С другой стороны, по лемме имеем $h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon) \leqslant h_{\mathrm{top}}(f(\mu,\cdot)) \leqslant \ln 2$. Таким образом, каждая точка $\mu \in G$ является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$. Поскольку множество G всюду плотно в пространстве $\mathcal{M}$, в любой окрестности каждой точки $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$ есть точка из множества G, а следовательно, в силу (11) и (12) точка μ не является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. **179**, № 3. 585–589.
2. *Kolyada S., Snoha L.* Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random & Computational Dynamics. 1996. **4**, N 2–3. 205–233.
3. *Ветохин А.Н.* Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. 2019. **106**, № 3. 341–348.
4. *Ветохин А.Н.* О непринадлежности второму бэровскому классу топологической энтропии одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2020. **56**, № 1. 133–136.
5. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.
6. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
7. *Ветохин А.Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 10. 1319–1327.

Поступила в редакцию
07.02.2020

УДК 515.124, 515.126.4, 512.562

О ТОЧКАХ СОВПАДЕНИЯ ДЛЯ ПАРЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТИПА ЗАМФИРЕСКУ

Ю. Н. Захарян[1], Т. Н. Фоменко[2]

Введено понятие пары многозначных отображений типа Замфиреску из одного метрического пространства в другое. Доказана теорема о существовании точек совпадения для таких пар отображений. Показано, что полученный результат является обобщением основной теоремы недавней совместной работы К. Няммани и А. Кевхао (Kritsana Neammanee, Annop Kaevkhao), где введено понятие многозначного отображения Замфиреску метрического пространства в себя и получены теоремы о существовании и аппроксимации неподвижной точки у таких отображений. Кроме того, показано, что все эти результаты являются частными случаями принципа поиска нулей специальных $(1,\lambda)$-поисковых функционалов, предложенного ранее Т. Н. Фоменко.

Ключевые слова: пара отображений типа Замфиреску, точка совпадения, неподвижная точка, поисковый функционал, принцип поиска нулей.

A concept of a pair of multi-valued Zamfirescu type mappings between metric spaces is introduced. A coincidence existence theorem is proved for such pairs of mappings. It is shown that the obtained result is a generalization of the main result of the recent joint work by the authors Kritsana Neammanee and Annop Kaevkhao, in which the concept of a multi-valued

[1] *Захарян Юрий Норикович* — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yuri.zakharyan@gmail.com.

[2] *Фоменко Татьяна Николаевна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общей математики ф-та ВМК МГУ, e-mail: tn-fomenko@yandex.ru.

Zakharyan Yuriy Norikovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

Fomenko Tatiana Nikolaevna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of General Mathematics.

Zamfirescu mapping was introduced and the fixed point existence and approximation theorem was proved. In addition, it is shown in this paper that all listed results are partial cases of the search principle for zeros of special $(1, \lambda)$-search functionals proposed earlier by T. N. Fomenko.

Key words: pair of Zamfirescu type multi-valued mappings, coincidence point, fixed point, search functional, principle of search for zeros.

1. Предварительные сведения. В 1972 г. Т. Замфиреску (T. Zamfirescu) в работе [1] рассмотрел класс отображений (не всегда непрерывных) метрического пространства в себя, который является более широким, чем класс сжимающих отображений. А именно он ввел следующее понятие.

Определение 1. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Отображение $T : X \to X$ называется *отображением Замфиреску*, если и только если для него существуют числа a, b, c, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant a < 1, 0 \leqslant b < \frac{1}{2}, 0 \leqslant c < \frac{1}{2}$, и для любых $x, y \in X$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$(z1) \quad d(T(x), T(y)) \leqslant ad(x, y);$$

$$(z2) \quad d(T(x), T(y)) \leqslant b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))];$$

$$(z3) \quad d(T(x), T(y)) \leqslant c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))].$$

В [1] получен следующий важный результат, обобщающий принцип Банаха сжимающих отображений.

Теорема 1 (T. Zamfirescu [1]). *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $T : X \to X$ — отображение. Если T является отображением Замфиреску, то оно имеет единственную неподвижную точку.*

Теорема Замфиреску обобщает известную теорему Банаха [2] (в случае выполнения условия $(z1)$), теорему Каннана [3] (в случае условия $(z2)$) и теорему Чаттерджи [4] (в случае условия$(z3)$).

Нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть $P(X)$ — семейство всевозможных непустых подмножеств X и $T : X \to P(X)$ — многозначное отображение. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой* многозначного отображения T, если $x \in T(x)$. Введем обозначения: $\mathrm{Fix}(T) := \{x \in X | x \in T(x)\}$ — множество всех неподвижных точек T, $\mathrm{Graph}(T) := \{(x, y) : x \in X, y \in T(x)\}$.

Для метрического пространства (X, d) обозначим через $CB(X)$ семейство всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств X. Пусть $x \in X,\ A, B \subset X$. Рассмотрим $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ — расстояние между x и A; $d(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ — расстояние между A и B; $h(A, B) := \sup\{d(a, B) : a \in A\}$ — отклонение A от B; $H(A, B) := \max\{h(A, B), h(B, A)\}$ — метрика Хаусдорфа на $CB(X)$, индуцированная метрикой d.

В 1967 г. С. Б. Надлер (S. B. Nadler) [5] выдвинул идею многозначного сжимающего отображения. Следующая известная теорема носит его имя и представляет многозначную версию принципа сжимающих отображений Банаха.

Теорема 2 [6]. *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $T : X \to CB(X)$ — многозначное α-сжимающее отображение, т.е. для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, и любых $x, y \in X$ верно, что $H(T(x), T(y)) \leqslant \alpha d(x, y)$. Тогда* $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$.

В 2010 г. появилась работа [7], в которой было введено понятие многозначного отображения Замфиреску и представлен ряд результатов о свойствах множества неподвижных точек такого отображения. Рассмотрим это понятие.

Определение 2 [7]. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $T : X \to CB(X)$ — многозначное отображение. Отображение T является *многозначным отображением Замфиреску* тогда и только тогда, когда существуют такие числа a, b, c с условиями $0 \leqslant a < 1$, $0 \leqslant b < \frac{1}{2}$, $0 \leqslant c < \frac{1}{2}$, что для любых $x, y \in X$ верно хотя бы одно из неравенств:

$$(\tilde{z}1) \quad H(T(x), T(y)) \leqslant ad(x, y);$$

$$(\tilde{z}2) \quad H(T(x), T(y)) \leqslant b[d(x, T(x)) + d(y, T(y))];$$

$$(\tilde{z}3) \quad H(T(x), T(y)) \leqslant c[d(x, T(y)) + d(y, T(x))].$$

Основным результатом работы [7] является следующее утверждение.

Теорема 3 [7]. *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $T : X \to CB(X)$ — многозначное отображение Замфиреску. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ и любой точки $x_1 \in T(x_0)$*

существует итерационная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *отображения* T *(т.е. такая, что* $x_{n+1} \in T(x_n), n = 0, 1, 2, \ldots$*), которая сходится к неподвижной точке* u *отображения* T*, причем для некоторой константы* $\alpha < 1$ *верны следующие оценки* ($n = 1, 2, \ldots$):

$$d(x_n, u) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1), \quad d(x_n, u) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n).$$

В [7] приводится также модификация этой теоремы для случая, когда отображение T имеет компактные образы. В этом случае с учетом компактности образов и непрерывности метрики итерационная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ может быть построена так, что $d(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, T(x_n))$, т.е. точка x_{n+1} выбирается как точка из образа $T(x_n)$, ближайшая к точке x_n.

В настоящей работе вводится понятие пары многозначных отображений типа Замфиреску и изучается вопрос о существовании точек совпадения у таких пар отображений. Основными результатами являются теорема о существовании точек совпадения пары многозначных отображений типа Замфиреску (теорема 4) и вариант этой теоремы для случая, когда оба многозначных отображения имеют компактные образы. Показано, что из этих теорем следуют основные результаты работы [7]. Рассматривается связь всех перечисленных результатов с принципом поиска нулей так называемых (α, β)-поисковых функционалов, который был предложен Т.Н. Фоменко [8–10] (см. также варианты этого принципа и некоторое его развитие в [11, 12]).

2. Основные результаты. Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ — полные метрические пространства, $F, G : X \to CB(Y)$ — многозначные отображения.

