

4. Заключение. Проведенное исследование эффективности методов разрывных смещений повышенного порядка точности позволяет сделать следующие выводы:

- 1) метод первого порядка точности приводит к существенно большей погрешности даже по сравнению с методом нулевого порядка точности, фактически он неработоспособен;
- 2) метод второго порядка точности имеет преимущества перед методом нулевого порядка как по точности, так и по числу элементов, необходимых для достижения заданной точности;
- 3) использование метода второго порядка точности позволяет эффективно определять коэффициенты интенсивности напряжений с заданной точностью (при разбиении трещины на 100 граничных элементов ошибка не превышает 1.5%).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-01111.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1921. **221**. 163–198.
2. *Griffith A.A.* The theory of rupture // *Proc. First Int. Congress Appl. Mech. Delft, 1924.* 55–63.
3. *Orowan E.* Energy criteria of fracture // *Weld. J.* 1955. **34**, N 3. 1576–1606.
4. *Irwing G.R.* Fracture dynamics // *Fracturing in Metals.* Cleveland: ASM, 1948. 147–166.
5. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *J. Appl. Mech.* 1968. **35**. 379–386.
6. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // *Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения.* М.: Мир, 1975. 204–335.
7. *Cherepanov G.P.* Crack propagation in continuous media // *J. Appl. Math. and Mech.* 1967. **31**. 503–512.
8. *Slepyan L.I.* Models and phenomena in fracture mechanics. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer, 2002.
9. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
10. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
11. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982.
12. *Шифрин Е.И.* Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002.
13. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
15. *Богданов А.И., Звягин А.В., Тьерсилен М.* Взаимное влияние системы трещин на коэффициент интенсивности напряжений // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2004. № 6. 44–49.
16. *Акулич А.В., Звягин А.В.* Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2008. № 1. 43–49
17. *Акулич А.В., Звягин А.В.* Взаимодействие трещины гидроразрыва с естественной трещиной // *Изв. РАН. Механ. жидкости и газа.* 2008. № 3. 104–112.

Поступила в редакцию
04.12.2019

УДК 531.36

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ ТЕЛ В ОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А. В. Карапетян¹, М. П. Чаплыгина²

Обсуждается задача о движении трех связанных твердых тел в однородном поле сил тяжести (обобщение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе). Найдены все стационарные движения системы, условия их устойчивости и ветвления. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм.

¹ *Карапетян Александр Владиленович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: avkarapetyan@yandex.ru.

² *Чаплыгина Мария Павловна* — студ. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mariya14chapllygina@yandex.ru.

Karapetyan Alexander Vladilenovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Chapllygina Mariya Pavlovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Ключевые слова: стационарные движения, устойчивость, бифуркационные диаграммы.

The problem of motion of three connected rigid bodies in a homogeneous gravity force field (a generalization of the problem of motion of a gyroscope with gimbal suspension) is discussed. All steady motions of the system, their stability conditions and branching are found. The results are presented in the form of bifurcational diagrams.

Key words: steady motions, stability, bifurcational diagrams.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении системы трех связанных твердых тел в однородном гравитационном поле. Каждое из тел может вращаться только вокруг одной из своих осей: первое тело — вокруг неподвижной вертикали OZ , второе — вокруг горизонтали Ox , закрепленной на первом теле, а третье — вокруг оси Oz , закрепленной на втором теле (оси Ox и Oz ортогональны). Предположим, что оси Ox, Oy, Oz (ось Oy ортогональна плоскости Oxz) — главные оси инерции второго тела, причем ось Oz — ось симметрии эллипсоида инерции третьего тела для точки O , т.е. оси Ox, Oy, Oz — главные оси инерции и для третьего тела, хотя оси Ox и Oy не связаны жестко с этим телом.

Момент инерции первого тела относительно оси OZ обозначим через C_1 , а моменты инерции второго и третьего тел относительно осей Ox, Oy, Oz — через A_2, B_2, C_2 и $A_3, B_3 = A_3, C_3$ соответственно. Пусть центры масс второго и третьего тела лежат на оси Oz в точках с координатами c_2 и c_3 соответственно, а m_2 и m_3 — массы этих тел. Положительное направление оси Oz выбираем так, что $m_2c_2 + m_3c_3 = ms > 0$ (случай $m_2c_2 + m_3c_3 = 0$ тривиален и в статье не рассматривается).

Углы поворота первого, второго и третьего тел вокруг осей OZ, Ox и Oz обозначим через φ_1, φ_2 и φ_3 соответственно. Очевидно, конфигурационное пространство системы — трехмерный тор \mathbf{T}^3 .

2. Приведенный потенциал. Рассматриваемая система допускает интеграл энергии (g — ускорение свободного падения):

$$H = \frac{1}{2} ((B_2 + A_3) \sin^2 \varphi_2 + C_2 \cos^2 \varphi_2 + C_1) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} (A_2 + A_3) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} C_3 (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2)^2 + mgs \cos \varphi_2 = h \tag{1}$$

и два циклических интеграла:

$$\begin{aligned} K &= ((B_2 + A_3) \sin^2 \varphi_2 + C_2 \cos^2 \varphi_2 + C_1) \dot{\varphi}_1 + C_3 (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 = k, \\ L &= C_3 (\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2) = l. \end{aligned} \tag{2}$$

