УДК 517.938.5

СВОЙСТВО НЕКОМПАКТНОСТИ СЛОЕВ И ОСОБЕННОСТЕЙ НЕЕВКЛИДОВОЙ СИСТЕМЫ КОВАЛЕВСКОЙ НА ПУЧКЕ АЛГЕБР ЛИ

В. А. Кибкало [1]

Показано, что слоения Лиувилля семейства неевклидовых аналогов интегрируемой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли имеют как компактные, так и некомпактные слои. Также существует перестройка их компактного совместного уровня в некомпактный, имеющая некомпактный особый слой. В частности, это верно для $e(2,1)$-аналога системы Ковалевской. В случае ненулевой постоянной площадей доказан критерий наличия некомпактной компоненты поверхности уровня первых интегралов и функций Казимира.

Ключевые слова: гамильтонова система, интегрируемость, твердое тело, алгебра Ли, слоение Лиувилля, компактность.

It is shown that Liouville foliations of the family on non-Euclidean analogs of Kovalevskaya integrable system on a pencil of Lie algebras have both compact and noncompact fibers. A bifurcation of their compact common level surface into a noncompact one exists and has a noncompact singular fiber. In particular, this is true for the non-Euclidean $e(2,1)$-analogue of the Kovalevskaya case of rigid body dynamics. For the case of nonzero area integral, we prove an effective criterion of existence of a noncompact component of the common level surface of first integrals and Casimir functions.

Key words: Hamiltonian system, integrability, rigid body, Lie algebra, Liouville foliation, compactness.

Обсуждаются аналоги известной интегрируемой системы Ковалевской и ее обобщения И. В. Комаровым (см. [1]) на пучок $so(3,1)$–$e(3)$–$so(4)$ алгебр Ли с параметром $\varkappa \in \mathbb{R}$. Их скобки Ли–Пуассона на $\mathbb{R}^6(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ имеют вид (ε_{ijk} есть знак перестановки $(ijk) \longrightarrow (123)$)

$$\{\hat{J}_i, \hat{J}_j\} = \varepsilon_{ijk}\hat{J}_k, \qquad \{\hat{J}_i, \hat{x}_j\} = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_k, \qquad \{\hat{x}_i, \hat{x}_j\} = \varepsilon_{ijk}\varkappa\hat{J}_k. \tag{1}$$

Для этих систем были найдены [2–4] бифуркационные диаграммы и перестройки-атомы торов Лиувилля, а в [5–8] вычислены тонкие топологические инварианты Фоменко–Цишанга [9, 10].

В работе А. В. Борисова и И. С. Мамаева [11] описан аналог задачи Ковалевской (и других случаев интегрируемости: Эйлера, Лагранжа, Горячева–Чаплыгина, Гесса) динамики твердого тела в пространстве постоянной отрицательной кривизны (плоскости Лобачевского). Комплексное преобразование $\hat{J}_j = i \cdot J_j \,/\, k, \hat{x}_j = i \cdot x_j \,/\, k$, $j = 1, 2, 3$, переводит семейство систем Ковалевской (1) на пучке $so(3,1)$–$e(3)$–$so(4)$ в новое семейство. Алгебре Ли $e(3)$ (т.е. случаю $\varkappa = 0$) соответствует алгебра Ли $e(2,1)$. Остальные алгебры Ли заданы структурными константами их скобок Пуассона. Разделение переменных, аналогичное полученному Кеттером, для новой задачи при $\varkappa = 0$ было построено С. В. Соколовым в [12].

Функции Казимира (геометрический интеграл f_1 и интеграл площадей f_2), гамильтониан H и первый интеграл F нового семейства систем Ковалевской в координатах $J_1, \dots, x_3$ имеют вид

$$f_1 \;=\; x_1^2 + x_2^2 - k^2x_3^2 + \varkappa x_1^2 + \varkappa x_2^2 - \varkappa k^2 x_3^2 \;=\; a, \tag{2}$$

$$f_2 \;=\; x_1J_1 + x_2J_2 - k^2x_3J_3 \;=\; b, \tag{3}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(J_1^2 + J_2^2 - 2k^2J_3^2\right) - b_1x_1 \;=\; h, \tag{4}$$

$$F = \frac{1}{4}\left(J_1^2 - J_2^2 + 2b_1x_1 + \varkappa b_1^2\right)^2 + \frac{1}{4}\left(2J_1J_2 + 2b_1x_2\right)^2 \;=\; f. \tag{5}$$

