Тогда указанный выше алгоритм умножения матриц порядка $n = 2^{16}$ над кольцом $\mathbb{Z}_p, p = 2^8 + 1$, имеет битовую сложность менее $33n^3 < 10^{16}$, а например, алгоритм [7] имеет битовую сложность больше $7^{16} \cdot m(\lambda(p)) > 10^{16}$.

В случае больших p лучше оценка $O(n^2 M(\lambda(p)))$, полученная в 1993 г. М. И. Гринчуком [14].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 19–01–00294, 18–01–00337.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Warshall S.* A theorem on Boolean matrices // J. ACM. 1962. **9**, N 1. 11–12.
2. *Roy B.* Transitive et connexite // C.r. Acad. sci. 1959. **249**, N 6. 216–218.
3. *Арлазоров В.Л., Диниц Е.А., Кронрод М.А., Фараджев И.А.* Об экономном построении транзитивного замыкания графа // Докл. АН СССР. 1970. **194**, № 3. 487–488.
4. *Фурман М.Е.* О применении метода быстрого умножения матриц в задаче нахождения транзитивного замыкания графа // Докл. АН СССР. 1971. **194**, № 3. 524.
5. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
6. *Savitch W.J.* Relationship between nondeterministic and deterministic tape complexities // J. Comput. and Syst. Sci. 1970. **4**, N 2. 177–192.
7. *Strassen V.* Gaussian elimination is not optimal // Numer. math. 1969. **13**, N 4. 554–556.
8. *Fisher M.J., Meyer A.R.* Boolean matrix multiplication and transitive closure // IEEE 12th Annual Symp. on Switching and Automata Theory. 1971. 129–131.
9. *Гринчук М.И.* Уточнение верхней оценки глубины сумматора и компаратора // Дискрет. анал. и исследование операций. Сер. 1. 2008. **15**, №2. 12–22.
10. *Лупанов О.Б.* О вентильных и контактно-вентильных схемах // Докл. АН СССР. 1956. **111**, № 6. 1171–1174.
11. *Нечипорук Э.И.* О синтезе вентильных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 1963. 37–44.
12. *Коновальцев И.В.* Об одном алгоритме решения линейных уравнений в конечных полях // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. 269–274.
13. *Pippenger N.* On the evaluation powers and monomials // SIAM J. Comput. 1980. **9**, N 2. 230–250.
14. *Гринчук М.И.* О битовой сложности вычисления систем билинейных форм // Методы и системы технической диагоностики: Межвуз. сб. № 18. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1993. 54.

Поступила в редакцию
27 .02.2020

УДК 517.93

СТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ε-ЕМКОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

А. Н. Ветохин[1]

Для семейства неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра, получено описание множества точек полунепрерывности снизу и множества точек полунепрерывности сверху ε-емкости его систем, рассматриваемой как функция параметра. Для множества точек полунепрерывности сверху данное описание является полным в случае, когда параметр принадлежит полному метрическому сепарабельному нульмерному пространству.

Ключевые слова: ε-емкость, неавтономная динамическая система, бэровская классификация функций.

For a family of non-autonomous dynamical systems continuously depending on a parameter, we present descriptions of the set of lower semicontinuity points and the set of upper semicontinuity

---

[1] *Ветохин Александр Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. дифференциальных уравнений мех.-мат. ф-та МГУ; проф. каф. ФН-1 “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: anveto27@yandex.ru.

Vetokhin Aleksandr Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mathematics and Mechanics, Chair of Differential Equations; Professor, Bauman Moscow State Technical University, Chair of Higher Mathematics.

points of the ε-capacity of its systems considered as a function of the parameter. For the set of points of upper semicontinuity, this description is complete if the parameter belongs to a complete metric separable zero-dimensional space.

Key words: ε-capacity, non-autonomous dynamical system, Baire classification of functions.