Определение 3. Будем говорить, что пара отображений (F, G) является *парой типа Замфиреску на* X, если $F(X) \subseteq G(X)$ и существуют такие числа a, b, c, $0 \leqslant a < 1, 0 \leqslant b < \frac{1}{2}, 0 \leqslant c < \frac{1}{2}$, что для любых $x, y \in X$ выполнено одно из следующих условий:

$$(fz1) \quad H(F(x), F(y)) \leqslant a d(G(x), G(y));$$

$$(fz2) \quad H(F(x), F(y)) \leqslant b[d(G(x), F(x)) + d(G(y), F(y))];$$

$$(fz3) \quad H(F(x), F(y)) \leqslant c[d(G(x), F(y)) + d(G(y), F(x))].$$

Напомним, что *точкой совпадения* двух многозначных отображений $F, G : X \to CB(Y)$ называется такая точка $x \in X$, что $F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$. Множество точек совпадения отображений F, G обозначается $\mathrm{Coin}(F, G) := \{x \in X | F(x) \cap G(x) \neq \emptyset\}$.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* A, B *— замкнутые ограниченные множества в метрическом пространстве* (X, d) *и* $A \neq B$*. Тогда для любого числа* $q > 1$ *верно, что для каждой точки* $x \in A$ *существует такая точка* $y \in B$*, что* $d(x, y) \leqslant qH(A, B)$.

Доказательство. В самом деле, для любой заданной точки $x \in A$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $z = z(\varepsilon) \in B$, такая, что $d(x, z) < d(x, B) + \varepsilon$. При любом заданном $q > 1$, взяв $\varepsilon = \varepsilon_q = h(A, B)(q - 1)$, найдем такую точку $z = z(\varepsilon_q) \in B$, для которой

$$d(x, z) < d(x, B) + \varepsilon_q = d(x, B) + h(A, B)(q-1) \leqslant h(A, B) + h(A, B)(q-1) = qh(A, B) \leqslant qH(A, B). \quad \square$$

Теорема 4. *Пусть* $(X, \rho), (Y, d)$ *— полные метрические пространства,* $F, G : X \to CB(Y)$ *— пара многозначных отображений типа Замфиреску. Пусть график* $\mathrm{Graph}(G)$ *отображения* G *замкнут. Предположим также, что для некоторого* $\gamma \geqslant 1$ *и для любых* $x, y \in X$ *верно, что* $\rho(x, y) \leqslant \gamma d(G(x), G(y))$.

Тогда отображения F *и* G *имеют в* X *точку совпадения и начиная с любой точки* $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graph}(F)$ *можно построить последовательность элементов* $\mathrm{Graph}(F)$*, сходящуюся к некоторой точке* $(x_*, y_*) \in \mathrm{Graph}(F) \cap \mathrm{Graph}(G)$*, т.е.* $x_* \in \mathrm{Coin}(F, G)$.

Доказательство. Пусть задано произвольное число $q \in \mathbb{R}$, $1 < q < \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{2c}\}$. Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graph}(F)$. В силу включения $F(X) \subseteq G(X)$ существует точка $x_1 \in X$, такая, что $y_0 \in G(x_1)$. Далее, выберем любую точку $y_1 \in F(x_1)$. Для y_1 таким же образом найдется точка x_2, такая, что $y_1 \in G(x_2)$. В образе $F(x_2)$ согласно лемме 1 можно выбрать такую точку y_2, для которой выполнено неравенство $d(y_1, y_2) \leqslant qH(F(x_1), F(x_2))$. Продолжим этот процесс.

В итоге возникают последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, такие, что $y_n \in F(x_n) \cap G(x_{n+1})$, причем $d(y_n, y_{n+1}) \leqslant qH(F(x_n), F(x_{n+1}))$, $n = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим возможные соотношения между величинами $d(y_0, y_1)$ и $d(y_1, y_2)$.

Если для точек x_1, x_2 выполнено условие $(fz1)$, то имеем

$$d(y_1, y_2) \leqslant qH(F(x_1), F(x_2)) \leqslant aqd(G(x_1), G(x_2)) \leqslant aqd(y_0, y_1).$$

Отсюда получаем $d(y_1, y_2) \leqslant aqd(y_0, y_1)$.

Если для точек x_1, x_2 выполнено условие $(fz2)$, т.е. если

$$H(F(x_1), F(x_2)) \leqslant b[d(G(x_1), F(x_1)) + d(G(x_2), F(x_2))],$$

то

$$d(y_1, y_2) \leqslant qH(F(x_1), F(x_2)) \leqslant qb[d(G(x_1), F(x_1)) + d(G(x_2), F(x_2))] \leqslant qb[d(y_0, y_1) + d(y_1, y_2)].$$

Следовательно, $d(y_1, y_2) \leqslant \frac{qb}{1-qb} d(y_0, y_1)$.

