УДК 512.57

УНАРНЫЕ АЛГЕБРЫ БЕЗ СОБСТВЕННЫХ ПОДАЛГЕБР

А. Н. Лата[1]

В работе описываются эквивалентные условия отсутствия собственных подалгебр у произвольной унарной алгебры. Приведен алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны.

Ключевые слова: унарная алгебра, полигон над полугруппой, автомат без выхода.

The paper presents equivalent conditions under which a unary algebra has no subalgebras. An algorithm for finding proper subalgebras and generators in a given finite unary algebra is proposed.

Key words: unary algebra, acts over semigroups, automaton without output.

1. Введение. Унарные алгебры имеют глубокие связи с другими разделами универсальной алгебры. В частности, любая унарная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$ является S-полигоном, где S — полугруппа, порожденная операциями из Ω относительно композиции отображений. И, наоборот, всякий S-полигон A является унарной алгеброй, заданной на множестве A, где унарные операции — это умножение на элементы полугруппы S.

Также возможна интерпретация унарной алгебры как автомата без выхода [1–4]. Элементы алгебры при этом рассматриваются в качестве внутренних состояний такого автомата, а операции — как входные сигналы. Поэтому унарные алгебры привлекают внимание многих исследователей, значительное место в работах которых занимают решетки конгруэнций унарных алгебр, несущие важную информацию о свойствах самих алгебр.

Приведем результаты исследований алгебр без собственных подалгебр.

В работе [5] показано, что

1) если A — алгебра над полем k с ассоциативными степенями, то либо $A \simeq k$, либо $A = kx$, $x^2 = 0$;

2) если A — конечная алгебра без подалгебр, то многообразие var$A$, порожденное A, конечно базируемо.

В [6] доказано, что если A — алгебра без подалгебр над конечным полем $\mathbb{F}_q$ и $d = \dim_{\mathbb{F}_q} A$ — простое число, причем в A нет нильпотентов (элементов, в некоторой степени $n > 1$ равных нулю при любой расстановке скобок), то Aut$A$ — конечная циклическая группа. Более того, в клоне производных операций на $A = \mathbb{F}_{q^d}$ лежит операция $x \cdot y = \lambda x^{q^i} y^{q^j}, \lambda \in \mathbb{F}_{q^d} \setminus \mathbb{F}_{q^d}^{q^i+q^j-1}, i, j \in \mathbb{Z}/d$, причем $\mathbb{F}_{q^d}$ с таким умножением $x \cdot y$ является алгеброй без подалгебр.

В [7] показано, что изучение k-алгебр без подалгебр над произвольным коммутативно-ассоциативным кольцом k с единицей сводится к случаю, когда k — поле. Кроме того, строится пример 6-мерной алгебры без подалгебр с бесконечной неабелевой группой автоморфизмов и при некоторых предположениях описываются алгебры простой размерности без подалгебр, но с неединичной группой автоморфизмов.

В [8] описаны конечные простые сюръективные алгебры без собственных подалгебр.

Заметим, что алгебрами без собственных подалгебр в классе унаров (т.е. алгебр с одной унарной операцией) являются только циклы.

В [9] описаны конечные автоматы без выхода, не имеющие собственных подавтоматов.

2. Основные определения и конструкции. *Унарной алгеброй* называется универсальная алгебра, все операции которой унарны или нульарны.

Унарная алгебра называется *связной*, если пересечение любых двух ее однопорожденных подалгебр непусто.

[1] *Лата Александр Николаевич* — асп. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: alex.lata@yandex.ru.

Lata Aleksandr Nikolaevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Подалгебра алгебры называется *собственной*, если она отлична от самой алгебры. Через $\mathrm{Sub}A$ обозначается решетка подалгебр алгебры A.

Полигон над полугруппой S (или S-полигон) [10] — это множество X, на котором задано действие полугруппы S, т.е. определено отображение $S \times X \mapsto X$, $(s, x) \mapsto sx$, удовлетворяющее условию $s(t)x = (st)x$ при $x \in X$ и $s, t \in S$.

