

Механика

УДК 532.591, 531.5.031

МЕТОД РАЗРЫВНЫХ СМЕЩЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

А. В. Звягин¹, А. С. Удалов²

В работе рассматривается метод разрывных смещений повышенного порядка точности в приложении к задачам механики разрушения. В обычной практике приложений методов граничных элементов чаще всего применяются методы с кусочно-постоянной плотностью распределения перемещений на границе. Их преимуществом перед другими алгоритмами является простота схемы расчета при сохранении достаточно хорошей точности получаемого решения в точках области, удаленных от границы. В механике трещин (линии или поверхности разрыва поля перемещений) требуется как можно точнее описать поведение напряжений в окрестности краев трещины, что приводит к необходимости повышения порядка точности используемых численных методов. Показано, что реализованные программой методы повышенного порядка непрерывности перемещений на границе, предлагаемые в работе, существенно увеличивают точность вычисления полей перемещений и напряжений в окрестности границ трещины внутри области.

Ключевые слова: механика разрушения, трещины, коэффициенты интенсивности напряжений, метод разрывных смещений.

In this paper, the displacement discontinuity method of higher order of accuracy and its application to the problems of fracture mechanics are considered. In common practice of application of boundary element methods, the methods with step function of boundary displacement are often used. Their advantage is the simplicity of its calculation scheme with a rather good accuracy of solution at the points of region which are remote from the boundary. In the mechanics of cracks (lines or surfaces of displacement discontinuity), it is required to describe the behavior of stresses near the crack edges as accurately as possible. These requirements make it necessary to improve the accuracy of numerical methods in use. In this paper such methods are proposed. It is shown that the methods of higher order of continuity of boundary displacement implemented by our programm increase the accuracy of calculation of displacement and stress fields near the boundary within the region.

Key words: fracture mechanics, cracks, stress intensity factors, displacement discontinuity method.

1. Введение. Важным разделом линейной механики разрушения является механика трещин в упругой среде [1–8]. Трещины моделируются разрывом поля перемещений в вырожденной части области (для двумерных задач — это двусторонняя кривая, для трехмерных задач — это двусторонняя поверхность). При подходе к берегам трещины с разных сторон перемещения принимают отличные друг от друга значения. На краях трещин напряжения имеют особенность — они бесконечны. Поскольку в реальных материалах существование бесконечных напряжений невозможно, в окрестности краев трещины возникает область необратимых пластических деформаций. Тем не менее в тех случаях, когда размеры данной области малы по сравнению с размерами самой трещины, показана применимость критериев роста трещины на основе анализа полученного упругого решения [3–8]. Задачи механики трещин имеют свою специфику: важнейшими характеристиками решения, подлежащими определению, являются коэффициенты интенсивности напряжений, которые описывают особенности поведения напряжений в окрестности границ трещины. Это накладывает

¹ Звягин Александр Васильевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ; гл. науч. сотр. ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, e-mail: zvsasha@rambler.ru.

² Удалов Артем Сергеевич — студ. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: udalets@inbox.ru.
Zvyagin Alexander Vasil'evich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Wave and Gas Dynamics; Principal Researcher, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences.

Udalov Artem Sergeevich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Wave and Gas Dynamics.

жесткие требования на точность численных решений в окрестности трещины. С ростом мощности ЭВМ методы численного решения задач механики трещин стали активно развиваться [9–12].

Одним из численных методов решения задач механики трещин является метод разрывных смещений, основой которого служит представление решения уравнений равновесия в форме сингулярных интегралов с неизвестной искомой плотностью (разрыв перемещений вдоль разреза). В настоящей работе предложен метод разрывных смещений с повышенными требованиями к плотности распределения разрыва перемещений на границе. Эффективность метода показана путем сравнения с точными аналитическими решениями.