[1] *Кибкало Владислав Александрович* — асп. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; мл. науч. сотр. Московского центра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

Kibkalo Vladislav Alexandrovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Junior Researcher, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Топология фазового пространства, расслоенного на совместные уровни интегралов (2)–(5), и поведение траекторий таких систем могут быть устроены весьма необычно. Так, для неевклидова случая Эйлера (свободного движения тела по некоторому пространству отрицательной кривизны) свойство траектории быть ограниченной (на 2-торе) или неограниченной определяется знаком $J_1^2 + J_2^2 - 2k^2 J_3 = \langle \vec{J}, \vec{J} \rangle_g$ относительно квадрата вектора J 2-формы $\operatorname{diag}(1, 1, -k^2)$.

Интересно проверить, содержат ли системы Ковалевской на новом пучке некомпактные слои и их бифуркации. Системы с такими слоениями активно изучаются, в работе [13] приведен широкий список таких особенностей, обнаруженных в интегрируемых системах механики и геометрии. В [14] были классифицированы слоения Лиувилля бильярдных систем с неограниченными столами. Их особенности топологически эквивалентны некомпактным боттовским атомам-бифуркациям интегрируемых гамильтоновых систем. В работе [15] предложена классификация некомпактных особенностей в достаточно широкой общности.

Другой класс таких особенностей включает перестройку компактного слоя в некомпактный без падения ранга отображения момента [13]. В настоящей работе показано, что некомпактные слои системы Ковалевской возникают похожим образом (теорема 3). Отметим, что изучать такие особенности вычислительным путем весьма непросто.

Также в настоящей работе доказана связь между некомпактностью совместного уровня первых интегралов (слоя или несвязного объединения слоев) и падением степени некоторого полинома с переменными коэффициентами (которые непрерывны и ограничены). Каждая точка слоя соответствует корню этого полинома, а неограниченность корня при малом изменении коэффициентов (по теореме Виета) возможна лишь при обращении в нуль старшего коэффициента многочлена. Вопросы полноты потоков и функциональной независимости первых интегралов мы не рассматриваем.

1. Параметризация совместного уровня $T_{a,b,h,f} = \{y \in \mathbb{R}^6 \mid f_1 = a, f_2 = b, H = h, F = f\}$. Компактность множества $T_{a,b,h,f}$ равносильна его ограниченности: оно замкнуто как заданное системой полиномиальных уравнений. Используя вид функций H и f_1, выразим функции J_3^2 и x_3^2 через переменные J_1, J_2, x_1, x_2.

Замена координат $\xi_1 = J_1^2 - J_2^2 + 2b_1 x_1 + \varkappa b_1^2$ и $\xi_2 = 2J_1 J_2 + 2b_1 x_2$ биективна и линейна по парам переменных x_1, x_2 и ξ_1, ξ_2. Здесь $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 4F := \tilde{f}^2$, т.е. используется специальный вид интеграла F. Теперь перейдем к полярным координатам f, α, r, β с особенностями при $r = 0$ или $\tilde{f} = 0$:

$$\xi_1 = \tilde{f}\,\cos\alpha, \qquad \xi_2 = \tilde{f}\,\sin\alpha, \qquad J_1 = r\,\cos\beta, \qquad J_2 = r\,\sin\beta.$$

Рассмотрим $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ и множество $V = A(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}^+(r)/\sim$ с эквивалентностью

$$(0, \beta, r) \sim (2\pi, \beta, r), \quad (\alpha, 0, r) \sim (\alpha, 2\pi, r), \qquad (\alpha, \beta_1, 0) \sim (\alpha, \beta_2, 0) \qquad \text{для } \forall\, \alpha, \beta, \beta_i \in [0,\, 2\pi].$$

Множество точек $x \in V : r(x) > 0$ есть произведение 2-тора на открытый луч. Примем $f \neq 0$.