Ориентированный псевдограф (или *псевдоорграф*) $G = (V, E)$ [11] определяется непустым множеством V и набором E упорядоченных пар элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы набора E — *дугами* (или *ориентированными ребрами*) ориентированного псевдографа $G = (V, E)$.

В наборе E могут встречаться пары вида (v, v), называемые *петлями*, и одинаковые пары, называемые *кратными* (или *параллельными*) *дугами*. Пары (u, v) и (v, u) считаются одинаковыми лишь в том случае, когда $u = v$.

Путем ориентированного псевдографа будем называть последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

Ориентированный псевдограф называется *сильно связным* или *сильным* (strongly connected), если для каждой пары различных вершин v и w существует путь из v в w и из w в v.

Пусть $A = \langle A, \Omega \rangle$ — унарная алгебра. Через $\mathrm{Graph}(A)$ обозначим граф унарной алгебры A. Граф $\mathrm{Graph}(A)$ состоит из множества вершин A и множества помеченных дуг — всевозможных упорядоченных троек $(a, f(a), f)$, где $a \in A$ и $f \in \Omega$. Заметим, что в данном случае граф унарной алгебры является ориентированным псевдографом с реберной раскраской. Вершины графа, как обычно, изображаются точками на плоскости, а дуга $(a, f(a), f)$ — линией, направленной от a к $f(a)$ и помеченной функциональным символом f.

3. Результаты. В работе рассматриваются ориентированные псевдографы, множество вершин которы, возможно, бесконечно.

Теорема. *Пусть* $A = \langle A, \Omega \rangle$ *— унарная алгебра,* $\mathrm{Graph}(A)$ *— граф унарной алгебры, а* X *— полугруппа, порожденная операциями из* Ω *относительно композиции отображений. Следующие условия эквивалентны:*

1) *алгебра* A *не имеет собственных подалгебр;*
2) *псевдоорграф* $\mathrm{Graph}(A)$ *сильно связный;*
3) *полугруппа* X *действует транзитивно на множестве* A*;*
4) *алгебра* A *является сильно связной.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть ориентированный псевдограф $\mathrm{Graph}(A)$ не является сильно связным. Покажем, что алгебра A имеет собственную подалгебру. Поскольку ориентированный псевдограф $\mathrm{Graph}(A)$ не является сильно связным, то существуют такие различные $s, t \in A$, что не существует пути из s в t. Рассмотрим подалгебру $S = \langle S, \Omega \rangle$ алгебры A, порожденную множеством $\{s\}$. Очевидно, $S \neq \emptyset$. Покажем, что $A \neq S$. Предположим противное, т.е. $A = S$. Поскольку алгебра S порождена множеством $\{s\}$, то существует путь из s в t — противоречие с предположением. Таким образом, S — собственная подалгебра алгебры A.

$2 \Rightarrow 3$. Поскольку ориентированный псевдограф $\mathrm{Graph}(A)$ является сильно связным, то для любых $a, b \in A$ существует такое слово $x \in X$, что $x(a) = b$.

$3 \Rightarrow 4$ и $4 \Rightarrow 1$ следуют из определений.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $A = \langle A, \Omega \rangle$ *— унарная алгебра,* $\mathrm{Graph}(A)$ *— граф унарной алгебры. Вершины графа* Graph(A)*, из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими подалгебр алгебры* A*.*

Заметим, что при интерпретации унарной алгебры как псевдоорграфа для отсутствия собственных подалгебр достаточно некоторых операций из сигнатуры.

Например, рассмотрим унарную алгебру $A = \langle A, f, g, h \rangle$, где $A = \{1, 2, 3\}$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$, $h(1) = 3$, $h(2) = 2$ и $h(3) = 2$.