2. Постановка задачи. Базисные решения метода разрывных смещений. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для безграничной области, ослабленной системой трещин. В случае плоской задачи трещины моделируются двусторонними кривыми, на которых терпит разрыв поле перемещений $u(x, y)$. Упругая плоскость находится под действием уравновешенных нагрузок, приложенных на бесконечности. Их характеризует заданный постоянный тензор напряжений σ^∞ . Считаем, что берега трещин свободны от нагрузок, т.е. вектор напряжений на верхнем и нижнем берегах трещины равен нулю: $\sigma_n^\pm = 0$. Общее решение задачи можно представить в виде суммы двух решений. Первое решение соответствует напряженно-деформированному состоянию упругой плоскости, без трещин, которое возникает под действием приложенных на бесконечности напряжений σ_{ij}^∞ . Второе решение соответствует напряженно-деформированному состоянию упругой плоскости, которое возникает под действием нагрузок $p_i^\pm = -\sigma_{ji}^\infty n_j$, приложенных к берегам трещин (напряжения на бесконечности в этом решении равны нулю). Поскольку получение первого решения не представляет трудностей — это однородное поле напряжений, основной задачей механики трещин является поиск решения второй задачи. Введем следующие обозначения: u_x, u_y — компоненты вектора перемещений; $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yy}$ — компоненты тензора деформаций; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона. Компоненты напряжений должны удовлетворять уравнениям равновесия и условию совместности деформаций [13]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \tag{1}$$

В плоских задачах теории упругости широко используются методы теории функций комплексного переменного [14]. В качестве комплексного аргумента выступает величина $z = x + iy$, где i — мнимая единица. В работе [14] показано, что уравнениям (1) удовлетворяют напряжения, представленные формулами Колосова–Мусхелишвили:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}), \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\phi(z), \psi(z)$ — голоморфные функции переменной $z = x + iy$, верхняя черта означает операцию комплексного сопряжения. При этом перемещения выражаются в следующей форме:

$$2\mu(u_x + iu_y) = k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{3}$$

где $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига; $k = 3 - 4\nu$ для состояния плоской деформации, $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ для плосконапряженного состояния.

Таким образом, решение краевой задачи сводится к определению двух функций $\phi(z), \psi(z)$ из граничных условий. Основой метода разрывных смещений является разложение искомых функций в ряды по некоторым базовым решениям теории упругости. В качестве базовых берутся решения двух краевых задач для прямолинейного граничного элемента.

Задача I

$$y = 0; \quad |x| < h: \quad [u_y] = D_y(x); \quad \sigma_{xy} = 0. \tag{4}$$

Задача II

$$y = 0; \quad |x| < h: \quad [u_x] = D_x(x); \quad \sigma_{yy} = 0. \tag{5}$$

Здесь знак скачка [...] используется в форме $[f] = f^+ - f^-$, где f^\pm — краевые значения функции для значений аргумента $y^\pm = 0$; D_x, D_y — скачки перемещений. Воспользуемся представлением Колосова–Мусхелишвили в случае плоской деформации (2), (3). В краевой задаче I воспользуемся представлением

$$\phi'(z) = \frac{1}{2}T'(z), \quad \psi'(z) = -\frac{z}{2}T''(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}zT'(z) + \frac{1}{2}T(z). \tag{6}$$

С учетом (6) выражения для напряжений и перемещений в (2) и (3) примут следующую форму:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \operatorname{Re} T'(z) - y \operatorname{Im} T''(z), & \sigma_{xy} &= -y \operatorname{Re} T''(z), & \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} T'(z) + y \operatorname{Im} T''(z), \\ 2\mu u_x &= (1 - 2\nu) \operatorname{Re} T(z) - y \operatorname{Im} T'(z), & 2\mu u_y &= 2(1 - \nu) \operatorname{Im} T(z) - y \operatorname{Re} T'(z).\end{aligned}\quad (7)$$

Второе граничное условие в (4) выполняется автоматически, а первое приводит к решению краевой задачи для функции $T(z)$:

$$[\operatorname{Im} T(x)] = \frac{\mu}{1 - \nu} D_y(x), \quad |x| < h. \quad (8)$$

Аналогичные рассуждения проведем для краевой задачи II. Будем искать потенциалы в виде

$$\phi(z) = -\frac{1}{2} Q(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2} (zQ(z))'. \quad (9)$$

В этом случае напряжения и перемещения в (2), (3) выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} Q'(z) - y \operatorname{Im} Q''(z), & \sigma_{xy} &= -\operatorname{Im} Q'(z) - y \operatorname{Re} Q''(z), & \sigma_{yy} &= y \operatorname{Im} Q''(z), \\ 2\mu u_x &= 2(1 - \nu) \operatorname{Re} Q(z) - y \operatorname{Im} Q'(z), & 2\mu u_y &= (1 - 2\nu) \operatorname{Im} Q(z) - y \operatorname{Re} Q'(z).\end{aligned}\quad (10)$$