Перепишем f_1, f_2, H в новых координатах. Из выражения для (4) получаем $J_1^2 - k^2 J_3^2 = h + (\xi_1 - \varkappa b_1^2)/2$ и подставляем правую часть соотношения в формулу (2). Функции J_3^2 и x_3^2 от (α, β, r) принимают вид

$$k^2 J_3^2(\alpha, \beta, r) = -h + (b_1^2 \varkappa)/2 - 1/2\tilde{f}\,\cos\alpha + r^2(\cos\beta)^2, \tag{6}$$

$$4b_1^2 k^2 x_3^2(\alpha, \beta, r) = r^4 + 2(\varkappa b_1^2 - \tilde{f}\cos(\alpha - 2\beta))r^2 + (-4ab_1^2 + \tilde{f}^2 + 4\varkappa b_1^2 h - \varkappa^2 b_1^4). \tag{7}$$

Возведя в квадрат уравнение $-b + x_1 J_1 + x_2 J_2 = k^2 x_3 J_3$ интеграла площадей, получим полином $P(r)$ степени 4 по r:

$$8b_1 P(r) \;=\; g_4(\alpha, \beta) r^4 + g_3(\alpha, \beta) r^3 + g_2(\alpha, \beta) r^2 + g_1(\alpha, \beta) r + g_0(\alpha, \beta) = 0. \tag{8}$$

Коэффициенты $g_j(\alpha, \beta)$ ограничены на A и непрерывно зависят от α, β, значений интегралов a, b, h, f на слое, параметра пучка $\varkappa$ и констант b_1, k:

$$g_4 = 2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f}\,\cos(\alpha - 4\beta), \;\; g_3 = 8b_1 b\,\cos\beta,$$

$$g_2 = 4ab_1^2 - 4\tilde{f}h\cos(\alpha - 2\beta) + 2(2ab_1^2 - \tilde{f}^2 - 2\varkappa b_1^2 h + \varkappa^2 b_1^4)\cos 2\beta,$$

$$g_1 = b \cdot 8b_1(-\tilde{f}\,\cos(\alpha - \beta) + \varkappa b_1^2\,\cos\beta), \qquad g_0 = 8b^2 b_1^2 + (2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f}\,\cos\alpha)\,(-4ab_1^2 + \tilde{f}^2 + 4\varkappa b_1^2 h - \varkappa^2 b_1^4).$$

Пусть $S \subset V$ есть поверхность корней $P(r)$. При $f \neq 0$ определена проекция $\pi : T_{a,b,h,f} \longrightarrow S$.

Лемма 1. *Прообраз* $\pi^{-1}(x)$ *точки* $x \in S$ *пуст тогда и только тогда, когда* $J_3^2(x) < 0$ *или* $x_3^2(x) < 0$ (формулы (6), (7)). *Прообраз точки* x *состоит из одной точки, если* $x_3(x) = J_3(x) = 0$. *Прообраз каждой из остальных точек состоит из двух точек, причем если* $x_3(x) \cdot J_3(x) \neq 0$, *то он является одной из следующих пар точек:*

$$\left(+\sqrt{x_3^2(x)}, +\sqrt{J_3^2(x)}\right), \left(-\sqrt{x_3^2(x)}, -\sqrt{J_3^2(x)}\right) \text{ либо } \left(-\sqrt{x_3^2(x)}, +\sqrt{J_3^2(x)}\right), \left(+\sqrt{x_3^2(x)}, -\sqrt{J_3^2(x)}\right).$$

Доказательство. Пусть $rf \neq 0$. Тогда точки $\mathbb{R}^6(\vec{x}, \vec{J})$ из прообраза точки $x \in S$ заведомо лежат в множестве $F = f$. Возведение в квадрат уравнения $k^2 x_3 J_3 = -b + x_1 J_1 + x_2 J_2$ добавляет новые решения, в точках которых знак $x_3 J_3$ и знак правой части отличаются (так, при $x_3 J_3 = 0$ переход равносилен). Равенства (6), (7) позволяют явно выразить $J_3^2(x), x_3^2(x)$ соответственно, т.е. выбор знаков дает ровно 4 варианта при $x_3 J_3 \neq 0$. Поскольку переход неравносилен, то потребуется выбрать одну из пар точек с одинаковым знаком $x_3 J_3$. □

2. Достаточное условие компактности связного слоя на уровне $T_{a,b,h,f}$

Лемма 2. *Какая-либо из шести координат* $x_1, \ldots, J_3$ *не ограничена на поверхности уровня* $T_{a,b,h,k}$ *первых интегралов тогда и только тогда, когда на ее образе в* S *не ограничена функция* $r^2 = J_1^2 + J_2^2$.

Доказательство. Переменные x_1, x_2 и квадраты x_3^2, J_3^2 выражаются как полиномы от J_1, J_2, от ξ_1, ξ_2 (ограниченных по модулю значением $\tilde{f}$ на 2-слое) и от некоторых постоянных системы. □

Аналогично множество $r = 0$ всегда компактно в $T_{a,b,h,f}$: подставим $J_1 = J_2 = 0$ в f_1, f_2, H, F.