И, наконец, если для точек x_1, x_2 выполнено условие $(fz3)$, т.е. если

$$H(F(x_1), F(x_2)) \leqslant c[d(G(x_1), F(x_2)) + d(G(x_2), F(x_1))],$$

то имеем

$$d(y_1, y_2) \leqslant qH(F(x_1), F(x_2)) \leqslant qc[d(G(x_1), F(x_2)) + d(G(x_2), F(x_1))] =$$
$$= qc[d(G(x_1), F(x_2))] \leqslant qcd(y_0, y_2) \leqslant qc[d(y_0, y_1) + d(y_1, y_2)].$$

Следовательно, $d(y_1, y_2) \leqslant \frac{qc}{1-qc} d(y_0, y_1)$.

Обозначив $\alpha := \max\{aq, \frac{qb}{1-qb}, \frac{qc}{1-qc}\} < 1$, во всех трех случаях приходим к неравенству $d(y_1, y_2) \leqslant \alpha d(y_0, y_1)$.

Аналогично предыдущему, поскольку y_3 удовлетворяет условию $d(y_2, y_3) \leqslant qH(F(x_2), F(x_3))$, рассматривая три возможности соотношений $(fz1), (fz2), (fz3)$ для пары точек (x_2, x_3), имеем во всех случаях соотношение

$$d(y_2, y_3) \leqslant \alpha d(y_1, y_2) \leqslant \alpha^2 d(y_0, y_1).$$

Продолжая таким образом, получаем соотношения

$$d(y_n, y_{n+1}) \leqslant \alpha d(y_{n-1}, y_n), \tag{1}$$

откуда заключаем, что $d(y_n, y_{n+1}) \leqslant \alpha^n d(y_0, y_1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ясно, что последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является фундаментальной, а значит, сходится в полном пространстве Y. Пусть $y_n \to y_*$.

По условию теоремы

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \gamma d(G(x_n), G(x_{n+1})) \leqslant \gamma d(y_{n-1}, y_n) \leqslant \gamma \alpha^{n-1} d(y_0, y_1).$$

Поэтому и последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, а значит, сходится в полном пространстве X. Пусть $x_n \to x_*$. Отсюда следует, что последовательности элементов графиков $\{(x_n, y_n)\} \subseteq \mathrm{Graph}(F)$, $\{(x_{n+1}, y_n)\} \subseteq \mathrm{Graph}(G)$ сходятся к элементу (x_*, y_*). Так как по условию теоремы график $\mathrm{Graph}(G)$ замкнут, то точка $(x_*, y_*) \in \mathrm{Graph}(G)$. Покажем, что она принадлежит и графику $\mathrm{Graph}(F)$. Для этого оценим расстояние от y_* до $F(x_*)$.

Если для точек (x_n, x_*) выполнено условие $(fz1)$, то

$$d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y_n) + d(y_n, F(x_n)) + H(F(x_n), F(x_*)) \leqslant$$
$$\leqslant d(y_*, y_n) + ad(G(x_n), G(x_*)) \leqslant d(y_*, y_n) + ad(y_{n-1}, y_*),$$

т.е. $d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y_n) + ad(y_{n-1}, y_*)$.

Если для точек (x_n, x_*) выполнено условие $(fz2)$, то

$$d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y_n) + d(y_n, F(x_n)) + H(F(x_n), F(x_*)) \leqslant$$
$$\leqslant d(y_*, y_n) + bd(G(x_n), F(x_n)) + bd(G(x_*), F(x_*)) \leqslant d(y_*, y_n) + bd(y_{n-1}, y_n) + bd(y_*, F(x_*)),$$

т.е. $d(y_*, F(x_*)) \leqslant \frac{1}{1-b}[d(y_*, y_n) + bd(y_{n-1}, y_n)]$.

Если для точек (x_n, x_*) выполнено условие $(fz3)$, то аналогично предыдущему

$$d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y_n) + cd(G(x_n), F(x_*)) + cd(G(x_*), F(x_n)) \leqslant$$

$$\leqslant d(y_*, y_n) + cd(y_{n-1}, F(x_*)) + cd(y_*, y_n) \leqslant d(y_*, y_n) + cd(y_*, y_{n-1}) + cd(y_*, F(x_*)) + cd(y_*, y_n),$$

т.е. $d(y_*, F(x_*)) \leqslant \frac{1}{1-c}[(1+c)d(y_*, y_n) + cd(y_*, y_{n-1})]$.