Ввиду (9) второе условие задачи (5) выполняется автоматически, а первое приводит к краевой задаче для функции $Q(z)$:

$$[\operatorname{Re} Q(x)] = \frac{\mu}{1 - \nu} D_x(x), \quad |x| < h. \quad (11)$$

Решение полученных краевых задач (8), (11) получается в форме интегралов типа Коши:

$$T(z) = \frac{\mu}{1 - \nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^h \frac{D_y(t)}{t - z} dt, \quad Q(z) = \frac{\mu}{1 - \nu} \frac{1}{2\pi i} \int_{-h}^h \frac{D_x(t)}{t - z} dt. \quad (12)$$

Отметим, что для достаточно широкого класса функций (например, для многочленов), представляющих плотность $D_x(t)$, $D_y(t)$ в интегралах (12), эти интегралы вычисляются в аналитической форме. Например, для квадратичной плотности $D_y(t) = at^2 + bt + c$ функция $T(z)$ будет иметь следующий вид:

$$T(z) = \frac{\mu}{2\pi(1 - \nu)} \left[2h(az + b) + (az^2 + bz + c) \ln \frac{z - h}{z + h} \right]. \quad (13)$$

На этой основе и строится численный метод разрывных смещений. Каждая из трещин заменяется последовательным набором линейных элементов (граничные элементы) заданной длины $2h$. Искомыми величинами являются функции плотности $D_x(t)$, $D_y(t)$ элемента. Для каждого элемента вводится своя локальная система координат (x, y) с началом в центре элемента. Для выбранного граничного элемента формулы (12), (7), (10) позволяют вычислить любую требуемую характеристику (напряжение или перемещение). Вычисляемая величина будет зависеть от выбранного функционального вида искомых величин $D_x(t)$, $D_y(t)$. При использовании многочленов эта зависимость от коэффициентов будет линейной (например, в случае квадратичной плотности имеем выражение (13), линейное относительно коэффициентов a, b, c). В методе граничных элементов нулевого порядка функции $D_x(t)$, $D_y(t)$ рассматриваются как константы [10]. Это является достаточно грубым приближением, поскольку вдоль границы любого берега трещины перемещения будут кусочно-непрерывны. Но даже в такой форме метод разрывных смещений позволяет получить приемлемые для практики результаты [15–17].

Обобщим метод, выбрав в качестве функционального вида плотности многочлен любой степени. Реализация метода состоит в получении замкнутой системы уравнений для неизвестных коэффициентов многочленов. Отметим, что любые решения типа (12) уже удовлетворяют уравнениям статики упругой среды. Их сумма также будет решением. Выполним граничные условия в центре каждого элемента. В плоских задачах это позволит получить два уравнения для каждого элемента или $2N$ уравнений в задаче с границей, состоящей из N элементов. Для метода нулевого порядка задача замкнута, поскольку для определения $2N$ неизвестных коэффициентов мы имеем $2N$ линейных

уравнений. В случае многочленов большей степени эти уравнения можно дополнить требованиями непрерывности плотности на границе соседних элементов. Если плотность не терпит разрыва на границе двух соседних элементов, метод будем называть методом первого порядка. Если непрерывна и первая производная плотности, имеем метод второго порядка и т.д. Нам удалось реализовать в виде программ методы нулевого, первого и второго порядка.

3. Численные результаты. Для тестирования и сравнения эффективности предложенных методов рассмотрим прямолинейную трещину длиной L , расположенную на оси $x: y = 0^\pm, |x| < l$. Трещина находится под действием постоянного давления p_0 , т.е. задача решается с граничными условиями $y = 0, |x| < l, l = \frac{L}{2}, \sigma_{yy} = -p_0, \sigma_{xy} = 0$. Эта задача имеет известное аналитическое решение (например, в [13]). Приведем аналитические выражения для смещений берегов трещины, т.е. $u_y^\pm, y = 0^\pm, |x| < l$:

$$|x| < l, \quad u_y(x, 0^\pm) = \pm \frac{p_0(1 - \nu)}{\mu} \sqrt{l^2 - x^2} \tag{14}$$

и для компоненты напряжений $\sigma_{yy}(x, 0)$ на продолжении трещины $y = 0, x > l$:

$$x > l, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = p_0 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - l^2}} - 1 \right). \tag{15}$$