При интерпретации операции f на множестве A как орграфа получаем сильно связный орграф. Аналогично если вначале интерпретировать операции g и h на A как орграф, то имеем сильно связный орграф.

Следствие 2. *Автомат без выхода (возможно, бесконечный) не имеет собственных подавтоматов тогда и только тогда, когда его диаграмма Мура — сильно связный ориентированный псевдограф.*

Следствие 3. *Атомами решетки подалгебр унарной алгебры являются ее сильно связные подалгебры и только они.*

Следствия 2 и 3 — обобщения результата В. Н. Салия [9] на случай бесконечного автомата без выхода.

Модификации и обобщения понятия конечного автомата можно найти в [12, с. 31].

4. Алгоритм проверки отсутствия подалгебр и построения собственных подалгебр унарной алгебры. Опишем алгоритм, который проверяет отсутствие подалгебр или находит собственные подалгебры и порождающие их элементы унарной алгебры, носитель и сигнатура которой конечны.

По теореме условие отсутствия собственных подалгебр унарной алгебры $A = \langle A, \Omega \rangle$ эквивалентно тому, что псевдоорграф Graph(A) унарной алгебры сильно связный. Более того, по следствию 1 вершины графа Graph(A), из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими подалгебр алгебры A.

Рассмотрим унарную алгебру $A = \langle A, \Omega \rangle$, носитель и сигнатура которой конечны. Пусть $|A| = n$. В качестве элементов алгебры возьмем целые неотрицательные числа. Представим каждую операцию $f_i \in \Omega$ данной унарной алгебры в виде списка f_i. Элементу списка соответствует результат сигнатурной операции на данном элементе. Тогда сигнатуру унарной алгебры можно интерпретировать как список Ω списков унарных операций. Кроме того, унарную алгебру в данном случае можно отождествить с представлением ее сигнатуры в виде списка списков унарных операций. Длина каждого вложенного списка равна n, поэтому мы всегда знаем носитель рассматриваемой алгебры.

Этапы работы данного алгоритма можно описать следующим образом.

Вход: унарная алгебра $A = \langle A, \Omega \rangle$ в виде списка Ω.

Выход: матрица достижимости графа Graph(A) и список однопорожденных подалгебр с порождающими элементами.

1) Преобразовать унарную алгебру A в псевдоорграф Graph(A) = (A, E).

2) Определить, является ли псевдограф Graph(A) из п. 1 сильно связным или нет. В случае, если он сильно связный, унарная алгебра A не имеет собственных подалгебр. В противном случае вершины псевдографа Graph(A), из которых нет пути в некоторую другую вершину, являются порождающими подалгебр алгебры A.

Для реализации п. 1 необходимо прочитать список Ω и в виде множества E записать все упорядоченные пары $(a, f_i(a))$.

Пункт 2 может быть сведен к поиску кратчайших путей в графе с единичными весами и найден, например, алгоритмом Уоршалла [13] или многократным применением поиска в глубину. При этом будем заполнять матрицу достижимости, в которой хранится информация о существовании путей между вершинами псевдоорграфа Graph(A).

Далее необходимо проверить матрицу достижимости на наличие путей из любой вершины псевдоорграфа Graph(A) в любую другую. Затем согласно теореме и следствию 1 сделать вывод.

Автору известно, что существуют алгоритмы проверки графа на сильную связность за линейное время (см., например, [14]). При использовании приведенного выше алгоритма в случае, если алгебра имеет собственные подалгебры, за один проход алгоритма мы получаем информацию о порождающих подалгебры заданной унарной алгебры и носителях этих подалгебр.