Таким образом, справедлива следующая общая оценка: $0 \leqslant d(y_*, F(x_*)) \leqslant \mu(n)$, где

$$\mu(n) = \max\{d(y_*, y_n) + ad(y_{n-1}, y_*), \frac{1}{1-b}[d(y_*, y_n) + bd(y_{n-1}, y_n)], \frac{1}{1-c}[(1+c)d(y_*, y_n) + cd(y_*, y_{n-1})]\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Это означает, что во всех трех случаях справедливо включение $y_* \in F(x_*)$. Следовательно, $x_* \in \mathrm{Coin}(F, G)$, и $y_* \in F(x_*) \cap G(x_*)$ — общее значение отображений F, G в точке x_*. $\square$

Замечание 1. Пусть в условиях теоремы 4 образы отображения $F(x)$ компактны для любого $x \in X$. Тогда теорема 4 верна при $q = 1$, поскольку для каждой точки $y_n \in F(x_n)$ в компактном множестве $F(x_{n+1})$ существует точка y_{n+1}, ближайшая к y_n, т.е. $d(y_n, y_{n+1}) = d(y_n, F(x_{n+1})) \leqslant H(F(x_n), F(x_{n+1}))$.

Сравним теперь теорему 4 с теоремой 3.

Предложение 1. *Теорема 3 следует из теоремы 4.*

Доказательство. Пусть $Y = X, G = \mathrm{Id}_X, F : X \to CB(X)$ и для отображения F выполнены все условия теоремы 3 в метрическом пространстве (X, d). Заметим, что в этой ситуации

условие $(\tilde{z}1)$ $\quad H(F(x), F(y)) \leqslant ad(x, y)$ совпадает с условием

$$(fz1) \quad H(F(x), F(y)) \leqslant ad(G(x), G(y));$$

условие $(\tilde{z}2)$ $\quad H(F(x), F(y)) \leqslant b[d(x, F(x)) + d(y, F(y))]$ совпадает с условием

$$(fz2) \quad H(F(x), F(y)) \leqslant b[d(G(x), F(x)) + d(G(y), F(y))];$$

условие $(\tilde{z}3)$ $\quad H(F(x), F(y)) \leqslant c[d(x, F(y)) + d(y, F(x))]$ совпадает с условием

$$(fz3) \quad H(F(x), F(y)) \leqslant c[d(G(x), F(y)) + d(G(y), F(x))].$$

Дополнительное условие $d(x, y) \leqslant \gamma d(G(x), G(y))$ для $\gamma \geqslant 1$ и всех $x, y \in X$, предложенное в теореме 4, превращается в данном случае в очевидное неравенство $d(x, y) \leqslant \gamma d(x, y)$.

Отметим также, что в данной ситуации график $\mathrm{Graph}(G) = \mathrm{Graph}(\mathrm{Id}_X)$ тождественного отображения есть диагональ $\Delta := \{(x, y) \in X \times X | y = x\}$ в прямом произведении $X \times X$ и является замкнутым подмножеством. Условие $F(X) \subseteq G(X)$ превращается в очевидное включение $F(X) \subseteq X$. Итак, из условий теоремы 3 следуют все условия теоремы 4 в описанной ситуации. $\square$

Теперь сравним теоремы 4 и 3 с принципом поиска нулей многозначных (α, β)-поисковых функционалов, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Без ограничения общности (при необходимости заменяя метрику на эквивалентную) можно считать, что $\alpha = 1, 0 \leqslant \lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \beta < 1$. Напомним необходимые определения и формулировку этого принципа (см. [8–10], а также [11, 12]).

Определение 4. Пусть на метрическом пространстве (X, d) задан неотрицательный многозначный функционал $\varphi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$. Говорят, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ является $\{0\}$-*полным*, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n, t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ его элементов, где $t_n \to 0$, сходится и имеет предел $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\varphi)$.

Говорят, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ является $\{0\}$-*замкнутым*, если все его предельные точки вида $(\xi, 0)$ принадлежат этому графику.

Теорема 5 (о нулях $(1, \lambda)$-поискового функционала, см. [8–11]). *Пусть на метрическом пространстве (X, d) задан неотрицательный многозначный функционал $\varphi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$. Пусть функционал φ является $(1, \lambda)$-поисковым, т.е. для некоторого числа $\lambda, 0 \leqslant \lambda < 1$, для любой точки $x \in X$ и любого значения $t \in \varphi(x)$ существуют такая точка $x' \in X$ и такое значение $t' \in \varphi(x')$, что $d(x, x') \leqslant t$, $t' \leqslant \lambda t$. Пусть, кроме того, либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ является $\{0\}$-полным, либо пространство (X, d) полно и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ является $\{0\}$-замкнутым. Тогда начиная из любой пары $(x_0, t_0) \in \mathrm{Graph}(\varphi)$ можно построить последовательность $\{x_n\}_{n=0,1,\ldots}$, сходящуюся к некоторой точке $\xi \in X$, такой, что $0 \in \varphi(\xi)$ и верно неравенство $d(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{t_0}{1-\lambda}$.*

Покажем, что теоремы 3 и 4 представляют частные случаи теоремы 5. Несмотря на то что, как установлено выше, теорема 3 следует из теоремы 4, для большей ясности проведем для этих теорем сравнение с теоремой 5 независимо.

Предложение 2. *Теорема* 3 *является следствием теоремы* 5.

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы 3. Рассмотрим на образе $F(X)$ многозначный функционал $\varphi(y) := \{d(y,y')|y' \in F(y)\}$ (определенный на всем пространстве X). Покажем, что из условий теоремы 3 для отображения F следуют условия теоремы 5 для функционала φ. В самом деле, из условий и доказательства теоремы 3 следует, что для любой точки $(y,t) \in \mathrm{Graph}(\varphi)$, где $t = d(y,y')$ для некоторого $y' \in F(y)$, существует такой элемент $(y',t') \in \mathrm{Graph}(\varphi)$, что расстояние $d(y,y') \leqslant t$ (фактически они равны), и, кроме того, существует точка $y'' \in F(y')$, для которой $t' = d(y',y'') \leqslant \alpha d(y,y') = \alpha t$. Следовательно, функционал φ является $(1,\alpha)$-поисковым.

Пусть задана произвольная фундаментальная (в метрике $D : (X\times\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$, $D((y,t),(y',t')) := d(y,y') + |t-t'|$) последовательность $\{(y_n,t_n)\}_{n=1,2,\ldots} \in \mathrm{Graph}(\varphi)$, где $y_n \in F(X), t_n \to 0$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится в полном пространстве X. Пусть $y_n \to y_* \in X$. Рассмотрим точку $(y_*,0) \in X \times \mathbb{R}_+$ и покажем, что она принадлежит графику $\mathrm{Graph}(\varphi)$ и $y_* \in F(y_*)$. Оценим расстояние $d(y_*,F(y_*))$. Пусть выбраны точки $y'_n \in F(y_n), n = 1,2,\ldots$, такие, что $d(y_n,y'_n) = t_n$. Так как $t_n \to 0$, то очевидно, что последовательность $\{y'_n\}$ также сходится к y_*. Тогда

$$d(y_*,F(y_*)) \leqslant d(y_*,y'_n) + d(y'_n,F(y_*)) \leqslant d(y_*,y'_n) + H(F(y_n),F(y_*)).$$

По условиям теоремы 3 если для пары точек (y_n,y_*) выполнено условие $(\tilde{z}1)$, то

$$d(y_*,F(y_*)) \leqslant d(y_*,y'_n) + ad(y_n,y_*);$$

если для точек (y_n,y_*) выполнено условие $(\tilde{z}2)$, то

$$d(y_*,F(y_*)) \leqslant d(y_*,y'_n) + b[d(y_n,F(y_n)) + d(y_*,F(y_*))] \leqslant d(y_*,y'_n) + b[d(y_n,y'_n) + d(y_*,F(y_*))],$$

откуда получаем $d(y_*,F(y_*)) \leqslant \frac{1}{1-b}[d(y_*,y'_n) + bd(y_n,y'_n)]$, и, наконец, если для (y_n,y_*) выполнено условие $(\tilde{z}3)$, то

$$d(y_*,F(y_*)) \leqslant d(y_*,y'_n) + c[d(y_n,F(y_*)) + d(y_*,F(y_n))] \leqslant d(y_*,y'_n) + c[d(y_n,y_*) + d(y_*,F(y_*)) + d(y_*,y'_n)],$$

откуда заключаем, что $d(y_*,F(y_*)) \leqslant \frac{1}{1-c}[d(y_*,y'_n) + cd(y_n,y_*) + cd(y_*,y'_n)]$. Объединяя неравенства, получаем общую для всех трех случаев оценку: $d(y_*,F(y_*) \leqslant \eta(n)$, где

$$\eta(n) = \max\{d(y_*,y'_n) + ad(y_n,y_*), \frac{1}{1-b}[d(y_*,y'_n) + bd(y_n,y'_n)], \frac{1}{1-c}[d(y_*,y'_n) + cd(y_n,y_*) + cd(y_*,y'_n)]\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда ясно, что $d(y_*,F(y_*)) = 0$. А так как множество $F(y_*)$ замкнуто, то $y_* \in F(y_*)$, т.е. $0 \in \varphi(y_*)$, и, следовательно, график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ на метрическом пространстве $(F(X),d)$ является $\{0\}$-полным. Итак, выполнены все условия теоремы 5. Ясно, что нули функционала φ, т.е. такие точки $\xi \in F(X)$, что $0 \in \varphi(\xi)$, являются неподвижными точками F. □

Рассмотрим теперь вопрос о связи теоремы 4 с теоремой 5. Выясняется, что верно следующее

Предложение 3. *Теорема* 4 *является следствием теоремы* 5.

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы 4. Рассмотрим многозначный функционал $\Psi : F(X) \rightrightarrows \mathbb{R}_+$. Зададим его следующим образом: для любого элемента $y \in F(X)$ положим

$$\Psi(y) := \{d(y,y')|y' \in F(G^{-1}(y))\}.$$

Выбор конкретного значения $t = d(y,y') \in \Psi(y)$ означает выбор конкретной точки y', удовлетворяющей указанным условиям. То есть для любого $y \in F(X)$ и для любого $t \in \Psi(y)$ существует точка y', такая, что $d(y,y') \leqslant t$. Далее, из доказательства теоремы 4 следует, что в силу неравенства (1) существует такая точка $y'' \in F(G^{-1}(y'))$, что $t' = d(y',y'') \leqslant \alpha d(y,y') = \alpha t$. Итак, многозначный функционал Ψ является $(1,\alpha)$-поисковым. Покажем, что его график на $F(X)$ является $\{0\}$-полным. Пусть задана произвольная фундаментальная (по метрике $D : (Y \times \mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$, где $D((y,t),(y',t')) := d(y,y') + |t-t'|$) последовательность его элементов $\{(y_n,t_n)\}$, где $t_n \to 0$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится в полном пространстве Y. Пусть $y_n \to y_* \in Y$.

Выберем теперь для любого $n \in \mathbb{N}$ такую точку $y'_n \in F(G^{-1}(y_n))$, что $t_n = d(y_n, y'_n)$. Тогда так как $t_n \to 0$, то очевидно, что $y'_n \to y_*$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in G^{-1}(y_n)$, такая, что $y'_n \in F(x_n)$. Тогда $y_n \in G(x_n)$. Покажем, что $\{x_n\}$ сходится. Действительно, по условию теоремы 4 $\rho(x_n, x_m) \leqslant \gamma d(G(x_n), G(x_m)) \leqslant \gamma d(y_n, y_m)$. Таким образом, $\{x_n\}$ — фундаментальная в полном пространстве X, следовательно, сходится к некоторому элементу x_*. Поскольку (x_n, y_n) принадлежит $\mathrm{Graph}(G)$, а он замкнут по условию теоремы 4, то (x_*, y_*) принадлежит $\mathrm{Graph}(G)$, а это значит, что $y_* \in G(x_*)$, т.е. $x_* \in G^{-1}(y_*)$.

Покажем, что $y_* \in F(x_*)$, поскольку тогда $y_* \in F(G^{-1}(y_*))$, т.е. $0 \in \Psi(y_*)$ или $(y_*, 0) \in \mathrm{Graph}(\Psi)$. Это будет означать, что $\mathrm{Graph}(\Psi)$ является $\{0\}$-полным.

Итак, оценим расстояние $d(y_*, F(x_*))$. Из условий и доказательства теоремы 4 вытекают следующие оценки:

$$d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y'_n) + d(y'_n, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y'_n) + H(F(x_n), F(x_*)).$$

По условиям теоремы 4 если для пары точек (x_n, x_*) выполнено условие $(fz1)$, то

$$d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y'_n) + ad(G(x_n), G(x_*)) \leqslant d(y_*, y'_n) + ad(y_n, y_*),$$

откуда $d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y'_n) + ad(y_n, y_*)$;

если для точек (x_n, x_*) выполнено условие $(fz2)$, то

$$d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y'_n) + b[d(G(x_n), F(x_n)) + d(G(x_*), F(x_*))] \leqslant$$
$$\leqslant d(y_*, y'_n) + b[d(y_n, y'_n) + d(y_*, F(x_*))],$$

откуда $d(y_*, F(x_*)) \leqslant \frac{1}{1-b}[d(y_*, y'_n) + bd(y_n, y'_n)]$,

и, наконец, если для (x_n, x_*) выполнено условие $(fz3)$, то

$$d(y_*, F(x_*)) \leqslant d(y_*, y'_n) + c[d(G(x_n), F(x_*)) + d(G(x_*), F(x_n))] \leqslant$$
$$\leqslant d(y_*, y'_n) + c[d(y_n, y_*) + d(y_*, F(x_*)) + d(y_*, y'_n)],$$

откуда $d(y_*, F(x_*)) \leqslant \frac{1}{1-c}[(1+c)d(y_*, y'_n) + cd(y_n, y_*)]$.

Объединяя неравенства, получаем общую для всех трех случаев оценку: $d(y_*, F(x_*)) \leqslant \delta(n)$, где

$$\delta(n) = \max\{d(y_*, y'_n) + ad(y_n, y_*), \frac{1}{1-b}[d(y_*, y'_n) + bd(y_n, y'_n)], \frac{1}{1-c}[(1+c)d(y_*, y'_n) + cd(y_n, y_*)]\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда ясно, что $d(y_*, F(x_*)) = 0$. Поскольку образ $F(x_*)$ замкнут по условиям теоремы 4, то $y_* \in F(x_*)$.

Итак, выполнены все условия теоремы 5. Ясно, что нули функционала Ψ, т.е. точки ξ, для которых $0 \in \Psi(\xi)$, удовлетворяют условию $\xi \in F(G^{-1}(\xi))$, а значит, существует точка $z \in G^{-1}(\xi)$, для которой $\xi \in F(z) \cap G(z)$, т.е. $z \in \mathrm{Coin}(F, G)$. $\square$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что в ситуации, когда $X = Y, G = \mathrm{Id}_X, F : X \rightrightarrows X$ и, следовательно, $F(G^{-1}) = F$, условия теоремы 4 превращаются в условия теоремы 3 и доказательство предложения 3 повторяет доказательство предложения 2, в частности функционал Ψ превращается в функционал φ.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zamfirescu T.* Fixed point theorems in metric spaces // Arch. Math. (Basel). 1972. **23**. 292–298.
2. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales // Fund. Math. 1922. **3**. 133–181.
3. *Kannan R.* Some results on fixed points // Bull. Calcutta Math. Soc. 1968. **10**. 71–76.
4. *Chatterjea S.K.* Fixed-point theorems // C.r. Acad. bulgare sci. 1972. **25**. 727–730.
5. *Nadler S.B.* Multi-valued contraction mappings // Notices Amer. Math. Soc. 1967. **14**. 930.
6. *Nadler S.B.* Multi-valued contraction mappings // Pacif. J. Math. 1969. **30**. 475–488.
7. *Neammanee K., Kaevkhao A.* Fixed point theorems of multi-valued Zamfirescu mappings // J. Math. Res. 2010. **2**, N 2. 150–156.

8. *Фоменко Т.Н.* О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств // Матем. заметки. 2009. **86**, № 1. 110–125 (*Fomenko T.N.* Approximation of coincidence points and common fixed points of a collection of mappings of metric spaces // Math. Notes. 2009. **86**, N 1. 107–120).
9. *Фоменко Т.Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Матем. заметки. 2009. **86**, № 2. 304–309 (*Fomenko T. N.* Cascade search of the coincidence set of collections of multivalued mappings // Math. Notes. 2009. **86**, N 1–2. 276–281).
10. *Fomenko T.N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings // Topol. and its Appl. 2010. **157**. 760–773.
11. *Фоменко Т.Н.* Неподвижные точки и совпадения семейств отображений упорядоченных множеств и некоторые метрические следствия // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83**, № 1. 168–191.
12. *Fomenko T.N.* Functionals strictly subjected to convergent series and search for singularities of mappings // J. Fixed Point Theory and Appl. 2013. **14**. 21–40 (DOI: 10.1007/s11784-014-0155-6).
13. *Захарян Ю.Н., Фоменко Т.Н.* Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Докл. РАН. Сер. матем., информатика и проц. упр. 2020. **493**. 13–17.

Поступила в редакцию
18.04.2019