Как известно, корни многочлена со старшим коэффициентом 1 непрерывно зависят от его коэффициентов. Если последние непрерывны на компакте, то все корни всех таких полиномов ограничены в совокупности. Тем самым лишь обращение в нуль где-то на A старшего коэффициента $g_4(\alpha, \beta)$ может дать неограниченную поверхность S и, возможно, неограниченный уровень $T_{a,b,h,k}$.

Теорема 1 (достаточное условие компактности связной компоненты уровня интегралов). *Пусть для* $H = h, F = f, \varkappa$ *выполнено* $(2h - \varkappa b_1^2)^2 > 4f$. *Тогда для неевклидовой системы Ковалевской со значением параметра* $\varkappa$ *пучка скобок Пуассона и любых значений функций Казимира* $f_1 = a, f_2 = b$ *совместная поверхность уровня интегралов* $T_{a,b,h,f}$ *компактна.*

Доказательство. Старший коэффициент $P(r)$ в (8) равен $g_4(\alpha, \beta) = 2h - \varkappa b_1^2 + \tilde{f}\cos(\alpha - 4\beta)$. В случае $f \neq 0$ он отделен от нуля на торе A в том и только в том случае, когда уравнение $\cos\gamma = (2h - \varkappa b_1^2)/\tilde{f}$ не имеет корней $\gamma = \alpha - 4\beta$. В случае $f = 0$ этот коэффициент постоянен на уровне $T_{a,b,h,f}$.

При выполнении условия теоремы поделим P на g_4, получим многочлен с непрерывными коэффициентами, ограниченными по модулю $M > 0$ на всем торе A. Тогда все корни многочленов $P(r)|_{\alpha,\beta}$ (т.е. тройки $(\alpha, \beta, r) \in S$) ограничены по модулю, например, выражением $|r| < 4 \cdot M^4$.

При любом $f \in \mathbb{R}$ из условия $(2h - \varkappa b_1^2)^2 > 4f$ следует ограниченность конечнозначной функции $r(\alpha, \beta)$ на торе A или $r(\beta)|_{f=0}$ на $S^1(\beta)$, т.е. имеет место компактность связных компонент уровня $T_{a,b,h,f}$. □

3. Критерий некомпактности совместного уровня $T_{a,b,h,f}$ первых интегралов. Пусть далее $f > 0$ и условие $(2h - \varkappa b_1^2)^2 > 4f = \tilde{f}^2$ не выполнено. Найдем нули функции g_4 на торе A.

Лемма 3. *В случае* $f > 0$ *нули старшего коэффициента* g_4 *многочлена* P *на торе* A *лежат на кривой* $\alpha = 4\beta$ *при* $2h - \varkappa b_1^2 = -\tilde{f}$, *на кривой* $\alpha = 4\beta + \pi$ *при* $2h - \varkappa b_1^2 = \tilde{f}$ *или на паре кривых* $\alpha = 4\beta \pm \phi$ *при* $|2h - \varkappa b_1^2| > \tilde{f}$, *где* $\phi = \arccos((\varkappa b_1^2 - 2h)/\tilde{f}) \in (0, \pi)$.

Примем $b > 0$ (случай $b < 0$ аналогичен). Тогда, за исключением конечного числа точек, для всех точек кривой из леммы 3 (назовем такую кривую *кривой нулей*) степень многочлена P равна 3, т.е. нечетна и ровно на единицу меньше максимальной. Исключенные точки имеют координату $\beta = \pi/2, 3\pi/2$.

Теорема 2 (критерий наличия некомпактной связной компоненты у поверхности уровня). *Пусть* $b \neq 0$ *и* $-\tilde{f} \leqslant \varkappa b_1^2 - 2h \leqslant \tilde{f}$, *где* $F = f = \tilde{f}^2/4$. *Тогда совместная поверхность уровня* $T_{a,b,h,f}$ *со значениями* $(a, b, h, \tilde{f}^2/4)$ *содержит как минимум одну неограниченную компоненту.*

Доказательство. 1. При малом по модулю значении функции g_4 (в сравнении с остальными коэффициентами g_j) многочлен P имеет корень: переходя к пределу $r \longrightarrow \infty$ или $r \longrightarrow -\infty$ в выражении $8b_1 P r^{-3}$, получим $g_4 r - g_3 = 0$. Тем самым уравнение $P(r) = 0$ имеет ровно один “большой” по модулю вещественный корень r и его знак определяется знаками g_4 и b. А именно при $g_4 \cdot g_3 < 0$ знак корня положителен, т.е. ему соответствует точка в S с большим положительным r.

