Математика

УДК 511.3

О КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММАХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

В. Н. Чубариков[1]

Найдены оценки кратных тригонометрических сумм специального вида, подобные современной оценке дзетовой суммы, что позволяет оценить тригонометрические суммы, скрученные с многомерной функцией делителей, и соответствующие суммы с простыми числами.

Ключевые слова: кратные тригонометрические суммы; характеры Дирихле; тригонометрические суммы, скрученные с многомерной функцией делителей; аналог дзетовых сумм по простым числам; теорема о среднем для кратных тригонометрических сумм.

Estimates of multiple trigonometric sums similar to the modern estimate of the zeta-sum are obtained. This allows us to estimate trigonometric sums twisted with the multivariate divisor function and corresponding sums with primes.

Key words: multiple trigonometric sums; Dirichlet's characters; trigonometric sums twisted with the multivariate divisor function; analogue of the zeta-sum with primes; mean-value theorem for multiple trigonometric sums.

Введение. Цель настоящей статьи — подготовительная работа для оценок сумм по простым числам вида

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\frac{t}{p}};\quad \sum_{p\leqslant N} B_s\left(\left\{\frac{t}{p}\right\}\right);\quad \sum_{p\leqslant N}(p+l)^{it}, l\neq 0;\quad \sum_{p\leqslant N}(p+k)^{it}\chi_q(p+k), k\not\equiv 0 \pmod q,$$

где l, k — целые числа; p пробегает простые числа; $\chi_q(n)$ — характер Дирихле от вычета n по некоторому модулю $q>1$; $B_s(\{x\})$ — функция Бернулли с номером s от дробной части вещественного числа x.

Первые нетривиальные оценки тригонометрических сумм с простыми числами и соответствующие фундаментальные постановки задач в теории простых чисел принадлежат И. М. Виноградову [1].

В основе оценок этих сумм по простым лежат оценки при некоторых $v\geqslant 1$ сумм, скрученных с многомерной функцией делителей числа, имеющих вид

$$\sum_{n\leqslant N}\tau_v(n)e^{2\pi i\frac{t}{n}};\quad \sum_{n\leqslant N}\tau_v(n)B_s\left(\left\{\frac{t}{n}\right\}\right);\quad \sum_{n\leqslant N}\tau_v(n)(n+l)^{it}, l\neq 0;$$

$$\sum_{n\leqslant N}\tau_v(n)(n+k)^{it}\chi_q(n+k), k\not\equiv 0 \pmod q,$$

где $\tau_v(n)$ — многомерная функция делителей числа n, обозначающая число решений уравнения $n_1\ldots n_v=n$ в натуральных числах $n_1,\ldots,n_v$.

Первым шагом здесь являются оценки кратных тригонометрических сумм с равноправными промежутками изменения переменных суммирования

$$M_s<M_s'\leqslant 2M_s, M_1\leqslant M_s\leqslant 2M_1,\ s=1,\ldots,r,$$

[1] *Чубариков Владимир Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф., зав. каф. математических и компьютерных методов анализа мех.-мат. ф-та МГУ; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, e-mail: chubarikov@outlook.com.

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of Chair of Mathematical and Computer Methods of Analysis; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

т.е. сумм вида

$$\sum_{M_1<n_1\leqslant M_1'}\cdots\sum_{M_r<n_r\leqslant M_r'} e^{2\pi i\frac{t}{n_1\ldots n_r}};\quad \sum_{M_1<n_1\leqslant M_1'}\cdots\sum_{M_r<n_r\leqslant M_r'} B_s\left(\left\{\frac{t}{n_1\ldots n_r}\right\}\right);$$

$$\sum_{M_1<n_1\leqslant M_1'}\cdots\sum_{M_r<n_r\leqslant M_r'} (n_1\ldots n_r+l)^{it}, l\neq 0;$$

$$\sum_{M_1<n_1\leqslant M_1'}\cdots\sum_{M_r<n_r\leqslant M_r'} (n_1\ldots n_r+k)^{it}\chi_q(n_1\ldots n_r+k), k\not\equiv 0 \pmod q.$$

Отметим, что полученные здесь результаты подобны теореме И. М. Виноградова для дзетовых сумм [1–3] (см. также [4, 5]).

Настоящая работа продолжает наши исследования по кратным тригонометрическим суммам с простыми числами [6–8].

1. Формулировка основных утверждений.

Теорема 1. *Пусть* $n\geqslant 25, r$ *— натуральные числа,*

$$M_s\leqslant M_s'<2M_s(1\leqslant s\leqslant r), 1<M_1\leqslant M_2,\ldots,M_r\leqslant 2M_1,$$

$$t=M_1^{n-\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

$$S=\sum_{m_1=M_1}^{M_1'}\cdots\sum_{m_r=M_r}^{M_r'} e^{2\pi i F(m_1\ldots m_r)}, F(x)=\frac{t}{x}.$$

Тогда найдется положительная постоянная γ*, такая, что*

$$S\ll M_1\ldots M_r M_1^{-\rho}, \rho=\frac{\gamma}{m_0}, m_0=r\binom{n+r}{r+1}.$$