Приведенный потенциал $V_{k,l}(\varphi_2)$ определяется как минимум функции H по $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ на фиксированных уровнях $K = k$ и $L = l$. Этот минимум достигается при [1]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \frac{k - l \cos \varphi_2}{J(\varphi_2)}, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{(J(\varphi_2) + C_3 \cos^2 \varphi_2)l - C_3 k \cos \varphi_2}{C_3 J(\varphi_2)}, \\ J(\varphi_2) &= (B_2 + A_3 + C_1) + (C_2 - B_2 - A_3) \cos^2 \varphi_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя значения (3) в функцию H (1), находим

$$V_{k,l}(\varphi_2) = mgs \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} \frac{(k - l \cos \varphi_2)^2}{J(\varphi_2)} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{C_3}.$$

Ранее [1] был рассмотрен случай $C_2 - B_2 - A_3 < 0$, характерный для задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. Рассмотрим теперь случай $C_2 - B_2 - A_3 > 0$, полагая, что $l \neq 0$ (случай $l = 0$ и $C_2 - B_2 - A_3 = 0$ тривиальны и в статье не рассматриваются). Заметим, что этот случай физически реализуем: пусть, например, масса второго тела сосредоточена в двух точках массы $\frac{m_2}{2}$ каждая, расположенных на оси Oy по разные стороны от точки O на расстоянии $d > 0$ от этой точки, тогда $C_2 = m_2 d^2, B_2 = 0$ и $C_2 - B_2 - A_3 = m_2 d^2 - A_3$ может принимать положительные значения.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi_2 \in [-1; 1], \quad a = \frac{k}{l} \in R, \quad b = (A_3 + B_2 + C_1)(C_2 - B_2 - A_3)^{-1} > 0, \\ p &= \frac{l^2}{r^2} > 0 \quad (r^2 = mgs(C_2 - B_2 - A_3)), \quad V_{k,l}(\varphi_2) = mgs f(x) + \text{const}, \quad f(x) = x + \frac{1}{2} p \frac{(x - a)^2}{x^2 + b}. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, задача поиска стационарных движений системы и исследования их устойчивости и ветвления сводится к задаче анализа критических точек функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

3. Вертикальные вращения и их устойчивость. Очевидно, $x = -1$ ($\varphi_2 = \pi$) и $x = 1$ ($\varphi_2 = 0$) — критические точки функции $f(x)$ (приведенного потенциала $V_{k,l}(\varphi_2)$). Этим точкам соответствуют стационарные движения системы, такие, что первое тело равномерно вращается вокруг вертикали OZ , второе тело неподвижно относительно первого, причем его ось Oz вертикальна, а третье тело равномерно вращается вокруг вертикально расположенной оси симметрии Oz (см. (3)). При этом центр масс занимает наинизшее положение при $x = -1$ и наивысшее при $x = 1$. Далее будем называть эти стационарные движения вертикальными вращениями. Устойчивые (неустойчивые) стационарные движения соответствуют точкам минимума (максимума) функции $f(x)$ [2]. Очевидно, $f(-1) = \min$ ($f(-1) = \max$), если $f'(-1) > 0$ ($f'(-1) < 0$), а $f(1) = \min$ ($f(1) = \max$), если $f'(1) < 0$ ($f'(1) > 0$). Здесь

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 1 + p \frac{(x-a)(ax+b)}{(b+x^2)^2}, \quad f'(-1) = 1 - p \frac{(a+1)(b-a)}{(b+1)^2}, \quad f'(1) = 1 - p \frac{(a-1)(b+a)}{(b+1)^2}.$$

Таким образом, $f(-1) = \min$ при любом $p > 0$, если $a \leq -1$ или $a \geq b$, а также при $p \in (0, p_-)$, если $a \in (-1, b)$ (при $p > p_-$ $f(-1) = \max$). Аналогично $f(1) = \max$ при любом $p > 0$, если $a \in [-b, 1]$, а также при $p \in (0, p_+)$, если $a < -b$ или $a > 1$ (при $p > p_+$ $f(1) = \min$). Здесь

$$p_- = \frac{(b+1)^2}{(a+1)(b-a)}, \quad p_+ = \frac{(b+1)^2}{(a-1)(b+a)}.$$

Следовательно, вертикальные вращения системы при наинизшем положении центра масс всегда устойчивы, если $a \leq -1$ или $a \geq b$ ($\frac{k}{l} \leq -1$ или $\frac{k}{l} \geq b$), иначе медленные вращения устойчивы, а быстрые неустойчивы. Вертикальные вращения системы при наивысшем положении центра масс всегда неустойчивы, если $a \in [-b, 1]$ ($\frac{k}{l} \in [-b, 1]$), иначе медленные вращения неустойчивы, а быстрые устойчивы.

Заметим, что значения p_- и p_+ существуют (напомним, что $p > 0$) одновременно при $a \in (1, b)$, если $b > 1$, и при $a \in (-1, -b)$, если $b < 1$. При этом $p_+ > p_-$ ($p_+ < p_-$), если и только если $b > a^2$ ($b < a^2$) (при $b = a^2$ значения p_+ и p_- равны).

4. Прецессионные движения и их устойчивость. Критические точки $x_0 \in (-1, 1)$ функции $f(x)$ определяются из уравнения $f'(x) = 0$, которое можно представить в виде

$$p = u(x) = \frac{(b+x^2)^2}{(a-x)(ax+b)}, \quad (5)$$

поскольку $f'(x) = -\frac{(p-u(x))}{u(x)}$. При этом

$$f''(x_0) = \frac{u'(x_0)}{u(x_0)}. \quad (6)$$

Критические точки $x_0 = x(p) \in (-1, 1)$, где $x(p)$ — решение уравнения (5), соответствуют прецессионным движениям системы: первое тело равномерно вращается вокруг вертикали OZ , второе неподвижно относительно первого, а третье равномерно вращается вокруг оси симметрии Oz , составляющей постоянный угол с вертикалью (см. (3)). Заметим, что каждому значению $x(p) \in (-1, 1)$ соответствуют два прецессионных движения (два значения $\varphi_2(p) \neq 0, \pi$), поскольку $x(p) = \cos \varphi_2(p)$.

