a(\hat{V}\hat{S} + \hat{S}\hat{V}). \tag{2}$$

Здесь $a \in [-1, 1]$ — скалярный параметр; $\hat{V} = \frac{1}{2}(\hat{D} + \hat{D}^T)$ — тензор скоростей деформации; $\hat{\Omega} = \frac{1}{2}(\hat{D} - \hat{D}^T)$ — тензор скоростей вращения (спин); $\hat{D} = \dot{\hat{A}}\hat{A}^{-1}$ — тензор скоростей дисторсий; $\hat{A}$ — аффинор деформации. Семейство производных (2) является частным случаем трехпараметрического представления производных конвективно-коротационного типа, предложенного в работе Г.Л. Бровко [4]. При $a = 1, -1, 0$ из формулы (2) получаются объективные производные Олдройда, Коттер–Ривлина, Яуманна соответственно [2].

Согласно теореме, доказанной в работе [4], любой дифференциальный оператор из рассматриваемого семейства Г–Ш может быть представлен следующим образом:

$$D_a[\hat{Z}] = \hat{\Delta}(\hat{\Delta}^{-1}\hat{Z}\hat{\Delta}^{-1T})^{\cdot}\hat{\Delta}^T, \tag{3}$$

где тензор $\hat{\Delta}(t)$ удовлетворяет дифференциальному тензорному уравнению

$$\hat{\Delta}^{\cdot}\hat{\Delta}^{-1} = \hat{\Gamma}. \tag{4}$$

Здесь $\hat{\Gamma} := \hat{\Omega} + a\hat{V}$. Решение этого уравнения имеет вид хронологической экспоненты тензорного процесса [5].

Рассмотрим в трехмерном векторном пространстве некоторый фиксированный базис $\bar{e}_k^0$ ($k = 1$, 2, 3) и связанный с ним подвижный базис $\bar{e}_k = \hat{\Delta}\bar{e}_k^0$. В соответствующем диадном базисе тензор $\hat{Z}$ представим в виде $\hat{Z} = Z^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = Z^{ij}\hat{\Delta}\bar{e}_i^0 \otimes \bar{e}_j^0\hat{\Delta}^T$. Отсюда получим следующее равенство:

$$\hat{\Delta}(\hat{\Delta}^{-1}\hat{Z}\hat{\Delta}^{-1T})^{\cdot}\hat{\Delta}^T = \dot{Z}^{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j.$$

Таким образом, любой дифференциальный оператор из семейства Г–Ш соответствует дифференцированию по времени компонент тензора $\hat{Z}(t)$ в определенном подвижном диадном базисе $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \hat{\Delta}\bar{e}_i^0 \otimes \hat{\Delta}\bar{e}_j^0$, определяемом видом выбранной объективной производной и законом движения. Представление (3) называется лагранжевым представлением объективной производной.

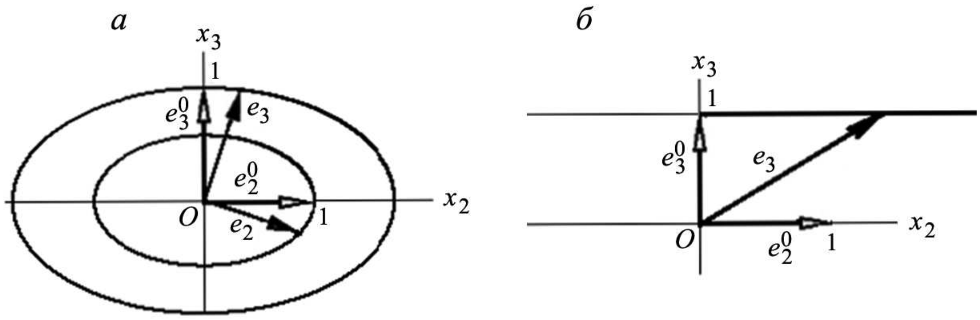
**2. Лагранжево представление производных из семейства Г–Ш для движения простого сдвига.** Рассмотрим закон движения сплошной среды при простом сдвиге вдоль оси $x_2$ в плоскости $Ox_2x_3$:

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0 + k(t)x_3^0, \quad x_3 = x_3^0. \tag{5}$$