На рис. 1 приведены графики зависимости компоненты перемещения u_y от координаты x для верхнего берега трещины единичной длины. Сплошная линия соответствует аналитическому решению (14), пунктир — решению методом нулевого порядка, штрихпунктир — решению методом первого порядка, кривая, изображенная точками, — решению методом второго порядка. Для анализа сходимости графики построены для двух разбиений: a — трещина разбита на 6 граничных элементов; b — трещина разбита на 20 граничных элементов. Достаточно отчетливо просматривается, что по перемещениям метод первого порядка значительно уступает даже методу нулевого порядка (как для 6, так и для 20 граничных элементов). Метод второго порядка с использованием даже малого количества элементов (в данном случае 6) описывает поле перемещений в окрестности трещины достаточно точно на основном участке, но имеет большую погрешность у краев трещины (рис. 2, a). Для более плотного разбиения (20 граничных элементов) погрешность уменьшается, но также максимальна на краях трещины (рис. 2, b).

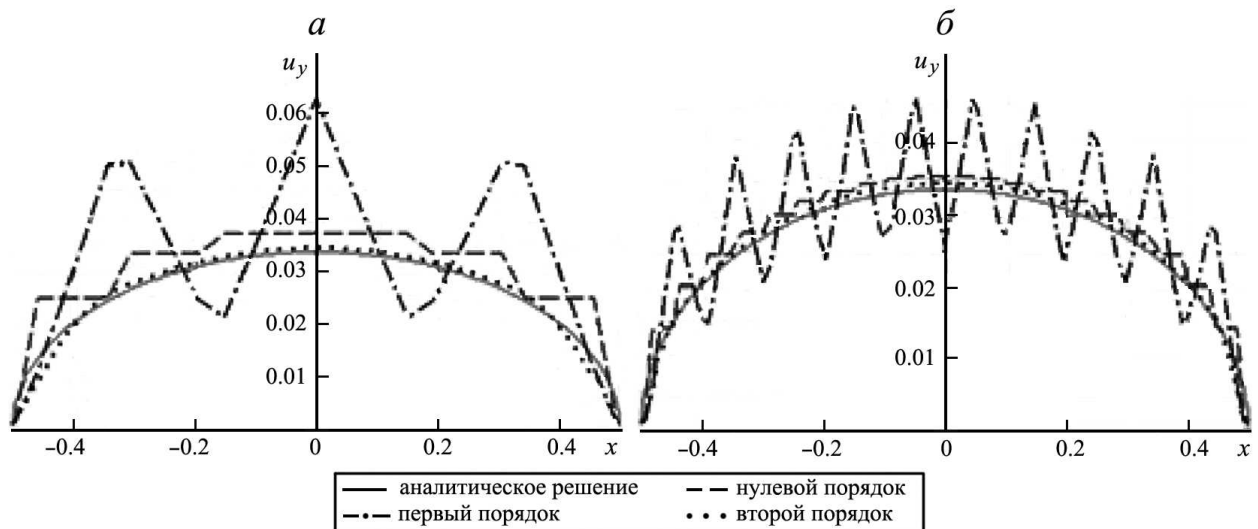


Рис. 1. Сравнение аналитического и численных решений, полученных на основе методов нулевого, первого и второго порядка: a — трещина разбита на 6 граничных элементов; b — на 20 граничных элементов. Параметры расчета: $\frac{p_0}{\mu} = 0.1; \nu = 0.33; l = 0.5$

На рис. 3, a построен график перемещения $u_y(x)$ для верхнего берега трещины с использованием разбиения трещины на 100 граничных элементов. Сплошная линия соответствует аналитическому решению (14), пунктир — методу нулевого порядка, кривая, изображенная точками, — методу второго порядка. С увеличением количества элементов до 100 максимальная ошибка уменьшилась. Для метода второго порядка максимум ошибки менее 3%.