Параметр p может принимать только положительные значения (см. (4)). Следовательно, прецессионные движения существуют только при $u(x) > 0$, при этом они устойчивы (неустойчивы), если функция $u(x)$ возрастает (убывает) в точке $x_0 = x(p)$ (см. (6)). Очевидно, $u(x) > 0$, если и только если

$$(a-x)(ax+b) > 0. \quad (7)$$

Таким образом, прецессионные движения существуют при

- 1) $x \in (-1, 1)$, если $a > 1$, $b > a$;
- 2) $x \in (-\frac{b}{a}, 1)$, если $|a| > 1$, $b < |a|$;
- 3) $x \in (-1, a)$, если $|a| < 1$, $b > |a|$;
- 4) $x \in (-1, a) \cup (-\frac{b}{a}, 1)$, если $a \in (-1, 0)$, $b < -a$;
- 5) $x \in (-\frac{b}{a}, a)$, если $a \in (0, 1)$, $b < a$

(если $a \leq -1$, $b \geq -a$, то прецессионных движений нет).

В первом случае функция $u(x)$ ограничена на отрезке $[-1, 1]$ и прецессионные движения существуют на ограниченном интервале изменения параметра p . Если $u'(x) \neq 0$ при любом $x \in (-1, 1)$, то для $b > a^2$ ($b < a^2$) прецессионные движения существуют и устойчивы (неустойчивы) при $p \in (p_-, p_+)$ ($p \in (p_+, p_-)$). Если же найдется значение $x_* \in (-1, 1)$, такое, что $u'(x_*) = 0$, то прецессионные движения существуют для $b > a^2$ ($b < a^2$) при $p \in (p_*, p_+)$ ($p \in (p_*, p_-)$), где $p_* = u(x_*)$; при этом прецессионные движения устойчивы (неустойчивы) для $x(p) \in (x_*, 1)$ ($x(p) \in (-1, x_*)$). Других вариантов в первом случае нет (в п. 5 статьи будет доказано, что на каждом связном интервале области определения (7) функции $u(x)$ существует не более одной критической точки x_* этой функции). В точках $(-1; p_-)$, $(1; p_+)$ имеет место бифуркация ветвления, а в точках $(x_*; p_*)$ — бифуркации рождения. Во всех остальных случаях функция $u(x)$ не ограничена на области определения (7); при этом решения уравнения (5) при $p \rightarrow +\infty$ стремятся либо к $-\frac{b}{a}$ (во втором случае), либо к a (в третьем), либо и к $-\frac{b}{a}$, и к a (в четвертом и пятом случаях). Границы $x = 1$ (во втором случае), $x = -1$ (в третьем) и $x = \pm 1$ (в четвертом) соответствуют критическим значениям $p = p_+$ (для $x = 1$) и $p = p_-$ (для $x = -1$). При этом прецессионные движения ответвляются от соответствующих вертикальных вращений (имеет место бифуркация ветвления).

Если функция $u(x)$ монотонна на каждом связном интервале своей области определения, то решения $x(p)$ уравнения (5) во втором, третьем и четвертом случаях, ответвляющиеся от точки $x = 1$ ($x = -1$), существуют только при $p > p_+$ ($p > p_-$) и, следовательно, соответствующие прецессионные движения неустойчивы (устойчивы). В противном случае уравнение $u'(x) = 0$ имеет решение $x = x_*^+$ ($x = x_*^-$) на связном интервале области определения (7), примыкающем к точке $x = 1$ ($x = -1$); при этом прецессионные движения существуют при $p > p_*^+$ ($p > p_*^-$), где $p_*^\pm = u(x_*^\pm)$. Согласно (6) прецессионные движения, соответствующие решениям $x(p) \in (x_*^+, 1)$ для $p \in (p_*^+, p_+)$ ($x(p) \in (-1, x_*^-)$ для $p \in (p_*^-, p_-)$), устойчивы (неустойчивы), а решениям $x(p) \in (-\frac{b}{a}, x_*^+)$ для $p > p_*^+$ ($x(p) \in (x_*^-, a)$ для $p > p_*^-$) — неустойчивы (устойчивы). Точки $(x_*^\pm; p_*^\pm)$ соответствуют бифуркации рождения.

В пятом случае бифуркаций ветвления нет. При этом для всех $p > p_*$ уравнение (5) имеет два решения $x = x^\pm(p)$: одно из них существует при $x \in (x_*, a)$, а другое — при $x \in (-\frac{b}{a}, x_*)$, причем при $p \rightarrow +\infty$ $x^+(p)$ стремится к a , а $x^-(p)$ — к $-\frac{b}{a}$. Здесь, как и ранее, x_* — решение уравнения $u'(x) = 0$ на интервале $(-\frac{b}{a}, a)$, $p_* = u(x_*)$. Прецессионные движения, соответствующие решению $x^+(p)$, устойчивы, а решению $x^-(p)$ — неустойчивы. Точке $(x_*; p_*)$ соответствует бифуркация рождения.