Поскольку любая конечная алгебра конечно порождена, то, используя найденные однопорожденные подалгебры, можно построить решетку Sub$A$ подалгебр исходной унарной алгебры A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Imreh B.* On finite nilpotent automata // Acta Cybernetica. 1981. **5**, N 3. 281–293.
2. *Imreh B.* On finite definite automata // Acta Cybernetica. 1985. **7**, N 1. 61–65.
3. *Ćirić M., Bogdanović S., Petković T.* The lattice of subautomata of an automaton: A survey // Publ. Inst. Math. Nouv. Sér. 1998. **64**, N 78. 165–182.
4. *Ćirić M., Bogdanović S.* Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata // Algebra Colloq. 1999. **6**, N 1. 71–88.
5. *Львов И.В.* О конечности базиса тождеств некоторых неассоциативных колец // Алгебра и логика. 1974. **14**, № 1. 15–27.
6. *Artamonov V.A.* On finite algebras of prime dimension without proper subalgebras // J. Algebra. 1976. **42**, N 1. 247–260.

7. *Артамонов В.А.* Об алгебрах без собственных подалгебр // Матем. сб. 1977. **104**, № 3. 428–459.
8. *Szendrei A.* Simple surjective algebras having no proper subalgebras // J. Austral. Math. Soc. 1990. **48**. 434–454.
9. *Салий В.Н.* Универсальная алгебра и автоматы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1988.
10. *Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V.* Monoids, acts and categories. Berlin; N.Y.: W. de Gruyter, 2000.
11. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сараванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
12. *Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подкользин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
13. *Warshall S.* A theorem on boolean matrices // JACM. 1962. **9**. 11–12.
14. *Tarjan R.* Depth-first search and linear graph algorithms // SIAM J. Comput. 1972. **1**, N 2. 146–160.

Поступила в редакцию
28.02.2020

УДК 539.3

ЛАГРАНЖЕВО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ОБЪЕКТИВНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГОРДОНА–ШОУОЛТЕРА ПРИ ПРОСТОМ СДВИГЕ

Е. Д. Мартынова[1]

В работе рассматривается однопараметрическое семейство объективных производных Гордона–Шоуолтера, включающее производные Олдройда, Коттер–Ривлина и Яуманна. Для движения простого сдвига найдены подвижные базисы, в которых рассматриваемые дифференциальные операторы сводятся к полным производным по времени от компонент тензора. Для всех производных из рассматриваемого семейства, кроме производных Олдройда и Коттер–Ривлина, векторы базисов, лежащие в плоскости сдвига, вращаются с определенным периодом, меняя свою длину и взаимную ориентацию.

Ключевые слова: конечные деформации, простой сдвиг, объективные производные, однопараметрическое семейство объективных производных Гордона–Шоуолтера, лагранжево представление объективных производных.

The paper deals with the one-parameter family of Gordon–Showalter objective derivatives, which includes the Oldroyd, Cotter–Rivlin, and Jaumann derivatives. For a simple shift, movable bases were found in which the considered differential operators are reduced to the total time derivatives of the tensor components. For all derivatives of the family under consideration, except for Oldroyd and Cotter–Rivlin derivatives, the vectors of bases lying in the shear plane rotate with a certain period, changing their length and mutual orientation.

Key words: finite deformations, simple shift, objective derivatives, one-parameter family of Gordon–Showalter objective derivatives, Lagrangian representation of objective derivatives.

1. Введение. Принцип материальной объективности, лежащий в основе современной теории определяющих соотношений (ОС) [1], требует, чтобы тензоры, входящие в определяющее соотношение, принадлежали к одному типу объективности, т.е. преобразовывались одинаковым образом при замене системы отсчета. Тензоры, преобразующиеся при переходе к новой системе отсчета по формуле

$$\hat{Z}_*(t) = \hat{\theta}(t)\hat{Z}(t)\hat{\theta}^T(t), \tag{1}$$

где $\hat{\theta}(t)$ — ортогональный тензор перехода к новой системе отсчета, называются индифферентными (пространственно ориентированными или левыми) [2]. Примером является тензор напряжений Коши.

[1] *Мартынова Елена Дмитриевна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: elemarta@mail.ru.

Martynova Elena Dmitrievna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity.