Краткие сообщения

УДК 510.52

КРИТЕРИЙ НЕЙРОПОРОЖДЕННОСТИ АВТОМАТНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАДЕРЖКОЙ

Г. В. Боков,[1] А. С. Дробышев[2]

В работе рассматриваются нейропорожденные автоматы, представляющие собой автоматные функции, порожденные пороговыми булевыми функциями с задержкой. Доказывается критерий нейропорожденности автоматных функций с задержкой.

Ключевые слова: автоматные функции, пороговые функции, нейропорожденные автоматы.

Neural automata being finite automata represented by a composition of threshold functions with time delay are condidered in the paper. A simple criterion to test whether a given automaton with time delay can be represented by a neural automation is proved.

Key words: finite automata, threshold function, neural automata.

Проблеме нейронных сетей сегодня уделяется большое внимание. В настоящей работе мы сосредоточимся на функциональных возможностях нейронных сетей. Первое описание поведения нейронных сетей было получено в 1943 г. У. С. Мак-Каллоком и В. Питтсом [1], позднее, в 1956 г., С. К. Клини [2] показал, что каждый конечный автомат моделируется нейронной сетью с задержкой в два такта. В 2008 г. С. В. Моисеев [3] не только показал, что не любой конечный автомат можно смоделировать нейронной сетью, но и доказал необходимые и достаточные условия, при которых это моделирование возможно.

Для конечного множества символов A введем обозначения: A^* — множество всех слов, Λ — пустое слово, $A^+ = A^* \setminus \{\Lambda\}$, $A^\omega = \mathbb{N} \to A$ — множество всех бесконечных последовательностей символов в алфавите A. Отображение $f\colon A^\omega \to B^\omega$ называется *автоматной функцией* или просто *автоматом*, если существуют конечное множество Q, $q_0 \in Q$, и отображения $\varphi\colon Q \times A \to Q$ и $\psi\colon Q \times A \to B$, такие, что

$$f(x)(t) = \psi(g(x)(t), x(t)) \quad \text{и} \quad g(x)(1) = q_0,\ g(x)(t+1) = \varphi(g(x)(t), x(t+1))$$

для всех $x \in A^\omega$ и $t \in \mathbb{N}$. При этом набор $\mathcal{A} = \langle A, Q, B, \varphi, \psi, q_0\rangle$ называется *автоматным заданием* отображения f, Q — *множество состояний*, φ — *функция переходов*, ψ — *функция выходов*. Положим

$$\varphi^*(\Lambda) = q_0,\ \varphi^*(\alpha a) = \varphi(\varphi^*(\alpha), a) \quad \text{и} \quad \psi^*(\Lambda) = \Lambda,\ \psi^*(\alpha a) = \psi(\varphi^*(\alpha), a).$$

Состояние $q \in Q$ *достижимо*, если $q = \varphi^*(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in A^*$. Множество $\mathcal{L}(f) = \{\alpha \in A^+ \mid \psi^*(\alpha) = 1\}$ назовем *языком, распознаваемым автоматом* $f\colon A^\omega \to \{0,1\}^\omega$. *Задержка* — это автоматная функция $\mathfrak{Z}_c\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}^\omega$, $c \in \{0,1\}$, такая, что

$$\mathfrak{Z}_c(x)(1) = c \quad \text{и} \quad \mathfrak{Z}_c(x)(t) = x(t-1) \ \text{ при } \ t \geqslant 2.$$

Далее будем рассматривать только автоматные функции вида $f\colon A^\omega \to \{0,1\}^\omega$, где $A = \{0,1\}^n$, $n \geqslant 0$. Обозначим через $[\cdot]$ замыкание таких функций относительно суперпозиции и обратной связи [4].

Отображение $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *пороговой функцией*, если найдутся такие $c_i \in \mathbb{Z}$, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \geqslant c_0.$$

[1] *Боков Григорий Владимирович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bokov@intsys.msu.ru.

[2] *Дробышев Александр Сергеевич* — студ. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: drobyshev.sanya@yandex.ru.

Bokov Grigorii Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

Drobyshev Alexandr Sergeevich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

Нейроны — это автоматные функции вида $\mathfrak{Z}_c f$, где f — пороговая функция и $c \in \{0,1\}$. Множество всех нейронов обозначим через $\mathbf{N}$. Автоматные функции из класса $[\mathbf{N}]$ назовем *нейропорожденными.*

Отношение $R \subseteq Q \times A$ назовем *перестановочным*, если для любых (q_1, a_1), $(q_2, a_2) \in R$ либо $(q_1, a_2) \in R$, либо $(q_2, a_1) \in R$. Для автоматного задания $(A, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0)$ положим

$$A_q = \{a \in A \mid \psi(q,a) = 1\} \quad \text{и} \quad R_a = \{\alpha \in A^* \mid \psi^*(\alpha a) = 1\}.$$

Теорема. *Для любой автоматной функции* $f\colon A^\omega \to \{0,1\}^\omega$ *и любого ее автоматного задания* $(A, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0)$, *все состояния которого достижимы, следующие условия равносильны:*

1) *автомат* $\mathfrak{Z}_c f$ *нейропорожден;*

2) *отношение* $\{(q,a) \in Q \times A \mid \psi(q,a) = 1\}$ *перестановочно;*

3) *множество* $\{A_q \mid q \in Q\}$ *линейно упорядочено по включению;*

4) *множество* $\{R_a \mid a \in A\}$ *линейно упорядочено по включению;*

5) *существуют такие регулярные множества* $R_{a_1} \subseteq \ldots \subseteq R_{a_n}$, $a_i \in A$, *что*

$$\mathcal{L}(f) = \bigcup_{i=1}^{n} R_{a_i} \cdot \{a_i\};$$

6) *существуют перестановочное отношение* $P \subseteq U \times A$ *и такое семейство регулярных множеств* $L_u, u \in U$, *что*

$$\mathcal{L}(f) = \bigcup_{u \in U} L_u \cdot \{a \in A \mid (u,a) \in P\}.$$

Доказательство. Последовательно докажем каждый из переходов.

$1 \to 2$. Следует из утверждения 12 в [3].

$2 \to 3$. По определению перестановочного отношения если $a_1 \in A_{q_1}$ и $a_2 \in A_{q_2}$, то либо $a_1 \in A_{q_2}$, либо $a_2 \in A_{q_1}$. Следовательно, либо $A_{q_1} \subseteq A_{q_2}$, либо $A_{q_2} \subseteq A_{q_1}$ для любых $q_1, q_2 \in Q$.

$3 \to 4$. Рассмотрим $a_1, a_2 \in A$ и $\alpha_1 \in R_{a_1}$, $\alpha_2 \in R_{a_2}$. Заметим, что $a_i \in A_{\varphi^*(\alpha_i)}$ для любого i. Поэтому либо $A_{\varphi^*(\alpha_1)} \subseteq A_{\varphi^*(\alpha_2)}$, либо $A_{\varphi^*(\alpha_2)} \subseteq A_{\varphi^*(\alpha_1)}$. Откуда заключаем, что либо $\alpha_1 \in R_{a_2}$, либо $\alpha_2 \in R_{a_1}$. Следовательно, либо $R_{a_1} \subseteq R_{a_2}$, либо $R_{a_2} \subseteq R_{a_1}$ для любых $a_1, a_2 \in A$.

$4 \to 5$. Пусть $R_{a_1} \subseteq \ldots \subseteq R_{a_n}$ — линейный порядок элементов множества $\{R_a \mid a \in A\}$. Поскольку

$$\mathcal{L}(f) = \{\alpha \in A^+ \mid \psi^*(\alpha) = 1\} \quad \text{и} \quad R_a \cdot \{a\} = \{\alpha a \in A^+ \mid \psi^*(\alpha a) = 1\},$$

верно равенство $\mathcal{L}(f) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R_{a_i} \cdot \{a_i\}$.

$5 \to 6$. Положим $U = Q$, $P = \{(u,a) \in U \times A \mid \psi(u,a) = 1\}$ и $L_u = \{\alpha \in R_a \mid \varphi^*(\alpha) = u\}$ для всех $u \in U$. Тогда $\mathcal{L}(f)$ по определению имеет требуемый вид.

$6 \to 1$. Следует из теоремы 1 в [1]. Теорема доказана.

В заключение стоит отметить, что в теореме, доказанной в настоящей работе, в отличие от результатов работы [3], устанавливаются простые и легкопроверяемые условия нейропорожденности автоматной функции с задержкой.

Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–01–00670, второго автора — при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № 075–15–2020–801).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McCulloch W.S., Pitts W.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bull. Math. Biophys. 1943. **5**. 115–133.
2. *Kleene S.C.* Representation of events in nerve nets and finite automata // Automata Studies. Princeton Univ. Press, 1956. 3–42.
3. *Моисеев С.В.* О реализации автоматов нейронными сетями // Интеллект. системы. 2008. **12**, № 1–4. 283–316.
4. *Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С.* Введение в теорию автоматов. М.: Изд-во МГУ, 2019.

Поступила в редакцию
11.09.2019