5. Параметрический анализ задачи. Выше было показано, что основные свойства прецессионных движений (количество ветвей, устойчивость, бифуркации) существенно зависят от свойств функции $u(x)$. Производная этой функции имеет вид

$$u'(x) = \frac{(b + x^2)}{(a - x)^2(ax + b)^2} v(x),$$

$$v(x) = -2ax^3 + 3(a^2 - b)x^2 + 6abx + b(b - a^2).$$

Пусть $a \neq 0$ (случай $a = 0$, т.е. $k = 0$, тривиален и в статье не рассматривается). Тогда

$$v'(x) = -6a(x - a)\left(x + \frac{b}{a}\right), \quad v(a) = b + a^2 > 0, \quad v\left(-\frac{b}{a}\right) = -b(b + a^2)a^{-2}.$$

Если $a > 0$, то функция $v(x)$ положительна при $x \in (-\infty, x_1^+) \cup (x_2^+, x_3^+)$, причем $x_1^+ < -\frac{b}{a}$, $x_3^+ > a$, $x_2^+ \in (-\frac{b}{a}, 0)$ для $b > a^2$ и $x_2^+ \in (0, a)$ для $b < a^2$. Если же $a < 0$, то $v(x) > 0$ при $x \in (x_1^-, x_2^-) \cup (x_3^-, +\infty)$, причем $x_3^- > -\frac{b}{a}$, $x_1^- < a$, $x_2^- \in (0, -\frac{b}{a})$ для $b > a^2$ и $x_2^- \in (a, 0)$ для $b < a^2$.

Таким образом, точки смены знака функции $v(x)$ (т.е. точки смены участков возрастания/убывания функции $u(x)$) зависят только от значений функции $v(x)$ в точках $x = \pm 1$ (напомним, что для прецессионных движений $x \in (-1, 1)$). Вычисляя $v(\pm 1)$, имеем

$$v(\pm 1) = (3 - b)a^2 \pm 2a(3b - 1) + b(b - 3).$$

Если $b = 3$, то значение $v(\pm 1) = \pm 16a$ положительно при $\pm a > 0$ и отрицательно при $\pm a < 0$. Если же $b \neq 3$, то

$$v(\pm 1) = (3 - b)(a \mp a_1)(a \mp a_2),$$

$$a_1 = \frac{3b - 1 + (b + 1)^{\frac{3}{2}}}{b - 3}, \quad a_2 = \frac{3b - 1 - (b + 1)^{\frac{3}{2}}}{b - 3},$$

причем $a_1 < a_2$ ($a_1 > a_2$) при $b > 3$ ($b < 3$).

Итак, если $v(1) > 0$ ($v(1) < 0$), то решение $x(p)$ уравнения (5), примыкающее при $p \rightarrow p_+$ к точке $x = 1$, ответвляется от этой точки в сторону уменьшения (увеличения) параметра p ; при этом существует (отсутствует) точка, в которой $u'(x)$ обращается в нуль. Если $v(-1) > 0$ ($v(-1) < 0$), то решение $x(p)$ уравнения (5), примыкающее при $p \rightarrow p_-$ к точке $x = -1$, ответвляется от этой точки в сторону увеличения (уменьшения) параметра p ; при этом отсутствует (существует) точка, в которой $u'(x)$ обращается в нуль.

Проведенный анализ позволяет дать полный атлас бифуркационных диаграмм Пуанкаре–Четаева [3, 4]. Каждая карта этого атласа представляет собой на плоскости $(p; x)$ совокупность всех критических точек функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$, т.е. состоит из прямых $x = \pm 1$ и кривых $x(p)$, соответствующих решениям уравнения (5). Карты различаются видом кривых $x(p)$ и распределением точек минимума/максимума на этих кривых и прямых $x = \pm 1$.

Для построения полного атласа бифуркационных диаграмм Смейла [5] необходимо провести дополнительный анализ. Каждая карта этого атласа представляет собой на плоскости $(p; q)$, где $q = (h - \frac{I^2}{2C_3})/mgs$, совокупность кривых $q = q(p) = f(x(p))$ и прямых

$$q = f(-1) = -1 + \frac{(a+1)^2}{2(b+1)}p, \quad q = f(1) = 1 + \frac{(1-a)^2}{2(b+1)}p. \quad (8)$$

Эта совокупность определяет бифуркационное по Смейлу множество, на котором происходят перестройки топологического типа областей возможности движения, определяемых соотношением $f(x) \leq q$ ($V_{k,l}(\varphi_2) \leq h$). При $a < 0$ прямые (8) не пересекаются, а при $a > 0$ пересекаются, когда $p = p_0 = \frac{b+1}{a}$. Взаимное расположение точек p_0 и p_{\pm} влияет на вид бифуркационной диаграммы Смейла. Очевидно, $p_+ > p_0$ ($p_+ < p_0$) при $b > a^2 - 2a$ ($b < a^2 - 2a$), а $p_- > p_0$ ($p_- < p_0$) при $b < a^2 + 2a$ ($b > a^2 + 2a$).

В заключение отметим, что при $x(p) \rightarrow a$ кривая $q(p)$ стремится к прямой (горизонтальная асимптота) $q = f(a) = a$, а при $x(p) \rightarrow -\frac{b}{a}$ — к прямой (наклонная асимптота)

$$q = f\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b}{a} + p \frac{a^2 + b}{2b}. \quad (9)$$

Очевидно, угол наклона прямой (9) больше углов наклона прямых (8).

6. Бифуркационные диаграммы. Проведенный параметрический анализ позволяет разбить область параметров задачи a и b на 24 области (рис. 1), различающиеся видом бифуркационных диаграмм Смейла. Для бифуркационных диаграмм Пуанкаре–Четаева расположение точек p_0 и p_{\pm} не имеет значения (области 1 и 2, 5 и 6, 7 и 8, 11 и 12 можно объединить).