Здесь $x_i^0$ и $x_i$ — декартовы координаты материальной точки в начальный и текущий моменты времени. Предполагая далее, что $k(t) = vt$, где $v = \mathrm{const}$, и используя определение хронологической экспоненты, найдем решение уравнения (4) в случае простого сдвига:

$$\hat{\Delta}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{tv\sqrt{1-a^2}}{2} & \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\sin\frac{tv\sqrt{1-a^2}}{2} \\ 0 & -\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\sin\frac{tv\sqrt{1-a^2}}{2} & \cos\frac{tv\sqrt{1-a^2}}{2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Заметим, что $k$-м столбцом этой матрицы являются компоненты вектора $\bar{e}_k = \hat{\Delta}\bar{e}_k^0$. Учитывая, что $x_1 = 0$, $x_2 = c\cos(\tau)$, $x_3 = b\sin(\tau)$ — параметрическое задание эллипса с полуосями $b$ и $c$, получим, что при движении (5) вектор $\bar{e}_1^0$ не меняется, а концы векторов $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ при $a \neq \pm 1$ описывают эллипсы в плоскости $Ox_2x_3$ (рисунок, *а*). Это значит, что при простом сдвиге объективные производные из семейства Г–Ш являются материальными производными по времени в базисе, векторы которого вращаются в плоскости сдвига с периодом $4\pi/(v\sqrt{1-a^2})$. При этом длины векторов $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ и углы между ними меняются. В случае производной Яуманна ($a = 0$) $\hat{\Delta}$ становится ортогональной матрицей, эллипсы превращаются в окружности единичного радиуса, векторы $\bar e_2$ и $\bar e_3$ вращаются в плоскости $Ox_2x_3$, оставаясь ортогональными, и не меняют длины. При $a = 1$ из выражения (6) следует, что для производной Олдройда векторы $\bar e_1$ и $\bar e_2$ не меняются, а вектор $\bar e_3$ поворачивается в плоскости сдвига так, что его конец движется по прямой $x_3 = 1$ (рисунок, *б*). При $a = -1$, что соответствует производной Коттер–Ривлина, аналогичным образом ведут себя векторы взаимного базиса $\bar e^1$, $\bar e^2$ и $\bar e^3$.




Годографы векторов $\bar e_2 = \Delta\bar e_2^0$ и $\bar e_3 = \Delta\bar e_3^0$ в задаче о простом сдвиге в плоскости $Ox_2x_3$

Рассмотрим также нейтральную производную, или производную Грина–Нахди, определяемую соотношением $D[\hat Z] := \dot{\hat Z} - \hat\Psi\hat Z + \hat Z\hat\Psi$, где $\hat\Psi := \dot{\hat Q}Q^T$ и $\hat Q$ – ортогональный тензор из полярного разложения аффинора. Эта производная не принадлежит семейству Г–Ш, но входит в трехпараметрическое семейство, введенное в работе [2], где показано, что в этом случае $\hat\Delta$ является ортогональным тензором и удовлетворяет уравнению (4), в котором $\hat\Gamma = \hat\Psi$. Нетрудно получить, что при простом сдвиге

$$\hat\Psi(t) = \frac{2v}{4+t^2v^2}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Поскольку $\hat\Delta$ — ортогональный тензор, имеют место выражения

$$\hat\Delta(t) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi(t) & \sin\psi(t)\\ 0 & -\sin\psi(t) & \cos\psi(t)\end{pmatrix}, \quad \dot{\hat\Delta}\hat\Delta^{-1} = \dot\psi(t)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Из соотношений (4), (7) и (8) находим $\dot\psi(t)= 2v/(\psi(t) = 2v/(4+t^2v^2)$. Интегрируя это уравнение с начальным условием $\psi(0) = 0$, получим $\psi(t) = \pm\operatorname{arctg}(tv/2) = \pm\operatorname{arctg}(k(t)/2)$, $k(t) = vt$. Поскольку $\operatorname{arctg}(k(t)/2) \to \pi/2$ при $k(t) \to \infty$, угол поворота базисных векторов $\bar e_2^0$ и $\bar e_3^0$ в случае нейтральной производной ограничен величиной $\pi/2$ при любой величине сдвига. Это отличает нейтральную производную от производной Яуманна, для которой тензор $\hat\Delta$, как следует из соотношения (6), тоже ортогональный, но угол поворота базисных векторов все время возрастает. Можно показать, что угол $\psi$ связан с углом $\varphi$ между осью $x_3$ и левым собственным вектором соотношением $\psi = 2\varphi - \pi/2$.

**3. Модель вязкоупругого материала при больших деформациях.** Рассмотрим модель, примененную ранее в работе [6]:

$$\hat D_a[\hat S] = E\hat V - T^{-1}\hat S, \tag{9}$$

где $\hat S$ — тензор напряжений Коши; $E$ и $T$ — параметры модели. Используя (3), представим ОС (9) следующим образом: $\hat\Delta(\hat\Delta^{-1}\hat S\hat\Delta^{-1T})^{\cdot}\hat\Delta^T = E\hat V - T^{-1}\hat S$. Отсюда получим

$$(\hat\Delta^{-1}\hat S\hat\Delta^{-1T})^{\cdot} = E\hat\Delta^{-1}\hat V\hat\Delta^{-1T} - T^{-1}\hat\Delta^{-1}\hat S\hat\Delta^{-1T}.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $\hat S(0) = 0$, имеет вид

$$\hat S(t) = E\hat\Delta(t)\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-x)}{T}}\hat\Delta^{-1}(x)\hat V(x)\hat\Delta^{-1T}(x)\,dx\,\hat\Delta^T(t).$$

Подставляя сюда тензор $\hat{\Delta}$ из формулы (6) и соответствующий простому сдвигу тензор скорости деформации $\hat{V}$, получим определяющий тензор напряжений Коши $\hat{S}$ в задаче о простом сдвиге, совпадающий с приведенным в работе [6], где он найден в результате решения системы дифференциальных уравнений (9).

**4. Заключение.** Для кинематики простого сдвига найдены подвижные векторные базисы, в которых рассматриваемые в работе объективные производные тензоров второго ранга сводятся к производным по времени от их компонент. Полученное представление объективных производных позволило выразить тензор напряжений Коши в задаче о простом сдвиге в виде интеграла от известных функций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16–01–00669 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
2. *Бровко Г.Л.* Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017.
3. *Gordon R.J., Schowalter W.R.* Anisotropic fluid theory: a different approach to the dumbbell theory of dilute polymer solutions // Trans. Soc. Rheol. 1972. **16**. 79–97.
4. *Бровко Г.Л.* Свойства и интегрирование некоторых производных от тензорных процессов в механике сплошной среды // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1990. № 2. 54–60.
5. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1986.
6. *Мартынова Е.Д., Стеценко Н.С.* Использование однопараметрического семейства объективных производных Гордона–Шоуолтера для описания конечных деформаций вязкоупругих тел // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 6. 64–68.

Поступила в редакцию
17.07.2019

---

УДК 539.3

# МЕТОД УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ В ЗАДАЧЕ О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ КРУГЛОГО ДИСКА

**Л. Д. Акуленко** [1], **Д. В. Георгиевский** [2], **С. В. Нестеров** [3]

На основе разработанного авторами метода ускоренной сходимости численно-аналитически исследуются крутильные колебания насаженного на ось упругого диска, толщина которого зависит от радиуса. Внутренняя граница диска прикреплена к оси, тогда как внешняя свободна от нагрузок. Для различных отношений внешнего и внутреннего радиусов диска и разных распределений масс находятся первые частоты собственных крутильных колебаний.

*Ключевые слова:* крутильные колебания, круглый диск, задача Штурма–Лиувилля, метод ускоренной сходимости.

On the basis of the advanced convergence method developed by the authors, torsional

[1] *Акуленко Леонид Денисович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН.

[2] *Георгиевский Дмитрий Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: georgiev@mech.math.msu.su.

[3] *Нестеров Сергей Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр. ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, e-mail: kumak@ipmnet.ru.

*Akulenko Leonid Denisovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientific Researcher, A.Yu. Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS.

*Georgievskii Dimitri Vladimirovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of the Chair of Elasticity Theory.

*Nesterov Sergey Vladimirovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Scientific Researcher, A.Yu. Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of RAS.