Теорема 2. *Пусть* $n\geqslant 25, r$ *— натуральные числа,* $k\neq 0$ *— целое,*

$$M_s\leqslant M_s'<2M_s(1\leqslant s\leqslant r), 1\leqslant M_1\leqslant M_2,\ldots,M_r\leqslant 2M_1,$$

$$t=M_1^{n-\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 1,$$

$$T=\sum_{m_1=M_1}^{M_1'}\cdots\sum_{m_r=M_r}^{M_r'} e^{2\pi i t\ln(m_1\ldots m_r+k)}.$$

Тогда найдется положительная постоянная γ*, такая, что*

$$T\ll M_1\ldots M_r M_1^{-\rho}, \rho=\frac{\gamma}{m_0}, m_0=r\binom{n+r}{r+1}.$$

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $\mathbf{P}=(P_1,\ldots,P_r), 1<P_1\leqslant P_2\leqslant\ldots\leqslant P_r$, и пусть $J=J(\mathbf{P};n,k,r)$ обозначает число решений системы диофантовых уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1j}^{t_1}\ldots x_{rj}^{t_r}=0,\quad 0\leqslant t_1+\ldots+t_r\leqslant n,\quad t_1,\ldots,t_r\geqslant 0,$$

где каждое неизвестное значение x_{ij} принимает все целые значения от 1 до P_i, при этом $P_1\to\infty$, а постоянные n,k,r являются натуральными числами. Имеем

$$J=J(\mathbf{P};n,k,r)=\int\cdots\int_{\Omega}|S(\mathbf{A})|^{2k}\,d\mathbf{A},$$

где
$$S(\mathbf{A}) = S(\mathbf{A};\mathbf{P};n,k,r) = \sum_{x_1}^{P_1}\cdots\sum_{x_r=1}^{P_r}\exp\{2\pi i f(x_1,\ldots,x_r)\},$$
причем
$$f(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\cdots+t_r\leqslant n}}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\alpha(t_1,\ldots,t_r)x_1^{t_1}\ldots x_r^{t_r},$$
символ Ω обозначает единичный куб размерности $m = \binom{n+r}{r}$ следующего вида:
$$0\leqslant \alpha(t_1,\ldots,t_r)<1,\quad 0\leqslant t_1,\ldots,t_r,t_1+\ldots+t_r\leqslant n.$$

Лемма [9]. *Пусть $3\leqslant n, 2\leqslant r$ — натуральные числа, $0\leqslant\tau$ — целое число, $m=\binom{n+r}{r}, m_1 = \frac{nrm}{r+1}$, и пусть $k\geqslant m\tau$. Тогда для величины $J = J(\mathbf{P};n,k,r)$ имеем оценку*
$$J\leqslant D(\tau)(P_1\ldots P_r)^{2k}P_1^{-\Delta(\tau)},$$
где
$$\Delta(\tau) = m_0(1-(1-1/n)^\tau),\quad D(\tau) = 2^{nr}(n+1)^n(km^{-1})^{2k}.$$

3. Доказательство теоремы 1. В сумме $S = S(\mathbf{M}), \mathbf{M} = (M_1,\ldots,M_r)$, произведем сдвиги промежутков суммирования по $m_1,\ldots,m_r$ на величины $u_1v_1,\ldots,u_rv_r$. В понятных обозначениях получим
$$S = S(\mathbf{M}) = \sum_{M_1-u_1v_1<m_1\leqslant M_1'-u_1v_1}\cdots\sum_{M_r<m_r\leqslant M_r'} - \sum_{M_1-u_1v_1<m_1\leqslant M_1}\cdots\sum_{M_r<m_r\leqslant M_r} +$$
$$+\sum_{M_1'-u_1v_1<k\leqslant M_1'}\cdots\sum_{M_r<m_r\leqslant M_r'}.$$
Отсюда находим
$$S(\mathbf{M}) = \sum_{M_1<m_1\leqslant M_1'}\cdots\sum_{M_r<m_1\leqslant M_r'}e^{2\pi i F(m_1-u_1v_1,\ldots,m_r-u_rv_r)} + 2\theta(u_1v_1+\ldots+u_rv_r)M_2\ldots M_r, |\theta|\leqslant 1.$$

Возьмем $P = [M_1^{1/3}], 1\leqslant u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r\leqslant P$, и просуммируем предыдущее равенство по переменным $u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r$ в пределах от 1 до P. Имеем
$$|S(\mathbf{M})|\leqslant P^{-2r}\sum_{M_1<m_1\leqslant M_1'}\cdots\sum_{M_r<m_r\leqslant M_r'}|W(\mathbf{m})| + 2rP^{-2r+2}M_2\ldots M_r, \mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_r),$$
где
$$W(\mathbf{m}) = \sum_{u_1=1}^{P}\sum_{v_1=1}^{P}\cdots\sum_{u_r=1}^{P}\sum_{v_r=1}^{P}\exp\left(2\pi i(F(m_1-u_1v_1,\ldots,m_r-u_rv_r)-F(m_1,\ldots,m_r))\right).$$
Положим $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_r), x_s = u_sv_sm_s^{-1}, 1\leqslant s\leqslant r$,
$$F(m_1-m_1x_1,\ldots,m_r-m_rx_r)-F(m_1,\ldots,m_r) = \frac{t}{m_1\ldots m_r}F_1(x_1,\ldots,x_r).$$
Далее разложим функцию
$$F_1(x_1,\ldots,x_r) = (1-x_1)^{-1}\ldots(1-x_r)^{-1}-1$$
по формуле Тейлора до члена с номером $n_0 = 3n$ с остатком в форме Лагранжа. При некотором $0<\theta_1<1$ получим
$$F_1(x_1,\ldots,x_r) = \Phi(x_1,\ldots,x_r)+\Upsilon(x_1,\ldots,x_r),$$

где

$$\Phi(x_1,\dots,x_r)=\sum_{\nu=1}^{n_0}\frac{1}{\nu!}d_{\mathbf{h}}^{\nu}F_1(0,\dots,0)\Bigg|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}}=\sum_{\substack{s_1=0\\ s_1+\ldots+s_r\leqslant n_0}}^{n_0}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_0}x_1^{s_1}\ldots x_r^{s_r},$$

$$\Upsilon(\mathbf{x})=\frac{1}{(n_0+1)!}d_{\mathbf{h}}^{n_0+1}F_1(-\theta_1x_1,\dots,-\theta_1x_r)\Bigg|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}}.$$

Следовательно,

$$W=W(\mathbf{m})=W_1+R,$$

где

$$W_1=\sum_{u_1=1}^{P}\sum_{v_1=1}^{P}\cdots\sum_{u_r=1}^{P}\sum_{v_r=1}^{P}\exp\left(2\pi i\frac{t}{m_1\ldots m_r}\Phi\left(\frac{u_1v_1}{m_1},\dots,\frac{u_rv_r}{m_r}\right)\right)=$$

$$=\sum_{u_1,\ldots u_r=1}^{P}\ \sum_{v_1,\ldots,v_r=1}^{P}\exp 2\pi i G(u_1v_1,\dots,u_rv_r),$$

причем

$$G(u_1v_1,\dots,u_rv_r)=\sum_{\substack{s_1=0\\ s_1+\ldots+s_r\leqslant n_0}}^{n_0}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_0}b(s_1,\dots,s_r)(u_1v_1)^{s_1}\ldots(u_rv_r)^{s_r},$$

$$b(s_1,\dots,s_r)=\frac{t}{m_1^{s_1+1}\ldots m_r^{s_r+1}}.$$

Оценим остаток R. Имеем

$$|R|\leqslant\sum_{u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r=1}^{P}\left|1-\exp\left(2\pi i\frac{t}{m_1\ldots m_r}\Upsilon\left(\frac{u_1v_1}{m_1},\dots,\frac{u_rv_r}{m_r}\right)\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\sum_{u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r=1}^{P}\left|\frac{t}{m_1\ldots m_r}\Upsilon\left(\frac{u_1v_1}{m_1},\dots,\frac{u_rv_r}{m_r}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\sum_{u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r=1}^{P}\left|\frac{t}{m_1\ldots m_r}\right|\cdot\left|\frac{1}{(n_0+1)!}d_{\mathbf{h}}^{n_0+1}F_1\left(-\theta_1\frac{u_1v_1}{m_1},\dots,-\theta_1\frac{u_rv_r}{m_r}\right)\Bigg|_{\mathbf{h}=\mathbf{w}}\right|=R_1,$$

где

$$\mathbf{w}=\left(\frac{u_1v_1}{m_1},\dots,\frac{u_rv_r}{m_r}\right).$$

Далее находим

$$|R_1|\leqslant 2\pi 2^{n_0+1}\frac{|t|}{M_1\ldots M_r}\sum_{u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r=1}^{P}\ \sum_{\substack{s_1=0\\ s_1+\ldots+s_r=n_0+1}}^{n_0+1}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_0+1}\frac{P^{2s_1}}{M_1^{s_1}}\cdots\frac{P^{2s_r}}{M_r^{s_r}}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{n_0+4}\binom{n_0+r}{r-1}P^{2(n_0+r+1)}\frac{|t|}{M_1\ldots M_r}\frac{1}{M_1^{n_0+1}}\leqslant 2^{n_0+4}\binom{n_0+r}{r-1}P^{n}\left(\frac{P^2}{M_1}\right)^{n_0+r+1}.$$

Оценим сумму W_1:

$$|W_1|\leqslant\sum_{u_1=1}^{P}\cdots\sum_{u_r=1}^{P}\left|\sum_{v_1=1}^{P}\cdots\sum_{v_r=1}^{P}\exp\left(2\pi i\frac{t}{m_1\ldots m_r}\Phi\left(\frac{u_1v_1}{m_1},\dots,\frac{u_rv_r}{m_r}\right)\right)\right|.$$

Возведем неравенство для суммы W_1 в степень $2l$, $l = 12m_0 = ml_0$, где

$$m = \binom{n_0 + r}{r}, m_0 = r\binom{n_0 + r + 1}{r + 1} = \frac{rnm}{r + 1},$$

и воспользуемся неравенством Гёльдера. Получим

$$|W_1|^{2l} \leqslant P^{r(2l-1)} \sum_{v_{1,1},\dots,v_{l,r}} \cdots \sum_{v_{2l,1},\dots,v_{2l,r}} T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}),$$

$$T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}) = \left| \sum_{u_1=1}^{P} \cdots \sum_{u_r=1}^{P} \exp\left(2\pi i \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leqslant n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0} b(s_1, \dots, s_r) Y(s_1, \dots, s_r) u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r} \right) \right|,$$

где

$$Y(s_1, \dots, s_r) = v_{1,1}^{s_1} \dots v_{r,1}^{s_r} + \dots + v_{1,l}^{s_1} \dots v_{r,l}^{s_r} - v_{1,l+1}^{s_1} \dots v_{r,l+1}^{s_r} - \dots - v_{1,2l}^{s_1} \dots v_{r,2l}^{s_r},$$
$$0 \leqslant s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leqslant n_0,$$

а символ $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$ обозначает набор произведений чисел вида

$$\{b(s_1, \dots, s_r) Y(s_1, \dots, s_r)\}, 0 \leqslant s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leqslant n_0.$$

Разобьем все точки $\mathbf{Y}$ из $\mathbf{R}^m$ на два класса. К первому классу E_1 отнесем те из них, для которых

$$|T(\mathbf{b}, \mathbf{Y})| \leqslant P^{r-\kappa}.$$

Остальные точки отнесем ко второму классу E_2.

Тогда при $l = ml_0$ имеем

$$|W_1|^{2l} \leqslant P^{r(2l-1)}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = W_{11} + W_{12},$$

$$\Sigma_1 = \sum_{\mathbf{Y} \in E_1} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}), \Sigma_2 = \sum_{\mathbf{Y} \in E_2} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}).$$

Оценим W_{11}. Количество наборов $\mathbf{Y} \in E_1$ не превосходит P^{2lr}. Следовательно,

$$W_{11} = P^{r(2l-1)} \Sigma_1 \leqslant P^{4lr-\kappa}.$$

Оценим теперь W_{12}. Сначала рассмотрим общую сумму вида

$$T(\mathbf{A}) = \left| \sum_{u_1=1}^{P} \cdots \sum_{u_r=1}^{P} \exp\left(2\pi i H(\mathbf{u}, \mathbf{A})\right) \right|, \quad H(\mathbf{u}, \mathbf{A}) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leqslant n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0} \alpha(s_1, \dots, s_r) u_1^{s_1} \dots u_r^{s_r},$$

где

$$\mathbf{A} = \{\alpha(s_1, \dots, s_r)\}, 0 \leqslant s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leqslant n_0.$$

Заметим, что число координат вектора $\mathbf{A}$ равно m :

$$m = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\dots+s_r \leqslant n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0} 1 = \binom{n_0 + r}{r}.$$

Пусть Π обозначает стандартный параллелепипед с длинами сторон

$$d(s_1, \dots, s_r) = (4\pi)^{-1} m^{-1} P^{-s_1-\dots-s_r-\kappa}$$

$$(0 \leqslant s_1, \dots s_r, s_1 + \dots + s_r \leqslant n_0),$$

и пусть найдется точка $\mathbf{A}$ из некоторого параллелепипеда Π, такая, что $|T(\mathbf{A})| > P^{r-\kappa}$. Тогда для любой точки $\mathbf{A}' \in \Pi$ справедлива оценка

$$|T(\mathbf{A}')| > 0,5P^{r-\kappa}.$$

Действительно, имеем

$$|T(\mathbf{A}') - T(\mathbf{A})| \leqslant \sum_{u_1=1}^{P} \cdots \sum_{u_r=1}^{P} \left|1 - e^{2\pi i (H(\mathbf{u},\mathbf{A}) - H(\mathbf{u},\mathbf{A}'))}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{u_1=1}^{P} \cdots \sum_{u_r=1}^{P} \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\ldots+s_r \leqslant n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0} |\alpha(s_1,\ldots,s_r) - \alpha'(s_1,\ldots,s_r)| u_1^{s_1} \ldots u_r^{s_r} < 0,5P^{r-\kappa}.$$

Следовательно,

$$|T(\mathbf{A}')| \geqslant |T(\mathbf{A})| - |T(\mathbf{A}) - T(\mathbf{A}')| > 0,5P^{r-\kappa}.$$

Далее разобьем единичный m-мерный куб Ω на малые параллелепипеды Π и оценим сверху число M тех из них, которые содержат хотя бы одну точку $\mathbf{A}$, такую, что $|T(\mathbf{A})| > P^{r-\kappa}$. Имеем неравенства

$$M\mu(\Pi)(0,5P^{r-\kappa})^{2l} < \int \underset{\Omega}{\cdots} \int |T(\mathbf{A})|^{2l}\, d\alpha \leqslant D(l_0)P^{2lr-\Delta(l_0)},$$

где $\mu(\Pi)$ — объем малого параллелепипеда Π:

$$\mu(\Pi) = (4\pi m)^{-m} \prod_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\ldots+s_r \leqslant n_0}}^{n_0} \cdots \prod_{s_r=0}^{n_0} P^{-(s_1+\ldots+s_r)} = (4\pi m)^{-m} P^{-m_0},$$

$$m_0 = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\ldots+s_r \leqslant n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0} (s_1 + \ldots + s_r) = \sum_{s=1}^{n_0} s \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\ldots+s_r = s}}^{n_0} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0} 1 = \binom{n_0+r}{r+1}.$$

Отсюда находим

$$M < (4\pi m)^m 2^{2l} D(l) P^{2r\kappa + m_0(1-1/n_0)^{l_0}}.$$

Итак, для набора $\mathbf{Y} \in E_2$ справедливы неравенства

$$P^{r-\kappa} < |T(\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\})| \leqslant P^r,$$

и координаты

$$Y(s_1,\ldots,s_r), 0 \leqslant s_1,\ldots,s_r, s_1 + \ldots + s_r \leqslant n_0,$$

вектора $\mathbf{Y}$ принимают целые значения $z(s_1,\ldots,s_r)$, удовлетворяющие условиям

$$|z(s_1,\ldots,s_r)| < lP^{s_1+\ldots+s_r}.$$

Для любого фиксированного набора

$$z(s_1,\ldots,s_r), 0 \leqslant s_1,\ldots,s_r, s_1 + \ldots + s_r \leqslant n_0,$$

число решений системы уравнений

$$Y(s_1,\ldots,s_r) = z(s_1,\ldots,s_r), 0 \leqslant s_1,\ldots,s_r, s_1 + \ldots + s_r \leqslant n_0,$$

не превосходит величины (лемма)

$$V = D(l_0)P^{2lr-\Delta(l_0)},$$

где

$$\Delta(l_0) = r\binom{n_0+r}{r+1} - r\binom{n_0+r}{r+1}(1-1/n_0)^{l_0}, \quad D(l_0) = k^{2ml}4^{mr^2 n_0 l}(n_0 r)^{2n_0 r\Delta(l_0)}.$$

Оценим сверху число I точек

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\} = \{b(s_1, \dots s_r)z(s_1, \dots, s_r\}, 0 \leqslant s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leqslant n_0,$$

попадающих в заданный малый параллелепипед Π с длинами сторон

$$d(s_1, \dots, s_r) = (4\pi m)^{-1} P^{-s_1 - \dots - s_r - \kappa}, 0 \leqslant s_1, \dots, s_r, s_1 + \dots + s_r \leqslant n_0.$$

Оценку будем производить покоординатно. Для этого координаты $\{b(\mathbf{s})z(\mathbf{s})\}$ точки $\mathbf{b}, \mathbf{z}$ разобьем на три совокупности. В первую совокупность войдут те координаты, номера которых удовлетворяют условиям $\frac{3}{2}(n-r) < s_1 + \dots + s_r \leqslant 3(n-r)$; во вторую совокупность — те, для которых $n < s_1 + \dots + s_r \leqslant \frac{3}{2}(n-r) - 2$; и в третью совокупность отнесем все оставшиеся координаты.

Для первой совокупности находим

$$|b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)| \leqslant \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}} l P^{s_1 + \dots + s_r} < 1/2.$$

Следовательно, для координаты с номером $(s_1, \dots, s_r)$ точки $\{\mathbf{b}, \mathbf{z}\}$ при некотором B, отвечающем заданному малому параллелепипеду Π, имеем

$$B < b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r) \leqslant B + d(s_1, \dots, s_r),$$

т.е.

$$B/b(s_1, \dots, s_r) < z(s_1, \dots, s_r) \leqslant (B + d(s_1, \dots, s_r))/b(s_1, \dots, s_r).$$

Так как $z(s_1, \dots, s_r)$ — целое число, то количество значений координаты $b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)$, попавших в промежуток длиной $d(s_1, \dots, s_r)$, не превосходит

$$d(s_1, \dots, s_r)b^{-1}(s_1, \dots, s_r) + 1 \leqslant (2m)^{-1} P^{-(s_1 + \dots + s_r) - \kappa} M_1^{s_1 + \dots + s_r + r - n + 1}.$$

Перейдем к оценке числа элементов второй совокупности. Поскольку для любого набора $(s_1, \dots, s_r)$ из второй совокупности справедливы неравенства

$$|z(s_1, \dots, s_r)| \leqslant l P^{s_1 + \dots + s_r}, d(s_1, \dots, s_r) \leqslant |b(s_1, \dots, s_r| \leqslant \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{r(s_1 + \dots + s_r)}},$$

для значений координат точки $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$ получим

$$|b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)| \leqslant \frac{|t|}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}} l P^{s_1 + \dots + s_r} \leqslant \frac{l|t|P^{s_1 + \dots + s_r}}{2\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}}.$$

Для любого набора $(s_1, \dots, s_r)$ из третьей совокупности число элементов $b(s_1, \dots, s_r)z(s_1, \dots, s_r)$, попавших в промежуток длины $d(s_1, \dots, s_r)$, тривиально не превосходит величины $2lP^{s_1 + \dots + s_r}$.

Отсюда находим, что общее число I точек $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\}$, попавших в заданный малый параллелепипед Π, не превосходит $I \leqslant (2l)^m P^{m_0} \Pi_1 \Pi_2$, где

$$\Pi_1 = \prod_{n < s_1 + \dots + s_r \leqslant \frac{3}{2}(n-r) - 2} \frac{|t|}{4\pi M_1 \dots M_r M_1^{s_1 + \dots + s_r}},$$

$$\Pi_2 = \prod_{\frac{3}{2}(n-r) < s_1 + \dots + s_r \leqslant 3(n-r)} (2m)^{-1} P^{-(s_1 + \dots + s_r) - \kappa} M_1^{s_1 + \dots + s_r + r + 1} |t|^{-1}.$$

Оценим теперь величины Π_1 и Π_2. Имеем

$$\Pi_1 \leqslant (|t| M_1^{-r})^{m([1{,}5(n-r) - 2)] - m(n)} M_1^{m_0([1{,}5(n-r)] - 2) - m_0(n)} = P^{\Delta_1},$$

$$\Pi_2 \leqslant (M_1^r |t|^{-1} P^{-\kappa})^{m(3(n-r)) - m([1{,}5(n-r)])} (M_1 P^{-2})^{m_0(3(n-r)) - m_0([1{,}5(n-r)])} = P^{\Delta_2},$$

где $m(n) = \binom{n+r}{r}$ и $m_0(n) = r\binom{n+r}{r+1}$.

Далее получим

$$\Delta_1 = 3(n-r)\left(\binom{[1,5(n-r)]+r-2}{r} - \binom{n+r}{r}\right) -$$

$$-3r\left(\binom{[1,5(n-r)]+r-2}{r} - \binom{n+r}{r}\right),$$

$$\Delta_2 = (3r-3n+3-\kappa)\left(\binom{3(n-r)+r}{r} - \binom{[1,5(n-r)]+r}{r}\right) +$$

$$+r\left(\binom{3(n-r)+r}{r+1} - \binom{[1,5(n-r)]+r}{r+1}\right).$$

Наконец, находим

$$\Delta_1 = \binom{[1,5(n-r)]+r-2}{r}\left(3(n-r) - \frac{r}{r+1}([1,5(n-r)]-2)\right) +$$

$$+\binom{n+r}{r}\left(\frac{r(n-1)}{r+1} - 3(n-r)\right) \leqslant 1,5(n-r)\binom{[1,5(n-r)]+r-2}{r},$$

$$\Delta_2 = \binom{3(n-r)+r}{r}\left(\frac{3r(n-r)}{r+1} - 3(n-r) + 3 - \kappa\right) +$$

$$+\binom{[1,5(n-r)]+r}{r}\left(\frac{r[1,5(n-r)]}{r+1} - [1,5(n-r)] + 3 - \kappa\right) \geqslant -\frac{3(n-r)}{2(r+1)}\binom{3n-2r}{r}.$$

Следовательно,

$$I \leqslant (2l)^m P^{m_0} P^{-\frac{(n-r)}{2(r+1)}\binom{3n-2r}{r}}.$$

Таким образом,

$$W_{12} \leqslant P^{r(2l-1)}\Sigma_2 \leqslant VIMP^{2lr} \leqslant (4\pi m)^n 2^{2l}(2l)^m D^2(l_0) P^{4lr-\Delta_0},$$

где

$$\Delta_0 = \frac{(n-r)}{(r+1)}\binom{3n-2r}{r} - 2r\kappa - 2m_0\left(1-\frac{1}{n}\right)^{l_0}, \frac{(n-r)}{(r+1)}\binom{3n-2r}{r} = \frac{1}{3}\binom{3n-2r}{r+1}.$$

Покажем, что $\Delta_0 \geqslant 4l\kappa$. Имеем

$$\frac{1}{6}\binom{3n-2r}{r+1} \geqslant 8ml_0\kappa, m_0(1-\frac{1}{n_0})^{l_0} \leqslant ml_0\kappa, r\kappa \leqslant ml_0\kappa.$$

Собирая вместе найденные выше оценки W_{11} и W_{12}, получим утверждение теоремы 1.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть $r \geqslant 1, l \neq 0$ — произвольные натуральные числа, $1 < M_1 \leqslant M_2 \leqslant \cdots \leqslant M_r \leqslant 2M_1$. Рассмотрим тригонометрическую сумму вида

$$T = \sum_{m_1=M_1}^{M_1'} \cdots \sum_{m_r=M_r}^{M_r'} e^{2\pi it\ln(m_1\ldots m_r+l)}.$$

В сумме T произведем сдвиг промежутков суммирования на $u_s v_s, 1 \leqslant s \leqslant r$, а затем по этим переменным просуммируем в пределах от 1 до $P = [M_1^{1/3}]$. Получим

$$T = P^{-2r}W + 2r\theta P^2 M_2 \ldots M_r, |\theta| \leqslant 1,$$

$$W = \sum_{u_1,v_1=1}^{P} \cdots \sum_{u_r,v_r=1}^{P} \sum_{m_1=M_1}^{M_1'} \cdots \sum_{m_r=M_r}^{M_r'} e^{2\pi it\ln((m_1-u_1v_1)\ldots(m_1-u_1v_1)+l)} = \sum_{\mathbf{m}} W(\mathbf{m}).$$

Положим $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r), x_s = u_s v_s m_s^{-1}, 1 \leqslant s \leqslant r$. Имеем

$$\ln\left((m_1 - m_1 x_1)\ldots(m_r - m_r x_r) + l\right) - \ln\left(m_1 \ldots m_r + l\right) =$$

$$= \ln\left((1-x_1)\ldots(1-x_r) + \frac{l}{m_1\ldots m_r}\right) - \ln\left(1 + \frac{l}{m_1\ldots m_r}\right) = F(x_1,\ldots,x_r) = F(\mathbf{x}).$$

Далее разложим функцию $F(\mathbf{x})$ по формуле Тейлора до члена с номером $n_0 = 3n$ с остатком в форме Лагранжа. При некотором $0 < \theta_1 < 1$ получим

$$F(x_1,\ldots,x_r) = \Phi(x_1,\ldots,x_r) + \Upsilon(x_1,\ldots,x_r),$$

где

$$\Phi(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{\nu=1}^{n_0} \frac{1}{\nu!} d_{\mathbf{h}}^{\nu} F(0,\ldots,0)\Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}} = \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\ldots+s_r\leqslant n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1,\ldots,s_r) x_1^{s_1}\ldots x_r^{s_r}.$$

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n_0+1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F(-\theta_1 x_1,\ldots,-\theta_1 x_r)\Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{x}}.$$

Следовательно,

$$W(\mathbf{m}) = W_1 + R,$$

где

$$W_1 = \sum_{u_1=1}^{P}\sum_{v_1=1}^{P}\cdots\sum_{u_r=1}^{P}\sum_{v_r=1}^{P} \exp\left(2\pi i t \Phi\left(\frac{u_1 v_1}{m_1},\ldots,\frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right) =$$

$$= \sum_{u_1,\ldots,u_r=1}^{P}\ \sum_{v_1,\ldots,v_r=1}^{P} \exp 2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1,\ldots,u_r v_r),$$

причем

$$G_{\mathbf{m}}(u_1 v_1,\ldots,u_r v_r) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ 1\leqslant s_1+\ldots+s_r\leqslant n_0}}^{n_0} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0} \beta(s_1,\ldots,s_r)(u_1 v_1)^{s_1}\ldots(u_r v_r)^{s_r},$$

$$\beta(s_1,\ldots,s_r) = \frac{1}{\bar{s}_1\ldots\bar{s}_r (m_1)^{s_1}\ldots(m_r)^{s_r}}\left(\frac{1}{1+\omega}\right)^{s_1+\ldots+s_r}, \omega = \frac{l}{m_1\ldots m_r}, \bar{s} = \max(1; s),$$
$$0 \leqslant s_1,\ldots,s_r, 1 \leqslant s_1+\ldots+s_r \leqslant n_0.$$

Оценим остаток R. Имеем

$$|R| \leqslant \sum_{u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r=1}^{P} \left|1 - \exp\left(2\pi i t \Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1},\ldots,\frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi|t| \sum_{u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r=1}^{P} \left|\Upsilon\left(\frac{u_1 v_1}{m_1},\ldots,\frac{u_r v_r}{m_r}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r=1}^{P} \left|\frac{t}{m_1\ldots m_r}\right| \cdot \left|\frac{1}{(n_0+1)!} d_{\mathbf{h}}^{n_0+1} F\left(-\theta_1\frac{u_1 v_1}{m_1},\ldots,-\theta_1\frac{u_r v_r}{m_r}\right)\Big|_{\mathbf{h}=\mathbf{w}}\right| = R_1,$$

где

$$\mathbf{w} = \left(\frac{u_1 v_1}{m_1},\ldots,\frac{u_r v_r}{m_r}\right).$$

Далее находим

$$|R_1| \leqslant 2\pi 2^{n_0+1}|t| \sum_{u_1,v_1,\ldots,u_r,v_r=1}^{P}\ \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_1+\ldots+s_r=n_0+1}}^{n_0+1} \cdots \sum_{s_r=0}^{n_0+1} \frac{P^{2s_1}}{M_1^{s_1}}\cdots\frac{P^{2s_r}}{M_r^{s_r}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{n_0+4}\binom{n_0+r}{r-1}P^{2(n_0+r+1)}|t|\frac{1}{M_1^{n_0+1}} \leqslant 2^{n_0+4}\binom{n_0+r}{r-1}P^{n}\left(\frac{P^2}{M_1}\right)^{n_0+r+1}.$$

Преобразуем сумму W_1:

$$W_1 = \sum_{u_1,\dots u_r=1}^{P}\sum_{v_1,\dots,v_r=1}^{P}\exp\left(2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1v_1,\dots,u_rv_r)\right),$$

Используя неравенство Гёльдера, получим

$$|W_1|^{2k} \leqslant P^{r(2k-1)}W_2,$$

$$W_2 = \sum_{u_1=1}^{P}\cdots\sum_{u_r=1}^{P}\left|\sum_{v_1=1}^{P}\cdots\sum_{v_r=1}^{P}e^{2\pi i t G_{\mathbf{m}}(u_1v_1,\dots,u_rv_r)}\right|^{2k}.$$

Далее будем иметь

$$W_2 \leqslant \sum_{\mathbf{v_1},\dots,\mathbf{v_{2k}}}\left|\sum_{u_1,\dots,u_r=1}^{P}e^{2\pi i t(G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u},\mathbf{v_1})-\dots-G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u},\mathbf{v_{2k}}))}\right| =$$

$$= \sum_{\Lambda}J(P;r,n,k,\Lambda)\left|\sum_{u_1,\dots u_r=1}^{P}e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u},\Lambda)}\right| = W_3,$$

$$G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u},\Lambda) = \sum_{s_1=0}^{n_0}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_0}\beta(s_1,\dots,s_r)u_1^{s_1}\dots u_r^{s_r}\lambda(s_1,\dots,s_r),$$

$$\lambda(s_1,\dots,s_r) = \sum_{j=1}^{2k}(-1)^j v_{1,j}^{s_1}\dots v_{r,j}^{s_r}, 0 \leqslant s_1,\dots s_r, 1 \leqslant s_1+\ldots+s_r \leqslant n_0.$$

Вновь используя неравенство Гёльдера, приходим к оценке

$$|W_3|^{2k} \leqslant \left(\sum_{\Lambda}J(P;r,n,k,\Lambda)\right)^{2k-1}\sum_{\Lambda}J(P;r,n,k,\Lambda)\left|\sum_{u_1,\dots,u_r=1}^{P}e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u},\Lambda)}\right|^{2k} \leqslant$$

$$\leqslant P^{2kr(2k-1)}J(P;r,n,k)\sum_{\Lambda}\left|\sum_{u_1,\dots,u_r=1}^{P}e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(\mathbf{u},\Lambda)}\right|^{2k_2} = P^{2kr(2k-1)}J(P;r,n,k)W_4.$$

Собирая вместе соответствующие слагаемые в W_3, получим

$$W_4 \leqslant J(P;r,n,k)\sum_{M}\left|\sum_{\Lambda}e^{2\pi i G_{\mathbf{m}}(M,\Lambda)}\right| = J(P;r,n,k)W_5,$$

$$G_{\mathbf{m}}(M,\Lambda) = \sum_{\substack{s_1=0 \\ 1\leqslant s_1+\ldots+s_r\leqslant n_0}}^{n_0}\cdots\sum_{s_r=0}^{n_0}\beta(s_1,\dots,s_r)\lambda(s_1,\dots,s_r)\mu(s_1,\dots,s_r).$$

Оценим W_5. Суммируя прогрессии по Λ, находим ($\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_r)$)

$$W_5 \leqslant \prod_{\substack{s_1,\dots,s_r\geqslant 0 \\ 1\leqslant s_1+\ldots+s_r\leqslant n_0}}\ \sum_{|\mu(s_1,\dots,s_r)|<kP^{s_1+\ldots+s_r}}\min\left(2k_1P^{s_1+\ldots+s_r}, \frac{1}{2\|\beta(\mathbf{s})\mu(\mathbf{s})\|}\right) = W_6.$$

Далее воспользуемся следующим простым утверждением.

Утверждение. *Пусть* $\beta = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, q \geqslant 1, (a, q) = 1, |\theta| \leqslant 1$. *Тогда при любом* γ *и* $U > 0, Q \geqslant 1$ *имеем*

$$\sum_{x=1}^{Q} \min\left(U, \frac{1}{\|\beta x + \gamma\|}\right) \leqslant 6\left(\frac{Q}{q} + 1\right)(U + q\ln q),$$

где $\|\alpha\|$ *обозначает расстояние от числа* α *до ближайшего целого.*

Для этого при $0,5n_0 \leqslant s_1 + \ldots + s_r \leqslant n_0 - 4$ представим $\beta(\mathbf{s}) = \beta(s_1, \ldots, s_r)$ в виде

$$\beta(\mathbf{s}) = \frac{a(\mathbf{s})}{q(\mathbf{s})} + \frac{\theta(\mathbf{s})}{q(\mathbf{s})^2}, (a(\mathbf{s}), q(\mathbf{s})) = 1, |\theta(\mathbf{s})| \leqslant 1,$$

где $a(\mathbf{s}) = 1, q(\mathbf{s}) = \left[\bar{s_1} \ldots \bar{s_r}(1+\omega)^{s_1+\ldots+s_r} m_1^{s_1} \ldots m_r^{s_r} |t|^{-1}\right]$.

Получим

$$\sum_{|\mu(s_1,\ldots,s_r)| < kP^{s_1+\ldots+s_r}} \min\left(2k_1 P^{s_1+\ldots+s_r}, \frac{1}{2\|\beta(\mathbf{s})\mu(\mathbf{s})\|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 6\left(\frac{2kP^{s_1+\ldots+s_r}}{q(\mathbf{s})} + 1\right)\left(2kP^{s_1+\ldots+s_r} + q(\mathbf{s})\ln q(\mathbf{s})\right) \leqslant$$

$$\leqslant 24k^2 P^{2(s_1+\ldots+s_r)}\left(\frac{1}{q(\mathbf{s})} + \frac{1}{P^{s_1+\ldots+s_r}} + \frac{q(\mathbf{s})}{P^{2(s_1+\ldots+s_r)}}\right)\ln q(\mathbf{s}).$$

Таким образом,

$$W_6 \leqslant (24k^2)^m P^{2m_1} \prod_{\substack{s_1,\ldots,s_r \geqslant 0 \\ 0,5n_0 \leqslant s_1+\ldots+s_r \leqslant n_0-4}} \left(\frac{1}{q(\mathbf{s})} + \frac{1}{P^{s_1+\ldots+s_r}} + \frac{q(\mathbf{s})}{P^{2(s_1+\ldots+s_r)}}\right)(\ln(q(\mathbf{s})))^m.$$

Далее, выбирая $k = 12m_0 = ml_0$ и применяя лемму, приходим к оценке

$$|S| \ll M_1 \ldots M_r M_1^{1-\rho}, \rho = \frac{\gamma}{m_0},$$

где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное. М.: Физматлит, 1980.
2. *Виноградов И.М.* Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. **22**, № 2. 161–164.
3. *Виноградов И.М.* К вопросу об оценке тригонометрических сумм // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. **29**, № 3. 493–504.
4. *Коробов Н.М.* Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Успехи матем. наук. 1958. **13**, № 4. 185–192.
5. *Walfisz A.* Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der WissenSchaften, 1963.
6. *Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н.* Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
7. *Чубариков В.Н.* Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР. 1984. **278**, № 2. 302–304.
8. *Чубариков В.Н.* Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. **49**, № 5. 1031–1067.
9. *Чубариков В.Н.* Об одной теореме о среднем значении кратных тригонометрических сумм // Чебышёвский сборник. 2020. **20**, № 1. 305–319.

Поступила в редакцию
27.12.2019