Приведем диаграммы Пуанкаре–Четаева (слева) и Смейла (справа) для 5 (соответственно из 20 и 24) областей, поясняя, как они изменяются при переходе параметров в другие области (см. рис. 2–6).

На этих диаграммах знаком “плюс” помечены устойчивые, а знаком “минус” — неустойчивые движения.

6.1. Диаграммы Пуанкаре–Четаева. Диаграмма для области 2 совпадает с диаграммой для области 1, приведенной на рис. 2; диаграмма для области 3 отличается от приведенной на этом рисунке тем, что кривая $x(p)$ существует только при $p > p_+$ ($x(p_+) = 1$), и все прецессионные движения неустойчивы; диаграммы для областей 24 и 23 получаются соответственно из диаграмм для областей 1 и 3 смещением асимптоты $x = -\frac{b}{a}$ в верхнюю полуплоскость.

Диаграмма для области 8 совпадает с диаграммой для области 7, приведенной на рис. 3; диаграмма для областей 5 и 6 получается из приведенной перемещением точки p_- правее точки p_+ ; для областей 9 и 4 прецессионные движения существуют только при $p \in (p_-, p_+)$ и $p \in (p_+, p_-)$ соответственно ($x(p_{\pm}) = \pm 1$), и, следовательно, все прецессии для области 9 устойчивы, а для области 4 неустойчивы.

Диаграмма для области 11 совпадает с диаграммой для области 12, приведенной на рис. 4; диаграмма для области 10 отличается от приведенной тем, что прецессионные движения существуют только при $p > p_-$ ($x(p_-) = -1$) и, следовательно, устойчивы; диаграммы для областей 20 и 21 получаются из диаграмм для областей 12 и 10 смещением асимптоты $x = a$ в нижнюю полуплоскость.

Диаграмма для области 22 получается из диаграммы для области 13, приведенной на рис. 5, если из нее удалить кривые $x(p) \in (-\frac{b}{a}, a)$ (в области 22 прецессионных движений нет).

Диаграмма для области 16 получается из диаграммы для области 15, приведенной на рис. 6, перемещением точки p_- правее точки p_+ , а диаграммы для областей 14, 17–19 отличаются от той

же диаграммы на рис. 6 отсутствием прецессионных движений при $p \in (p_*, p_+)$ для области 14 или при $p \in (p_*, p_-)$ для области 17, а также и тех и других для областей 18 ($p_+ < p_-$) и 19 ($p_+ > p_-$).