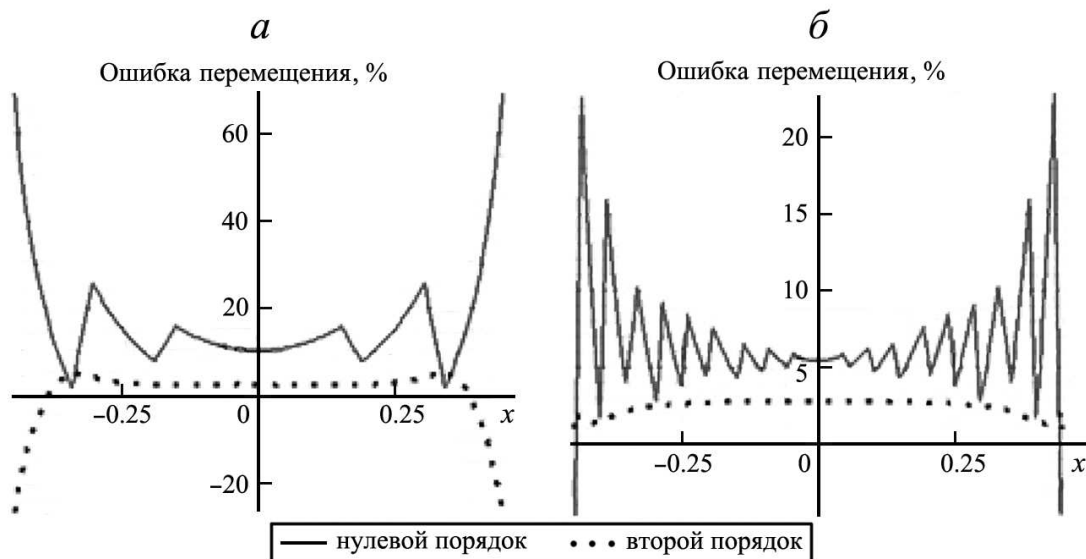


Рис. 2. Ошибка численных значений перемещения u_y для точек верхнего берега трещины относительно аналитических значений: a — 6 граничных элементов, $б$ — 20 граничных элементов

Характерной чертой задач линейной механики разрушения является наличие особенностей на краях трещины. Напряжения в окрестности края трещины имеют особенность $\sigma \sim \frac{C}{\sqrt{s}}$, где s — расстояние от точки наблюдения до края трещины (в нашей задаче для края трещины $x = l$, $s = x - l$). Величины $K = \lim_{s \rightarrow 0} \sigma(s)\sqrt{2\pi s}$ называются коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). В нашей задаче (трещина нормального отрыва) эту роль играет $K_I = \lim_{s \rightarrow 0} \sigma_{yy}(s)\sqrt{2\pi s}$. Силовым критерием начала роста трещины является равенство $K_I = K_I^*$, где K_I^* — критическая величина первого коэффициента интенсивности напряжений (константа для материала, в котором происходит рост трещины нормального отрыва). Определение КИН является основной задачей линейной механики разрушения. Именно эта задача наиболее трудна при реализации численного решения для сред с трещинами, поскольку достаточно точное определение этих коэффициентов связано с необходимостью создания специальных программ (измельчение сетки, использование нестандартных элементов и т.д.). С этой точки зрения метод разрывных смещений имеет неоспоримые преимущества, поскольку решение получается фактически в аналитической форме (конечный ряд по базисным функциям).

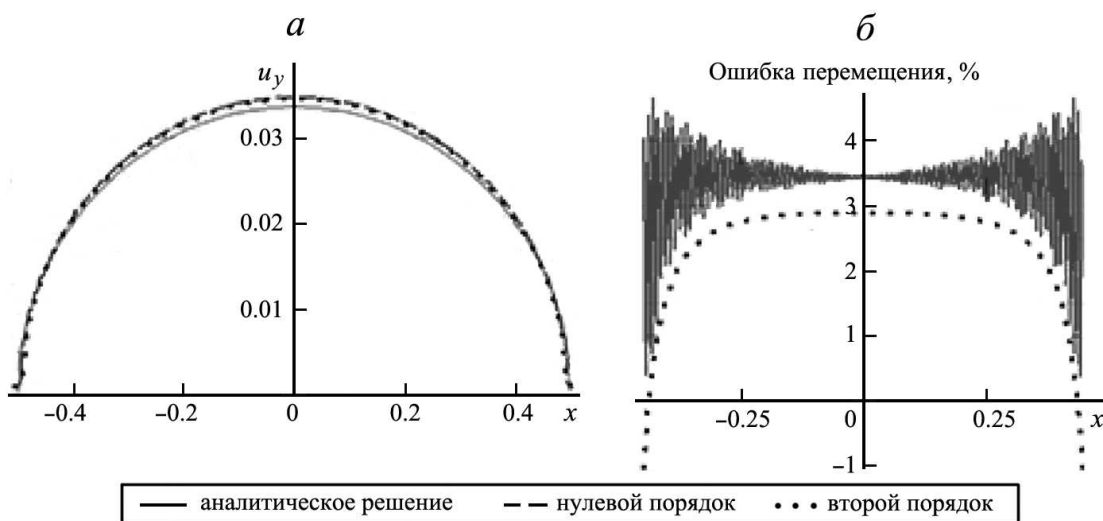


Рис. 3. График зависимости $u_y(x)$, полученный для разбиения на 100 граничных элементов (a), и ошибка для метода нулевого (сплошная линия) и второго (точки) порядка ($б$)