2. Рассмотрим на кривой нулей дýги, на которых $g_3 = 8b_1|b\cos\beta| > \delta$, и их ε-широкие трубчатые *проколотые* окрестности L_i (т.е. n дугам соответствует $2n$ односторонних тонких полосок).

Вдоль выбранной кривой нулей знак $\cos\beta$ меняется, а знак g_4 постоянен на каждой полосе, на которые тор разбивается кривыми нулей. Тогда в одной из связных компонент L_i знак корня r всегда положителен, а модуль ограничен снизу возрастающей к бесконечности функцией от ε.

Тем самым некоторая связная компонента уровня $T_{a,b,h,f}$ содержит такой двумерный диск, что все его точки удалены от нуля пространства $\mathbb{R}^6(\vec{J},\vec{x})$ не менее чем на любое выбранное "большое" расстояние. □

Следствие. *Если связный слой уровня $|2h - \varkappa b_1^2| = \tilde{f}$ некомпактен, то вблизи него имеются компактные слои уровней $|2h - \varkappa b_1^2| = (1+\varepsilon)\tilde{f}$, где $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \longrightarrow +0$ максимум расстояний от точек уровня до нуля пространства $\mathbb{R}^6$ растет (из-за наличия перемен знака у $\cos\beta$ при выбранном малом по модулю g_4).*

Теорема 3. *Совместный уровень первых интегралов $T_{a,b,h,f}$, для которого $|2h - \varkappa b_1^2| = \tilde{f} > 0$, является бифуркационным в $Q_h^3 = \{f_1 = a, f_2 = b, H = h\}$ и некомпактным. В его окрестности происходит перестройка компактного совместного уровня в некомпактный уровень.*

Для определения типа гомеоморфности слоя и количества слоев будет полезно применить подход [3] к нахождению критического множества и изучить особенности рассматриваемой системы при $\cos\beta = 0$. В случае $b = 0$ близкую задачу следует решить для биквадратного уравнения $g_4r^4 + g_2r^2 + g_0 = 0$.

Численное построение (в системе Wolfram Mathematica 12) поверхности S над квадратом A и проекции $T_{1,1,h,4}$ на нее для $h \in \{1.8, 2, 2.5\}$ и $k = b_1 = 1, \varkappa = 0$ позволяет проиллюстрировать описанный в теореме 3 эффект.

Автор приносит благодарность научному руководителю А. Т. Фоменко за внимание к работе.

Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС", проект № 18–2–6–51–1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Комаров И.В.* Базис Ковалевской для атома водорода // Теор. и матем. физ. 1981. **47**, № 1. 67–72.
2. *Харламов М.П.* Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. матем. и механ. 1983. **47**, № 6. 922–930.
3. *Козлов И.К.* Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) // Матем. сб. 2014. **205**, № 4. 79–120.
4. *Kharlamov M.P., Ryabov P.E., Savushlin A.Yu.* Topological atlas of the Kowalevski–Sokolov top // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. **21**, N 1. 24–65.
5. *Болсинов А.В., Рихтер П., Фоменко А.Т.* Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. 2000. **191**, № 2. 3–42.
6. *Kibkalo V.* Topological analysis of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(4) // Lobachevskii J. Math. 2018. **39**, N 9. 1396–1399.
7. *Кибкало В.А.* Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) // Матем. сб. 2019. **210**, № 5. 3–40.
8. *Kibkalo V.* Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra so(3, 1) // Topol. and its Appl. 2020. **275**. 107028.
9. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. РАН. Сер. матем. 1990. **54**, № 3. 546–575.
10. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1, 2. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 1999.
11. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. Math. Phys. 2016. **23**, N 4. 431–454.
12. *Соколов С.В.* Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // Тр. МАИ. 2018. **100**. 1–13.
13. *Федосеев Д.А., Фоменко А.Т.* Некомпактные особенности интегрируемых динамических систем // Фунд. и прикл. матем. 2016. **21**, № 6. 217–243.
14. *Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, № 4. 20–67.
15. *Николаенко С.С.* Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сб. 2020. **211**, № 2. 123–150.

Поступила в редакцию
27.02.2020