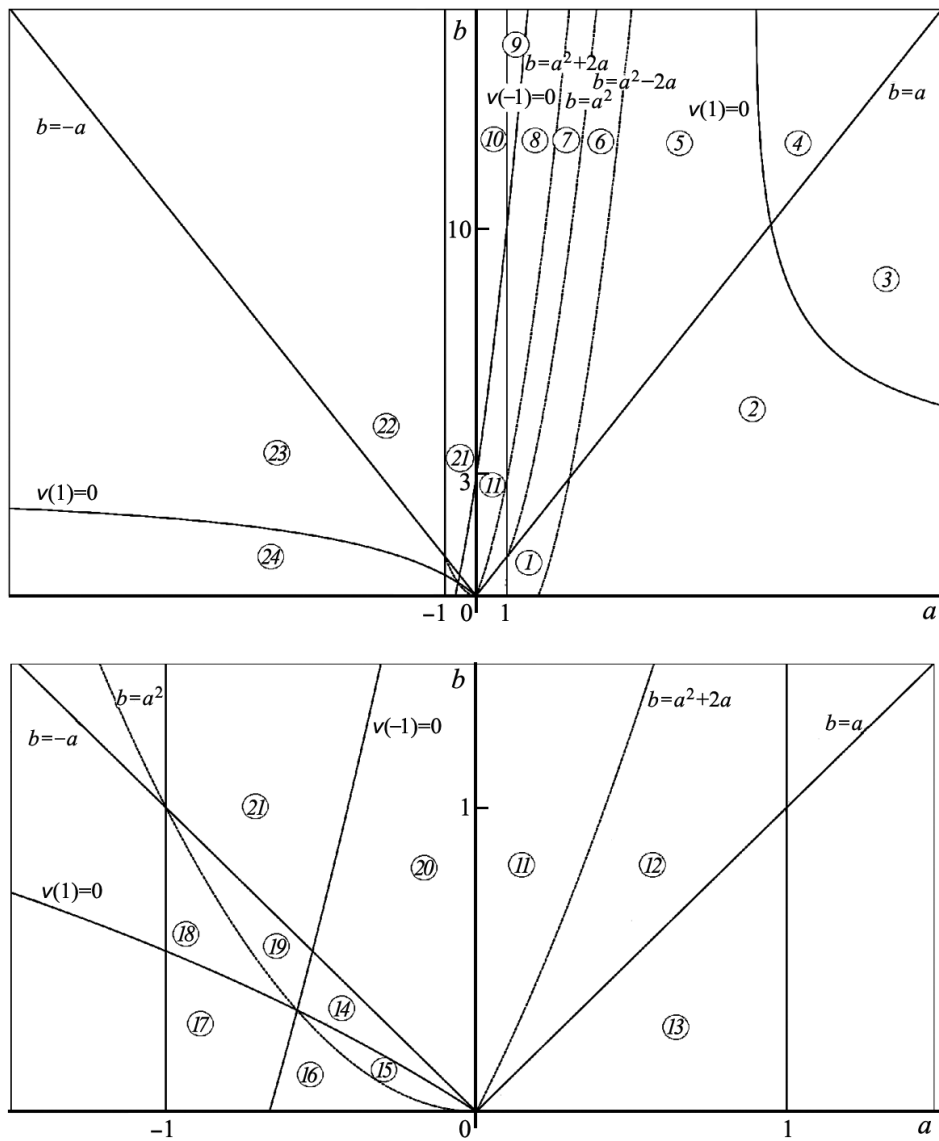


Рис. 1. Плоскость параметров a и b

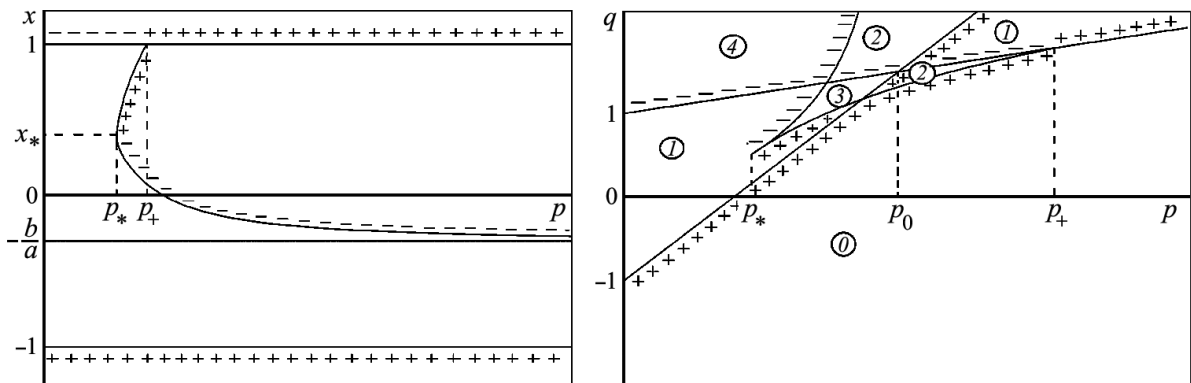


Рис. 2. Область 1: $a > 1, b \in (a^2 - 2a, a)$

6.2. Диаграммы Смейла. Аналогичным образом бифуркационные диаграммы Смейла для областей 1, 7, 12, 13, 15, приведенные на рис. 2-6, трансформируются соответственно для областей

$\{2, 3, 24, 23\}, \{4-6, 8, 9\}, \{10, 11, 20, 21\}, \{22\}, \{14, 16-19\}$. На этих диаграммах символами (0), (1), (2), (3), (4) обозначены топологические типы областей возможности движения: (0) — пустое множество, (1), (2) или (3) — один, два или три “толстых” двумерных тора (для приведенной по Раусу системы — один, два или три отрезка); (4) — трехмерный тор (для приведенной системы — окружность). Здесь “толстый” двумерный тор — это полноторие двумерного тора с вырезанным из него полноторием концентрического двумерного тора меньшего размера.