В качестве меры "массивности" компактного метрического пространства (X, d) А. Н. Колмогоров в статье [1] ввел понятие ε-емкости, которая определяется как максимальное число ε-различимых элементов в X. Используя это понятие, приведем определение топологической энтропии неавтономной динамической системы [2]. Пусть $f \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y))$$

$$(f^{\circ i} \equiv f_i \circ \ldots \circ f_1,\ f^{\circ 0} \equiv \mathrm{id}_X), \quad x, y \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_d(f, \varepsilon, n)$ ε-емкость пространства (X, d_n^f), т.е. максимальное количество точек в X, попарные d_n^f-расстояния между которыми больше ε. Тогда *топологическая энтропия* неавтономной динамической системы $(X,\ f)$ определяется формулой

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n). \tag{1}$$

Отметим, что величина (1) не изменится, если в ее определении метрику d заменить на любую другую, задающую на X ту же, что и d, топологию. Для того чтобы получить классическое определение топологической энтропии автономной динамической системы, следует в качестве последовательности f взять стационарную последовательность $(f, f, \ldots)$.

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и последовательности непрерывных отображений

$$f \equiv (f_1, f_2, \ldots), \quad f_i : \mathcal{M} \times X \to X, \tag{2}$$

образуем функцию

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)). \tag{3}$$

В работе [3] доказано, что при произвольных $\mathcal{M}$, X и для любой последовательности отображений (2) функция (3) принадлежит третьему бэровскому классу. Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве $\mathcal{M}$ называются непрерывные функции и для всякого натурального числа p функциями p-го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса. В статье [4] для $X = [0,\ 1]$ и $\mathcal{M}$ — множества иррациональных чисел (с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой) построена такая последовательность отображений (2), что функция (3) не принадлежит второму бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.

Наряду с топологической энтропией неавтономной динамической системы (1) для произвольного положительного ε рассмотрим ε-емкость неавтономной динамической системы, которая определяется формулой

$$h_d(f, \varepsilon) = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, \varepsilon, n).$$

Эта величина характеризует скорость экспоненциального роста числа отрезков орбит, различимых с точностью ε. Отметим, что ε-емкость неавтономной динамической системы уже зависит от выбора метрики на пространстве X. Рассмотрим функцию

$$\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon). \tag{4}$$

В настоящей работе будем изучать функцию (4) с точки зрения теории Бэра разрывных функций.

Теорема 1. *Для любой последовательности отображений* (2) *функция* (4) *принадлежит второму бэровскому классу, причем ее множество точек полунепрерывности сверху является множеством типа* G_δ, *а множество точек полунепрерывности снизу — множеством типа* $F_{\sigma\delta}$.

Доказательство. В работе [3] установлено, что

$$h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)=\lim_{m\to+\infty}h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon),\quad h_d^1(f(\mu,\cdot),\varepsilon)\geqslant h_d^2(f(\mu,\cdot),\varepsilon)\geqslant\dots, \tag{5}$$

где для любого натурального числа m функция $\mu\mapsto h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$ принадлежит первому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$, а следовательно, для любого положительного ε функция (4) принадлежит второму бэровскому классу.

Обозначим через N_1 множество точек, которые не являются точками полунепрерывности сверху для функции (4). Это множество имеет вид

$$N_1=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\Big(\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}\bigcap(\mathcal{M}\setminus\operatorname{int}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\})\Big), \tag{6}$$

где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, а $\operatorname{int}Z$ — множество внутренних точек множества Z. Действительно, разность $\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}\setminus\operatorname{int}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}$ при любом $r\in\mathbb{Q}$ не содержит точек полунепрерывности сверху функции (4), с другой стороны, если точка μ_0 принадлежит множеству N_1, то найдется такое число $r_0\in\mathbb{Q}$, для которого $\mu_0\in\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r_0\}$ и $\mu_0\notin\operatorname{int}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r_0\}$. Следовательно, имеет место равенство

$$N_1=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\left(\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}\setminus\operatorname{int}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}\right).$$

Из равенства

$$\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}\setminus\operatorname{int}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}=$$
$$=\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}\bigcap(\mathcal{M}\setminus\operatorname{int}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\})$$

получим формулу (6).

В силу (5) для любого $r\in\mathbb{Q}$ множество $\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot))<r\}$ можно представить в виде

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}.$$

Так как функции $\mu\mapsto h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$ принадлежат первому бэровскому классу, то для любого $m\in\mathbb{N}$ множество $\{\mu\in\mathcal{M}:h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)<r\}$ является множеством типа F_σ [5, с. 231], а следовательно, множество точек N_1 — множество типа F_σ. Таким образом, множество точек полунепрерывности сверху функции (4) является множеством типа G_δ.

Обозначим через N_2 множество точек, которые не являются точками полунепрерывности снизу функции (4). Это множество можно записать в виде

$$N_2=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\Big(\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)>r\}\bigcap(\mathcal{M}\setminus\operatorname{int}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)>r\})\Big).$$

Для любого $r\in\mathbb{Q}$ множество $\{\mu\in\mathcal{M}:h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)>r\}$ можно представить следующим образом:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\{\mu\in\mathcal{M}:h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)\geqslant r+\frac{1}{k}\}.$$

Так как функции $\mu\mapsto h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$ принадлежат первому бэровскому классу, то для любых k, $m\in\mathbb{N}$ множество $\{\mu\in\mathcal{M}:h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)\geqslant r+\frac{1}{k}\}$ является множеством типа G_δ, а следовательно, множество точек N_2 — множество типа $G_{\delta\sigma}$. Таким образом, множество точек полунепрерывности снизу функции (2) является множеством типа $F_{\sigma\delta}$. Теорема 1 доказана.

Естественно возникает вопрос об уменьшении номера бэровского класса в теореме 1. Рассмотрим множество Ω_2 двусторонних последовательностей

$$x=(\dots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\dots),\ x_i\in\{0,\,1\},$$

с метрикой

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 2^{-\min\{|i|:\, x_i \neq y_i\}}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

На пространстве Ω_2 введем отображение сдвига влево на один элемент $\sigma_{\Omega_2}(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (x_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$.

Лемма. *Пусть каждый член последовательности отображений $f \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ совпадает с id_{Ω_2} или с σ_{Ω_2}, тогда топологическая энтропия неавтономной динамической системы, порожденной этой последовательностью, удовлетворяет неравенству $h_{\mathrm{top}}(f) \leqslant \ln 2$.*

Доказательство. Для любых p, $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $Q_{p,n}$ элементов $x \in \Omega_2$, таких, что

$$x_i = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = -p, \ldots, n+p; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Множество шаров с центрами из множества $Q_{p,n}$ и радиусом 2^{-p} в пространстве (Ω_2, d_n^f) покрывает все пространство (Ω_2, d_n^f). Величина $N_d(f, 2^{-p+1}, n)$ не превышает количества точек в множестве $Q_{p,n}$, так как в противном случае две точки, расстояние между которыми больше 2^{-p+1}, находились бы в одном шаре радиуса 2^{-p}. Мощность множества $Q_{p,n}$ равна 2^{n+2p+1}, следовательно, получаем

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{p\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, 2^{-p+1}, n) \leqslant \lim_{p\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2p+1}{n} \ln 2 = \ln 2.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{M} = X = \Omega_2$, тогда существует такая последовательность отображений (2), что для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{4}]$ функция (4) не принадлежит первому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Определим последовательность отображений (2) следующим образом:

$$f_k((\ldots, \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \ldots), (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)) = (\ldots, x_{-1+\mu_k}, x_{0+\mu_k}, x_{1+\mu_k}, \ldots), \quad k \in \mathbb{N},\ \mu \in \Omega_2,\ x \in \Omega_2.$$

В силу определения отображение f_k является непрерывным на пространстве $\Omega_2 \times \Omega_2$ для каждого $k \in \mathbb{N}$.

В пространстве Ω_2 зададимся множествами A и B. Отнесем к множеству A все элементы из Ω_2, в записи которых начиная с некоторого номера стоят только единицы, а к множеству B — все элементы из Ω_2, в записи которых начиная с некоторого номера стоят только нули. Очевидно, что каждое из множеств A и B плотно в пространстве Ω_2.

Установим, что $h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon) = \ln 2$ при $\mu \in A$ и $h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon) = 0$ при $\mu \in B$. Пусть p — наибольшее натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{-p} > \varepsilon$. Пусть $\mu \in A$, тогда найдется такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $k > k_0$ выполнено равенство $\mu_k = 1$. Для любого $k > k_0$ рассмотрим множество $Q_{k_0,p,k}$ элементов $x \in \Omega_2$, таких, что

$$f^{\circ k_0}(x) = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = 0, 1, \ldots, k+p-k_0-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как отображение $f^{\circ k_0}$ является гомеоморфизмом, то мощность множества $Q_{k_0,p,k}$ равна 2^{k+p-k_0}. Пусть $a, b \in Q_{k_0,p,k}$, $a \neq b$, и $f^{\circ k_0}(a) = (\ldots, 0, c_0, c_1, \ldots)$, $f^{\circ k_0}(b) = (\ldots, 0, d_0, d_1, \ldots)$, тогда найдется наименьшее $i \in \{0, 1, \ldots, k+p-k_0-1\}$, такое, что $c_0 = d_0, \ldots, c_{i-1} = d_{i-1}, c_i \neq d_i$. Пусть $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$, тогда

$$d_{k_0+i+1}^{f(\mu,\cdot)}(a,b) \geqslant d_{k_0+1}^{f(\mu,\cdot)}(a,b) \geqslant 2^{-p} > \varepsilon,$$

если же $i \in \{p+1, \ldots, k+p-k_0-1\}$, то

$$d_{k_0+i+1}^{f(\mu,\cdot)}(a,b) \geqslant d(f^{\circ(i-p+k_0)}(\mu,a), f^{\circ(i-p+k_0)}(\mu,b)) \geqslant 2^{-p} > \varepsilon.$$

Следовательно, величина $N_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon,k)$ не меньше, чем мощность множества $Q_{k_0,p,k}$, откуда получаем

$$h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \ln N_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon,k) \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{(k+p-k_0)\ln 2}{k} = \ln 2.$$

С другой стороны, из леммы имеем $h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon) \leqslant h_{\mathrm{top}}(f) \leqslant \ln 2$.

Пусть $\mu \in B$, тогда найдется такое наименьшее натуральное число k_0, что для любого $k \geqslant k_0$ выполнено равенство $\mu_k = 0$. Таким образом, для любых $k \geqslant k_0$ и $\mu \in \mathcal{M}$ имеет место равенство $f^{\circ k}(\mu,\cdot) = f^{\circ k_0}(\mu,\cdot)$, следовательно, выполнено равенство $N_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon,k) = N_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon,k_0)$, а значит, ε-емкость последовательности отображений $f(\mu,\cdot)$ равна нулю.

В силу всюду плотности множеств A и B каждая точка пространства Ω_2 является точкой разрыва функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$, поэтому по теореме Бэра о функциях первого класса [5, с. 242] она не принадлежит первому классу Бэра. Теорема 2 доказана.

В случае полноты пространства $\mathcal{M}$ справедлива следующая

Теорема 3. *Если пространство $\mathcal{M}$ является полным, то множество точек полунепрерывности сверху функции* (4) *является всюду плотным множеством типа G_δ.*

Доказательство. Воспользуемся представлением (5). Так как для любого натурального числа m функция $\mu \mapsto h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$ принадлежит первому бэровскому классу на пространстве $\mathcal{M}$, то в силу теоремы Бэра [5, с. 242] множество G_m точек непрерывности каждой функции $\mu \mapsto h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$ является всюду плотным множеством типа G_δ. Пересечение всех G_m снова является всюду плотным множеством типа G_δ, каждая точка которого является точкой непрерывности всех функций $h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$. Пусть $\mu_0 \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} G_m$ и $\delta > 0$, тогда при достаточно большом m будем иметь $h_d^m(f(\mu_0,\cdot),\varepsilon) \leqslant h_d(f(\mu_0,\cdot),\varepsilon) + \delta$. Зафиксировав так m, найдем окрестность $\mathcal{O}(\mu_0)$ точки μ_0, такую, что $h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon) \leqslant h_d^m(f(\mu_0,\cdot),\varepsilon) + \delta$ для всякого $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$. Так как последовательность $(h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon))_{m=1}^\infty$ является невозрастающей, то $h_d^m(f(\mu,\cdot),\varepsilon) \geqslant h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$, поэтому для $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ будем иметь $h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon) \leqslant h_d(f(\mu_0,\cdot),\varepsilon) + 2\delta$. Следовательно, в каждой точке множества $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} G_m$ функция (4) полунепрерывна сверху.

Если функция (4) принимает значение $+\infty$, то предыдущие рассуждения проводим для функции $\mu \mapsto \frac{h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)}{h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)+1}$, у которой множество точек полунепрерывности сверху совпадает с множеством точек полунепрерывности сверху функции (4). Теорема 3 доказана.

Возникает естественный вопрос: всякое ли всюду плотное множество типа G_δ в пространстве $\mathcal{M}$ может быть множеством точек полунепрерывности сверху функции (4)? Далее в работе будет получено полное описание множества точек полунепрерывности сверху функции (4) для любого полного метрического сепарабельного нульмерного пространства $\mathcal{M}$. По определению [6, с. 286] метрическое пространство имеет размерность нуль, если любая его точка имеет сколь угодно малую окрестность, являющуюся одновременно замкнутой и открытой, что равносильно пустоте границы этой окрестности. Одним из примеров такого пространства служит совершенное множество Кантора $\mathcal{K}$ на отрезке $[0,\,1]$ (множество бесконечных троичных дробей $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$, где $a_i \in \{0,\,2\}$) с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой. Так как дополнение к множеству $\mathcal{K}$ всюду плотно на отрезке $[0,\,1]$, то каждую точку множества $\mathcal{K}$ можно заключить в сколь угодно малый интервал с концами из $[0,\,1] \setminus \mathcal{K}$, который имеет пустую границу в множестве $\mathcal{K}$, значит, это пространство является нульмерным метрическим пространством. Полнота пространства $\mathcal{K}$ следует из его замкнутости на отрезке $[0,\,1]$, а сепарабельность — из всюду плотности в $\mathcal{K}$ множества троичных дробей с конечным числом ненулевых троичных знаков после запятой.

В работе [7] для всякого всюду плотного подмножества типа G_δ в полном метрическом сепарабельном нульмерном пространстве $\mathcal{M}$ построена такая стационарная последовательность непрерывных на $\mathcal{M} \times \Omega_2$ функций, что множество точек полунепрерывности снизу топологической энтропии, рассматриваемой как функция параметра, совпадает с данным подмножеством. Для ε-емкости семейства неавтономных динамических систем справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{M}$ — полное метрическое сепарабельное нульмерное пространство и $X = \Omega_2$. Тогда для каждого открытого всюду плотного подмножества G пространства $\mathcal{M}$ существует такая последовательность отображений* (2), *что для любых $\mu \in \mathcal{M}$, $\varepsilon \in (0;\,\frac{1}{4}]$ и $k \in \mathbb{N}$ отображение $x \mapsto f_k(\mu,x)$ является гомеоморфизмом и множество точек полунепрерывности сверху функции* (4) *совпадает с множеством G.*

Доказательство. Для множества G, совпадающего со всем пространством $\mathcal{M}$, рассмотрим стационарную последовательность отображений $f_k(\mu,\cdot) \equiv \mathrm{id}_{\Omega_2}$, $k \in \mathbb{N}$. Так как ε-емкость тождественного отображения равна нулю, каждая точка множества G является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$.

Пусть задано открытое множество G, не совпадающее со всем пространством $\mathcal{M}$. Из сепарабельности и нульмерности пространства $\mathcal{M}$ получаем, что открытое множество G можно представить в виде счетного объединения открыто-замкнутых множеств [6, с. 286]:

$$G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k, \tag{7}$$

причем без ограничения общности можно считать, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $G_k \subset G_{k+1}$. Отметим, что в правую часть формулы (7) должно входить счетное число различных множеств, так как в противном случае, поскольку множества G_k замкнуты, множество G являлось бы замкнутым, а тогда в силу его всюду плотности в пространстве $\mathcal{M}$ совпадало бы со всем пространством $\mathcal{M}$, что по предположению не так. Через χ_k обозначим характеристическую функцию множества G_k. Рассмотрим последовательность отображений $f_k : \mathcal{M} \times \Omega_2 \to \Omega_2$, определяемую формулами

$$f_k(\mu, (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (a_{i+\chi_k(\mu)})_{i\in\mathbb{Z}}, \quad k \in \mathbb{N},\ \mu \in \Omega_2.$$

Поскольку множество G_k является открыто-замкнутым, характеристическая функция χ_k этого множества непрерывна на пространстве $\mathcal{M}$, а следовательно, отображение f_k является непрерывным на $\mathcal{M} \times \Omega_2$.

Пусть $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$, тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\mu \in \mathcal{M} \setminus G_k$, а значит, справедливо равенство $\chi_k(\mu) = 0$, откуда получаем $f_k(\mu, \cdot) \equiv \mathrm{id}_{\Omega_2}$, следовательно,

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = 0. \tag{8}$$

Пусть $\mu \in G$, тогда найдется такое наименьшее натуральное число $k(\mu)$, что для любого $k \geqslant k(\mu)$ выполнено включение $\mu \in G_k$. Таким образом, справедливы равенства

$$\chi_1(\mu) = 0, \ldots, \chi_{k(\mu)-1}(\mu) = 0, \chi_{k(\mu)}(\mu) = 1, \chi_{k(\mu)+1}(\mu) = 1, \ldots .$$

Обозначим через p наибольшее натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{-p} > \varepsilon$. Для любого $k \in \mathbb{N}$, такого, что $k > k(\mu)$, рассмотрим множество $Q_{\mu,p,k}$ элементов x из Ω_2, которые удовлетворяют условию

$$f^{\circ k(\mu)}(\mu, x) = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, \quad a_i = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = 0, 1, \ldots, k + p - k(\mu) - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мощность множества $Q_{\mu,p,k}$ равна $2^{(n+p-k(\mu))}$. Пусть $a, b \in Q_{\mu,p,k}$ и $a \neq b$, тогда найдется число $i_0 \in \{0, 1, \ldots, k+p-k(\mu)-1\}$, такое, что $a_i = b_i$ для $i = 0, \ldots, i_0-1$ и $a_{i_0} \neq b_{i_0}$. Пусть $i_0 \in \{0, 1, \ldots, p\}$, тогда

$$d_k^{f(\mu,\cdot)}(a, b) \geqslant d(a, b) \geqslant 2^{-p} > \varepsilon;$$

если же $i_0 \in \{p + 1, \ldots, k + p - k(\mu) - 1\}$, то

$$d_k^{f(\mu,\cdot)}(a, b) \geqslant d(f^{\circ(i_0-p+k(\mu))}(\mu, a), f^{\circ(i_0-p+k(\mu))}(\mu, b)) \geqslant 2^{-p} > \varepsilon.$$

Следовательно, величина $N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k)$ не меньше, чем мощность множества $Q_{\mu,p,k}$. Таким образом, получаем

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{k} \ln N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, k) \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{(k + p - k(\mu)) \ln 2}{k} = \ln 2. \tag{9}$$

С другой стороны, по лемме имеем $h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \leqslant h_{\mathrm{top}}(f(\mu, \cdot)) \leqslant \ln 2$. Таким образом, каждая точка $\mu \in G$ является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$. Поскольку множество G всюду плотно в пространстве $\mathcal{M}$, в любой окрестности каждой точки $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$ есть точка из множества G, а следовательно, в силу (8) и (9) точка μ не является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon)$.

Пусть множество G является множеством типа G_δ и не является открытым в пространстве $\mathcal{M}$, а следовательно, представимо в виде счетного пересечения открытых множеств:

$$G = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k, \tag{10}$$

где $G_k \supset G_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что в правую часть равенства (10) должно входить счетное число различных открытых множеств, не являющихся замкнутыми в пространстве $\mathcal{M}$, так как в противном случае множество G либо множество $\mathcal{M} \setminus G$ являлось бы открытым, что противоречит всюду плотности множества G. Таким образом, можно считать, что каждое множество G_k открыто и не является замкнутым. Каждое множество G_k представимо в виде счетного объединения открыто-замкнутых множеств: $G_k = \bigcup\limits_{l \in \mathbb{N}} G_{kl}$, причем без ограничения общности можно считать, что для любого $l \in \mathbb{N}$ выполнено включение $G_{kl} \subset G_{kl+1}$. Пусть χ_{kl} — характеристическая функция множества G_{kl}. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathcal{M}$ обозначим через $l_k(\mu)$ наименьшее натуральное число, такое, что $\chi_{kl_k(\mu)}(\mu) = 1$; если такого числа не существует, то считаем $l_k(\mu) = 1$.

По последовательности $\{l_k(\mu)\}_{k=1}^{\infty}$ построим возрастающую последовательность $\{m_k(\mu)\}_{k=0}^{\infty}$, где

$$m_k(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0; \\ 2^k(l_k(\mu) + \sum\limits_{i=0}^{k-1} m_i(\mu)) + 1 & \text{при } k > 0. \end{cases}$$

Положим $s_k(\mu) = \sum\limits_{i=0}^{k} m_i(\mu)$. Пусть $n \in \{s_{k-1}(\mu) + 1, \ldots, s_k(\mu)\}$, $k \in \mathbb{N}$. Определим отображение $f_n : \mathcal{M} \times \Omega_2 \to \Omega_2$ следующим образом:

$$f_n(\mu, (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (a_{i + \chi_{kn - s_{k-1}(\mu)}(\mu)})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Зафиксируем $\mu_0 \in \mathcal{M}$. Поскольку множества G_{qr}, $q = 1, \ldots, k$, $r = 1, \ldots, m_r(\mu_0)$, являются открыто-замкнутыми в пространстве $\mathcal{M}$, то характеристические функции этих множеств постоянны в некоторой окрестности $\mathcal{O}(\mu_0) \subset \mathcal{M}$ точки μ_0, а следовательно, при каждом $\mu \in \mathcal{O}(\mu_0)$ отображение $f_n(\mu, \cdot)$ является или тождественным отображением на пространстве Ω_2, или отображением сдвига влево на один элемент на пространстве Ω_2. Таким образом, отображение f_n является непрерывным в любой точке пространства $\mathcal{M} \times \Omega_2$.

Пусть $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$, тогда найдется такое наименьшее натуральное число $k(\mu)$, что для любого $p \in \mathbb{N}$ имеет место включение $\mu \in \mathcal{M} \setminus G_{k(\mu)p}$, а следовательно, выполнено равенство $\chi_{k(\mu)p}(\mu) = 0$. Для любого $n > s_{k(\mu)-1}(\mu)$ справедливо тождество $f_n(\mu, \cdot) \equiv \mathrm{id}_{\Omega_2}$, из которого получаем

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) = 0. \tag{11}$$

Пусть $\mu \in G$, тогда для любых $k \in \mathbb{N}$ и $n \in \{s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu), \ldots, s_k(\mu)\}$ выполнено равенство $\chi_{kn - s_{k-1}(\mu)}(\mu) = 1$. Обозначим через p наибольшее натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{-p} > \varepsilon$. Рассмотрим множество $Q_{\mu, k, p}$ элементов $x \in \Omega_2$, таких, что

$$f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) - 1)}(\mu, x) = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad y_i = \begin{cases} 0 \text{ или } 1, & \text{если } i = 0, 1, \ldots, m_k(\mu) + p - l_k(\mu) - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как отображение $f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) - 1)}(\mu, \cdot)$ является гомеоморфизмом, то мощность множества $Q_{\mu, k, p}$ равна $2^{m_k(\mu) + p - l_k(\mu)}$. Пусть $a, b \in Q_{\mu, k, p}$, $a \neq b$, и $f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) - 1)}(\mu, a) = (\ldots, 0, c_0, c_1, \ldots)$, $f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) - 1)}(\mu, b) = (\ldots, 0, d_0, d_1, \ldots)$, тогда найдется наименьшее $i \in \{0, 1, \ldots, m_k(\mu) + p - l_k(\mu) - 1\}$, такое, что $c_0 = d_0, \ldots, c_{i-1} = d_{i-1}, c_i \neq d_i$. Пусть $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$, тогда

$$d_{s_k(\mu)}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geqslant d_{s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu)}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geqslant 2^{-p} > \varepsilon;$$

если же $i \in \{p + 1, \ldots, m_k(\mu) + p - l_k(\mu) - 1\}$, то

$$d_{s_k(\mu)}^{f(\mu, \cdot)}(a, b) \geqslant d(f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) + i - p)}(\mu, a), f^{\circ(s_{k-1}(\mu) + l_k(\mu) + i - p)}(\mu, b)) \geqslant 2^{-p} > \varepsilon.$$

Следовательно, величина $N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, s_k(\mu))$ не меньше, чем мощность множества $Q_{\mu, k, p}$, отсюда получаем

$$h_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon) \geqslant \varlimsup_{k \to \infty} \frac{1}{s_k(\mu)} \ln N_d(f(\mu, \cdot), \varepsilon, s_k(\mu)) \geqslant \lim_{k \to \infty} \frac{(m_k(\mu) + p - l_k(\mu)) \ln 2}{s_{k-1}(\mu) + m_k(\mu)} = \ln 2. \tag{12}$$

С другой стороны, по лемме имеем $h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon) \leqslant h_{\text{top}}(f(\mu,\cdot)) \leqslant \ln 2$. Таким образом, каждая точка $\mu \in G$ является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$. Поскольку множество G всюду плотно в пространстве $\mathcal{M}$, в любой окрестности каждой точки $\mu \in \mathcal{M} \setminus G$ есть точка из множества G, а следовательно, в силу (11) и (12) точка μ не является точкой полунепрерывности сверху функции $\mu \mapsto h_d(f(\mu,\cdot),\varepsilon)$. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Асимптотические характеристики вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. 1956. **179**, № 3. 585–589.
2. *Kolyada S., Snoha L.* Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random & Computational Dynamics. 1996. **4**, N 2–3. 205–233.
3. *Ветохин А.Н.* Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Матем. заметки. 2019. **106**, № 3. 341–348.
4. *Ветохин А.Н.* О непринадлежности второму бэровскому классу топологической энтропии одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2020. **56**, № 1. 133–136.
5. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.
6. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
7. *Ветохин А.Н.* О некоторых свойствах топологической энтропии и топологического давления семейств динамических систем, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2019. **55**, № 10. 1319–1327.

Поступила в редакцию
07.02.2020

УДК 515.124, 515.126.4, 512.562

О ТОЧКАХ СОВПАДЕНИЯ ДЛЯ ПАРЫ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТИПА ЗАМФИРЕСКУ

Ю. Н. Захарян[1], Т. Н. Фоменко[2]

Введено понятие пары многозначных отображений типа Замфиреску из одного метрического пространства в другое. Доказана теорема о существовании точек совпадения для таких пар отображений. Показано, что полученный результат является обобщением основной теоремы недавней совместной работы К. Няммани и А. Кевхао (Kritsana Neammanee, Annop Kaevkhao), где введено понятие многозначного отображения Замфиреску метрического пространства в себя и получены теоремы о существовании и аппроксимации неподвижной точки у таких отображений. Кроме того, показано, что все эти результаты являются частными случаями принципа поиска нулей специальных $(1,\lambda)$-поисковых функционалов, предложенного ранее Т. Н. Фоменко.

Ключевые слова: пара отображений типа Замфиреску, точка совпадения, неподвижная точка, поисковый функционал, принцип поиска нулей.

A concept of a pair of multi-valued Zamfirescu type mappings between metric spaces is introduced. A coincidence existence theorem is proved for such pairs of mappings. It is shown that the obtained result is a generalization of the main result of the recent joint work by the authors Kritsana Neammanee and Annop Kaevkhao, in which the concept of a multi-valued

[1] *Захарян Юрий Норикович* — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: yuri.zakharyan@gmail.com.

[2] *Фоменко Татьяна Николаевна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. общей математики ф-та ВМК МГУ, e-mail: tn-fomenko@yandex.ru.

Zakharyan Yuriy Norikovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

Fomenko Tatiana Nikolaevna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Chair of General Mathematics.