На рис. 4, a представлены графики аналитической зависимости $\sigma_{yy}(x)$, построенной по формуле (15), и численные результаты, полученные методами нулевого и второго порядка с использованием 70 граничных элементов. На первый взгляд мы наблюдаем очень хорошее совпадение, но в

окрестности края трещины $x = 0.5$ ошибка нарастает (рис. 4, б). Видно, что приемлемую точность $< 2\%$ имеет только метод второго порядка. Для трещины нормального отрыва (15) теоретическое значение $K_I = p_0\sqrt{\pi l}$. На рис. 5, а представлены последовательные численные значения K_I , найденные методом второго порядка точности для разных значений координаты x (расстояние до края трещины равно $s = x - l$, $l = 0.5$). Сплошная линия соответствует теоретическому значению K_I , кривая, изображенная точками, соответствует численному решению. На рис. 5, б дана зависимость относительной ошибки от координаты x . Расчеты произведены с разбиением трещины на 100 граничных элементов.

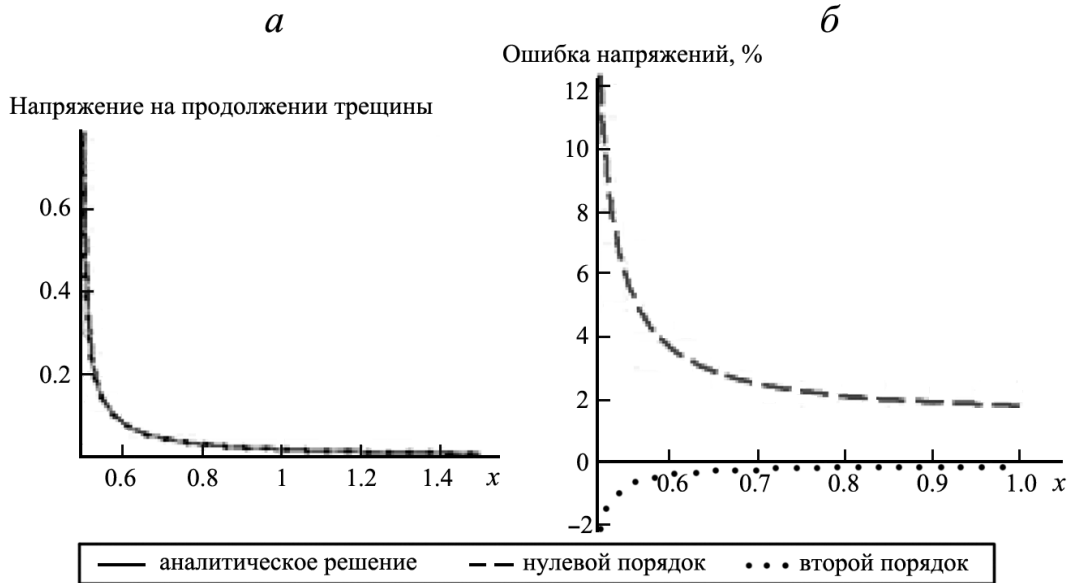


Рис. 4. График зависимости напряжения $\sigma_{yy}(x)$ на продолжении трещины $y = 0$, $x > l$, $l = 0.5$; сплошная линия — аналитическое решение; пунктир — численное решение, полученное методом нулевого порядка; кривая, изображенная точками, — решение методом второго порядка (а). Ошибка при сравнении численных и аналитических результатов (б)

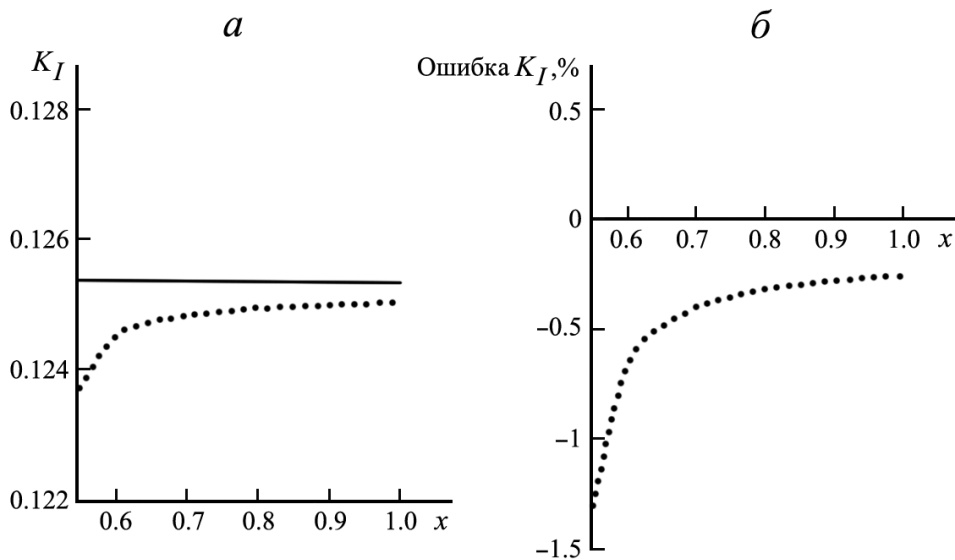


Рис. 5. Численные значения K_I , найденные методом второго порядка точности для разных значений координаты x (кривая, изображенная точками), и аналитическое значение (сплошная линия) (а). Относительная ошибка (б)

Можно утверждать, что при использовании метода второго порядка точности ошибка численного значения возрастает с уменьшением расстояния до края трещины, но не превышает 1.5%. Все численные значения коэффициента K_I оказались меньше его теоретического значения.

4. Заключение. Проведенное исследование эффективности методов разрывных смещений повышенного порядка точности позволяет сделать следующие выводы:

- 1) метод первого порядка точности приводит к существенно большей погрешности даже по сравнению с методом нулевого порядка точности, фактически он неработоспособен;
- 2) метод второго порядка точности имеет преимущества перед методом нулевого порядка как по точности, так и по числу элементов, необходимых для достижения заданной точности;
- 3) использование метода второго порядка точности позволяет эффективно определять коэффициенты интенсивности напряжений с заданной точностью (при разбиении трещины на 100 граничных элементов ошибка не превышает 1.5%).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-01111.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1921. **221**. 163–198.
2. *Griffith A.A.* The theory of rupture // *Proc. First Int. Congress Appl. Mech. Delft, 1924.* 55–63.
3. *Orowan E.* Energy criteria of fracture // *Weld. J.* 1955. **34**, N 3. 1576–1606.
4. *Irwing G.R.* Fracture dynamics // *Fracturing in Metals.* Cleveland: ASM, 1948. 147–166.
5. *Rice J.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *J. Appl. Mech.* 1968. **35**. 379–386.
6. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения // *Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения.* М.: Мир, 1975. 204–335.
7. *Cherepanov G.P.* Crack propagation in continuous media // *J. Appl. Math. and Mech.* 1967. **31**. 503–512.
8. *Slepyan L.I.* Models and phenomena in fracture mechanics. Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Tokio: Springer, 2002.
9. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984.
10. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987.
11. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982.
12. *Шифрин Е.И.* Пространственные задачи линейной механики разрушения. М.: Физматлит, 2002.
13. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
15. *Богданов А.И., Звягин А.В., Тьерсилен М.* Взаимное влияние системы трещин на коэффициент интенсивности напряжений // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2004. № 6. 44–49.
16. *Акулич А.В., Звягин А.В.* Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2008. № 1. 43–49
17. *Акулич А.В., Звягин А.В.* Взаимодействие трещины гидроразрыва с естественной трещиной // *Изв. РАН. Механ. жидкости и газа.* 2008. № 3. 104–112.

Поступила в редакцию
04.12.2019

УДК 531.36

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ ТЕЛ В ОДНОРОДНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А. В. Карапетян¹, М. П. Чаплыгина²

Обсуждается задача о движении трех связанных твердых тел в однородном поле сил тяжести (обобщение задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе). Найдены все стационарные движения системы, условия их устойчивости и ветвления. Результаты представлены в виде бифуркационных диаграмм.

¹ *Карапетян Александр Владиленович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: avkarapetyan@yandex.ru.

² *Чаплыгина Мария Павловна* — студ. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mariya14chapllygina@yandex.ru.

Karapetyan Alexander Vladilenovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Chapllygina Mariya Pavlovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.