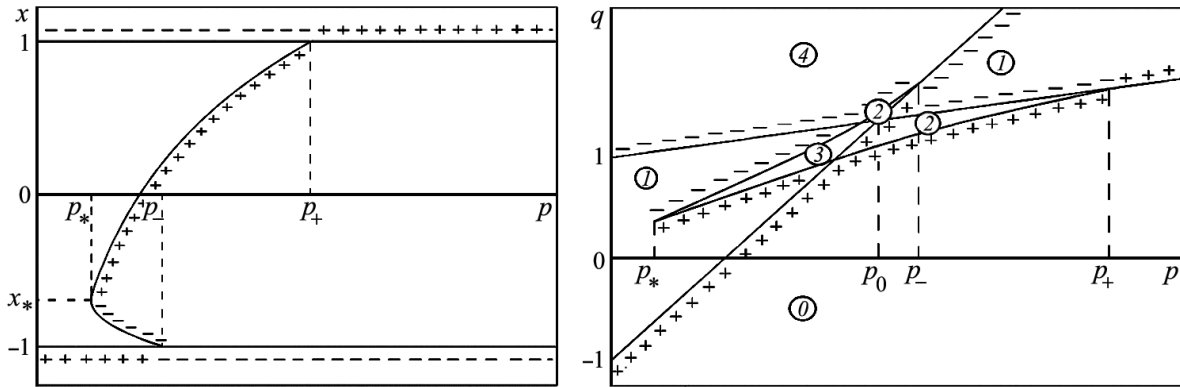


Рис. 3. Область 7: $a > 1, b \in (a^2, a^2 + 2a)$

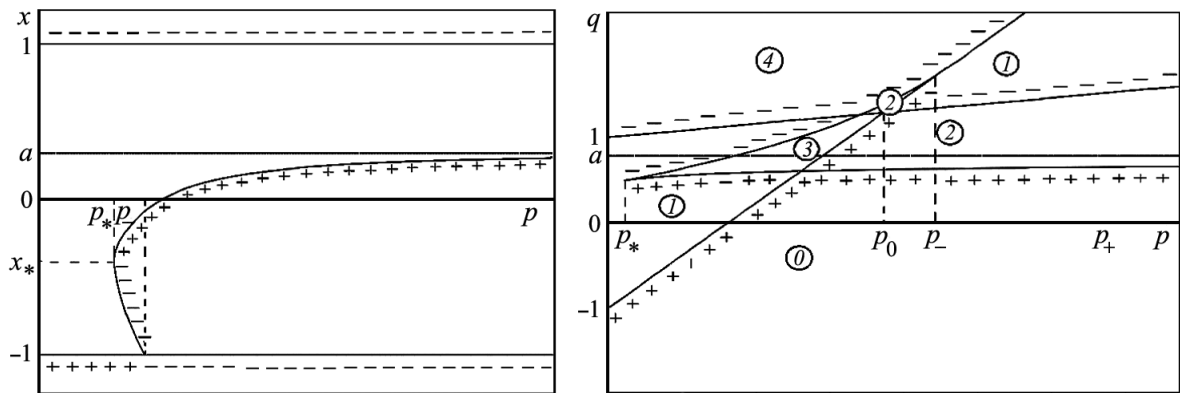


Рис. 4. Область 12: $a \in (0, 1), b \in (a, a^2 + 2a)$

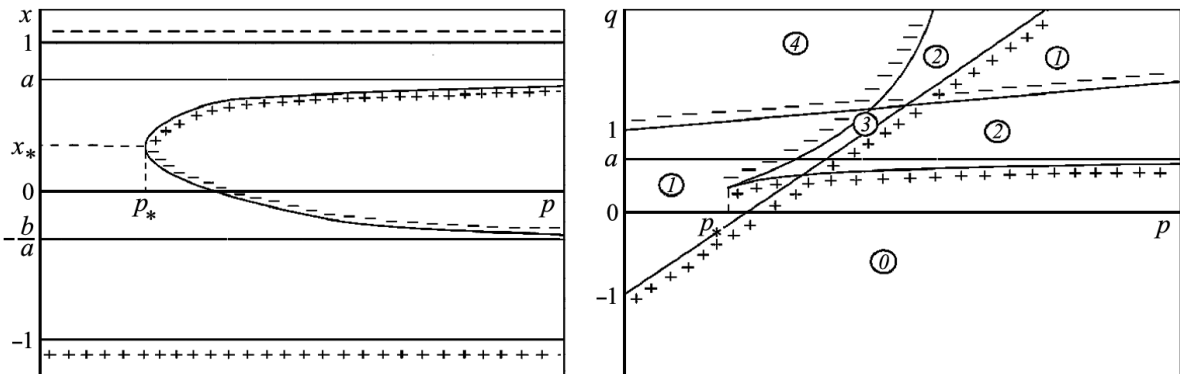


Рис. 5. Область 13: $a \in (0, 1), b \in (0, a)$

В заключение отметим, что для параметров задачи, лежащих в областях 15 и 16, существует конечное значение $\delta > 0$, такое, что для всех $p \in [a^2 - \delta, a^2 + \delta]$ при одном и том же значении параметра p существует 10 стационарных движений: два вертикальных вращения (одно устойчивое и одно неустойчивое) и четыре пары прецессионных движений (две пары устойчивых и две пары неустойчивых), см. рис. 6 (для $p \in (p_*^+, p_-)$).

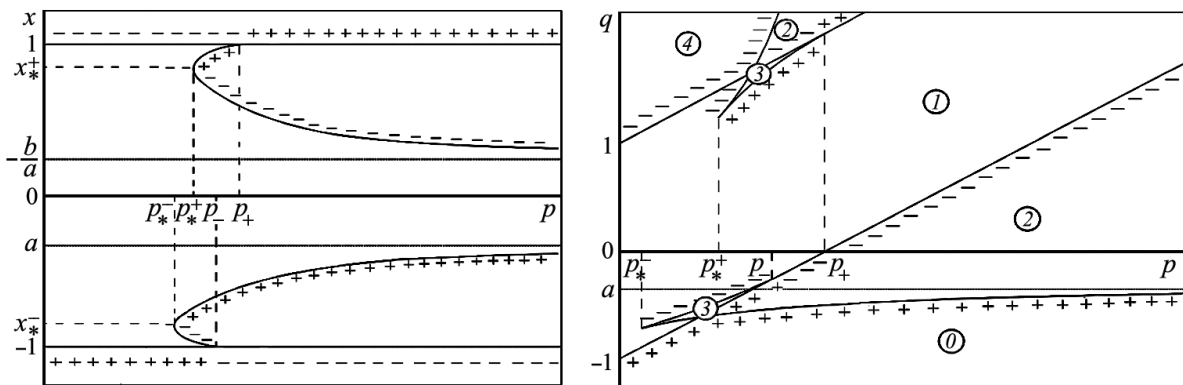


Рис. 6. Область 15: $a \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, $b > a^2$, $(3 - b)a^2 + 2a(3b - 1) + b(b - 3) > 0$

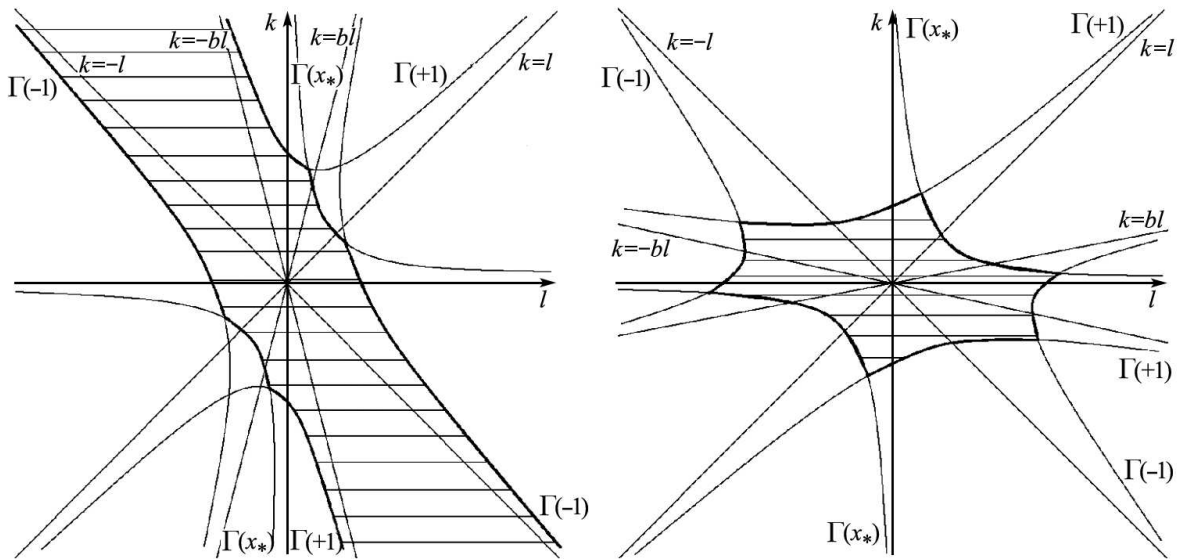


Рис. 7. Область существования прецессий

6.3. *Области существования прецессионных движений на плоскости констант циклических интегралов.* Рассмотрим плоскость $(l; k)$ постоянных интегралов (2). Прецессионные движения определяются из уравнения (5), которое можно представить в виде

$$k^2x + kl(b - x^2) - bl^2x = r^2(b + x^2)^2. \tag{10}$$

При каждом допустимом значении $x \in (-1, 1)$ соотношение (10) определяет на плоскости $(l; k)$ гиперболу $\Gamma(x)$. Совокупность всех этих гипербол задает на этой плоскости области существования прецессионных движений.

Если прецессионные движения отвечают от вертикальных вращений, соответствующих $x = \pm 1$, то границы областей существования таких прецессионных движений состоят из гипербол (или их частей) $\Gamma(\pm 1)$, определяемых формулами

$$\pm k^2 + kl(b - 1) \mp bl^2 = r^2(b + 1)^2. \tag{11}$$

Если бифуркаций рождения нет, то границы областей существования таких прецессионных движений состоят только из гипербол (11) или их частей. Если же бифуркации рождения есть, то границы соответствующих прецессионных движений включают части гиперболы $\Gamma(x_*)$, где x_* — критическая точка функции $u(x)$. Эти точки определяются из уравнения $v(x) = 0$, т.е. удовлетворяют соотношению

$$(3x_*^2 - b)k^2 + 2klx_*(3b - x_*^2) + b(b - 3x_*^2)l^2 = 0. \tag{12}$$

С учетом соотношения (12) уравнение гиперболы $\Gamma(x_*)$ можно представить в виде

$$kl = r^2(b - 3x_*^2). \tag{13}$$

Покажем, что правая часть соотношения (13) всегда положительна. Вычисляя значение функции $v(x)$ в точках $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{\frac{b}{3}}$, имеем

$$v(0) = b\left(b - \frac{k^2}{l^2}\right), \quad v\left(\pm\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = \pm\frac{16b}{\sqrt{3}}\frac{k}{l}.$$

Если $b > \frac{k^2}{l^2}$, то $v(0) > 0$, при этом $v(-\sqrt{\frac{b}{3}}) < 0$ для $kl > 0$, а $v(\sqrt{\frac{b}{3}}) < 0$ при $kl < 0$; если же $b < \frac{k^2}{l^2}$, то $v(0) < 0$, при этом $v(\sqrt{\frac{b}{3}}) > 0$ для $kl > 0$, а $v(-\sqrt{\frac{b}{3}}) > 0$ при $kl < 0$, т.е. в любом случае $|x_*| < \sqrt{\frac{b}{3}}$ ($x_* = 0$ при $b = \frac{k^2}{l^2}$). Таким образом, гипербола $\Gamma(x_*)$ существует только при $kl > 0$.

Следовательно, области существования прецессионных движений на плоскости $(l; k)$ имеют вид, представленный на рис. 7 (слева для случая $b > 1$, справа для случая $b < 1$). Области существования прецессионных движений не заштрихованы (в заштрихованной части плоскости констант циклических интегралов прецессий нет).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 19-01-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карпетян А.В., Чаплыгина М.П.* Бифуркационный анализ динамики гироскопа в кардановом подвесе // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2019. № 3. 73–76.
2. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998.
3. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. 7. 259–380.
4. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. *Smale S.* Topology and mechanics // Invent. Math. 1970. 10. 305–314; 11. 45–64.

Поступила в редакцию
19.06.2019

УДК 533.6.011

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МЕТЕОРОВ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПАРАМЕТРЕ АБЛЯЦИИ

Г. А. Тирский¹, И. Г. Брыкина², С. В. Жлуктов³

Получено приближенное аналитическое решение уравнений физической теории метеоров при постоянном параметре абляции для изменения вдоль траектории скорости и массы метеороида, движущегося как единое тело. Оценена точность этого решения. Предложен численно-аналитический метод решения уравнений при переменном параметре абляции. Проведено сравнение решений при постоянном и переменном параметре абляции, полученных разными методами.

Ключевые слова: метеороид, параметр абляции, унос массы, аналитическое решение.

An approximate analytical solution of the equations of the physical theory of meteors is obtained for a meteoroid moving as a single body under the assumption of constant ablation

¹ *Тирский Григорий Александрович* — доктор физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: tirskey@imech.msu.ru.

² *Брыкина Ирина Григорьевна* — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. НИИ механики МГУ, e-mail: shantii@mail.ru.

³ *Жлуктов Сергей Васильевич* — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Объединенный институт высоких температур РАН, e-mail: sz@flowvision.ru.

Tirskiy Grigoriy Aleksandrovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Principal Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics.

Brykina Irina Grigorievna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Scientific Researcher, Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics.

Zhlukov Sergey Vasilievich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Scientific Researcher, Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences.