

3. *Krupski V.N.* On the sharpness and the single-conclusion property of basic justification models // Logical foundations of computer science: Int. Symp. LFCS 2018 / Ed. by S. Artemov, A. Nerode. Lect. Notes Comput. Sci. Vol. 10703. Cham: Springer, 2018. 211–220.
4. *Artemov S.* Explicit provability and constructive semantics // Bull. Symbol. Log. 2001. **7**, N 1. 1–36.
5. *Fitting M.* Modal logics, justification logics, and realization // Ann. Pure and Appl. Log. 2016. **167**. 615–648.
6. *Artemov S.* The logic of justification // Rev. Symbol. Log. 2008. **1**, N 4. 477–513.

Поступила в редакцию  
27.02.2019

УДК 532.5.031

## К ЗАДАЧЕ О ВЗРЫВЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ШНУРОВОГО ЗАРЯДА

С. Л. Толоконников<sup>1</sup>

В твердожидкостной импульсной постановке исследована задача о взрыве на поверхности грунта шнурового заряда в случае, когда примыкающие к заряду прямолинейные участки свободной поверхности грунта наклонены к плоскости заряда под некоторыми углами. Построено точное решение задачи, проведен параметрический анализ. Представлены расчеты формы воронки выброса для различных значений определяющих параметров задачи.

*Ключевые слова:* взрыв, воронка выброса, идеальная несжимаемая жидкость, импульсная постановка.

The problem of an explosion of a line charge on the surface of the ground is investigated within the solid-liquid formulation of the pulse-hydrodynamic model. The free rectilinear parts of the ground that are adjacent to the line charge are supposed to be inclined to the plane of the charge at certain angles. The exact solution to the problem is constructed. A parametric analysis is performed. The calculated profiles of the explosion crater are presented for some governing parameters of the problem.

*Key words:* explosion, ejection crater, ideal incompressible fluid, pulse-hydrodynamic model.

Одной из известных математических моделей взрыва в грунте является предложенная академиком М.А. Лаврентьевым твердожидкостная модель [1], в которой грунт полагается идеальной несжимаемой жидкостью, а воздействие взрыва описывается заданным импульсом давления продуктов взрыва на среду. Считается также, что в области, где возникает движение грунта при взрыве, скорость больше некоторого критического значения  $v_0$ . При этом границей воронки выброса, отделяющей вовлеченный в движение грунт от твердого, является поверхность с постоянным значением модуля скорости, равным  $v_0$ . В случае, когда заряд является шнуровым и имеет значительную протяженность, задача может быть рассмотрена как плоская. В такой постановке имеется математическая аналогия с задачами о стационарных струйных и кавитационных плоскопараллельных течениях идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии сил тяжести и поверхностного натяжения, что позволяет при решении задач о взрыве использовать эффективные методы теории струй, в частности метод особых точек С.А. Чаплыгина.

Решения ряда задач о взрыве в грунте поверхностных или заглубленных шнуровых зарядов получены, например, в [2–9].

В настоящей работе рассматривается задача о взрыве на поверхности грунта плоского шнурового заряда шириной  $2l$  в случае, когда примыкающие к заряду прямолинейные участки свободной поверхности грунта наклонены к плоскости заряда под некоторыми углами  $\pi\alpha$ ,  $\pi\beta$ . Решение задачи для  $\alpha = \beta = 0$  получено в [5].

<sup>1</sup> *Толоконников Сергей Львович* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: tolsl@mech.math.msu.su.

*Tolokonnikov Sergey Lvovich* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.

Схема течения в физической плоскости  $z = x + iy$  показана на рис. 1, *a*. На участке области течения  $BAD$ , соответствующем заряду, задано постоянное значение потенциала  $\varphi = -\varphi_0 = -p_t/\rho$ , где  $p_t$  — импульс давления,  $\rho$  — плотность. На линии тока  $ECF$  модуль скорости постоянен и равен некоторому критическому значению  $v_0$ . Эта линия принимается границей воронки выброса, ее форма заранее неизвестна и определяется в процессе решения задачи. На участках свободной поверхности грунта  $BE$  и  $DF$  значение потенциала  $\varphi = 0$ . Точка  $A$ , расположенная на заряде  $BD$ , принадлежит разветвляющейся в точке  $C$  линии тока, содержащей линию  $ECF$  с постоянным модулем скорости.

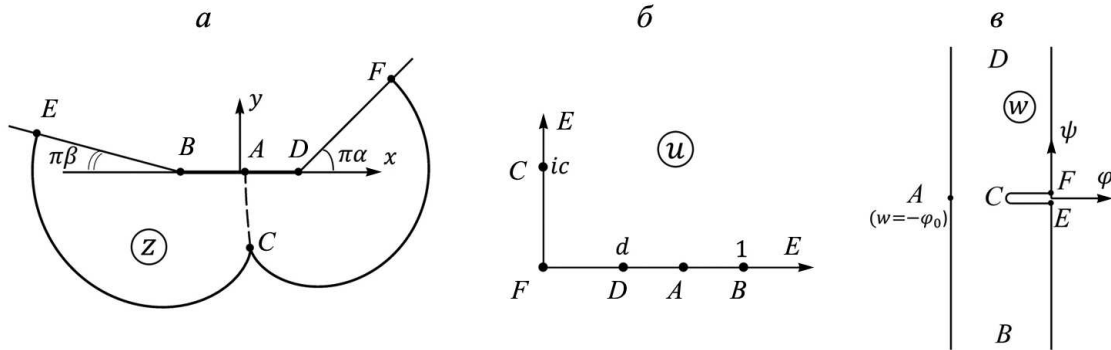


Рис. 1. Схема течения (*a*), параметрическая область (*б*) и область изменения комплексного потенциала (*в*)

Очевидно, что при  $\alpha = \beta$  задача обладает плоскостной симметрией, в ином случае симметрия отсутствует. Будем полагать  $\alpha, \beta \in [-1/2, 1/2]$ .

Решение задачи строится отображением областей изменения комплексного потенциала  $w = \varphi + i\psi$  и комплексной скорости  $dw/dz$  течения на область изменения вспомогательного параметрического переменного  $u$ , в качестве которой выбирается правый верхний квадрант (рис. 1, *б*). Областью изменения комплексного потенциала является полоса с вырезом (рис. 1, *в*).

Для построения отображения  $dw/du(u)$  проанализируем его особенности в параметрической области. При обходе точки  $C (u = ic)$  по бесконечно малой полуокружности увеличению  $\arg(u - ic)$  на  $\pi$  соответствует увеличение  $\arg(w - w(ic))$  на  $2\pi$ , откуда следует, что функция  $dw/du(u)$  имеет в этой точке нуль первого порядка. В точках  $D (u = d)$  и  $B (u = 1)$  функция  $w(u)$  имеет логарифмические особенности, а  $dw/du(u)$  — простые полюсы.

При аналитическом продолжении  $dw/du(u)$  на всю плоскость  $u$  согласно принципу симметрии [10] добавляются простые полюсы в точках  $u = -d, u = -1$  и простой нуль в точке  $u = -ic$ . Следовательно,

$$\frac{dw}{du} = N \frac{(u - ic)(u + ic)}{(u - d)(u + d)(u - 1)(u + 1)}, \tag{1}$$

где  $N$  — некоторая постоянная.

Интегрируя (1) по бесконечно малой полуокружности вокруг точек  $u = 1$ , находим

$$N = \varphi_0 \frac{2d(1 - d^2)}{\pi(1 + c^2)} i. \tag{2}$$

Аналогичное интегрирование вокруг  $u = d$  дает

$$N = \varphi_0 \frac{2d(1 - d^2)}{\pi(d^2 + c^2)} i. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), находим  $c^2 = d, N = \frac{2(1 - d)}{\pi} \varphi_0 i$ .

Перейдем к построению отображения  $dw/dz(u)$ . При обходе точки  $D (u = d)$  увеличению  $\arg(u - d)$  на  $\pi$  соответствует уменьшение  $\arg(dw/dz)$  на  $\pi + \pi\alpha$ . Следовательно,  $dw/dz(u)$  в точке  $u = d$  имеет особенность вида  $(u - d)^{-\alpha-1}$ . Аналогично устанавливается, что в точке  $B (u = 1)$  имеется особенность вида  $(u - 1)^{-\beta-1}$ . При аналитическом продолжении на всю плоскость  $u$  добавляются в точках  $u = -d$  и  $u = -1$  особенности  $(u + d)^{1+\alpha}$  и  $(u + 1)^\beta$  соответственно. Таким образом,

$$\frac{dw}{dz} = M \frac{(u + 1)^{1+\beta}(u + d)^{1+\alpha}}{(u - 1)^{1+\beta}(u - d)^{1+\alpha}}, \tag{4}$$

где  $M$  — некоторая константа.

Известно, что в точке  $F$  ( $u = 0$ ) значение комплексной скорости равно  $-iv_0e^{-i\pi\alpha}$ . С другой стороны, из (4) следует  $dw/dz(0) = Me^{-i\pi(\alpha+\beta)}$ . Таким образом,  $M = -iv_0e^{-i\pi\beta}$ .

С помощью (1), (4) находим

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\varphi_0}{v_0} \frac{2(1-d)}{\pi} e^{-i\pi\beta} \frac{(u^2+d)(u-1)^\beta(u-d)^\alpha}{(u+1)^{2+\beta}(u+d)^{2+\alpha}}. \tag{5}$$

Условие  $\int_d^1 \frac{dz}{du}(u) du = -2l$  с использованием (5) записывается в следующем виде:

$$k = \frac{lv_0}{\varphi_0} = \frac{J(d)}{\pi}, \quad \text{где} \quad J(d) = (1-d) \int_d^1 \frac{(u^2+d)(1-u)^\beta(u-d)^\alpha}{(u+1)^{2+\beta}(u+d)^{2+\alpha}} du. \tag{6}$$

С учетом (6) из соотношения (5) находим

$$\frac{1}{l} \frac{dz}{du} = -\frac{2(1-d)}{J(d)} e^{-i\pi\beta} \frac{(u^2+d)(u-1)^\beta(u-d)^\alpha}{(u+1)^{2+\beta}(u+d)^{2+\alpha}}. \tag{7}$$

После отыскания значения параметра  $d$  все интересующие геометрические и физические характеристики течения можно вычислить, используя формулы (4) и (7). В частности, с помощью (7) определяется форма границы  $ECF$  воронки выброса.

Функция  $J(d)$ , определенная на интервале  $a \in (0, 1)$ , является монотонно убывающей, ее область значений — интервал  $\left(0, \frac{1}{2(1+\alpha)} + \frac{1}{2(1+\beta)}\right)$ . Таким образом, для каждого значения безразмерного параметра  $0 < k < k_m$ , где  $k_m = \frac{2+\alpha+\beta}{2\pi(1+\alpha)(1+\beta)}$ , из (6) находится единственное соответствующее значение  $d \in (0, 1)$ .

На рис. 2, а показаны полученные путем расчета формы границ воронки выброса при  $\alpha = 1/12$ ,  $\beta = 1/4$  и различных значениях  $k$ . Уменьшение параметра  $k$ , которое можно трактовать как усиление импульсного воздействия заряда, приводит к увеличению размеров воронки. При стремлении  $k$  к нулю размеры воронки неограниченно возрастают. В другом предельном случае  $k \rightarrow k_m$  расстояние между точками  $C$  и  $A$  стремится к нулю, а форма границ  $CE$  и  $CF$  воронки оказывается близкой к дугам окружностей с центрами в точках  $E$  и  $F$  и радиусами  $l_1^*$  и  $l_2^* = 2l - l_1^*$  соответственно.

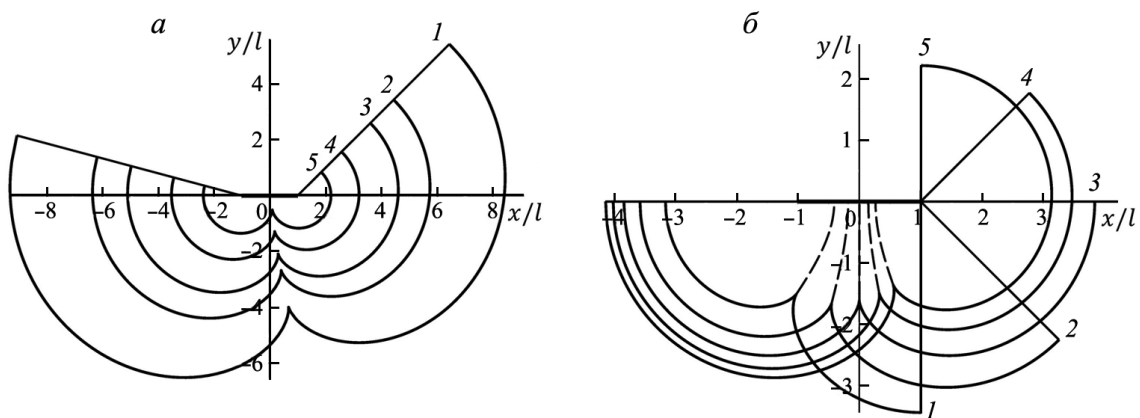


Рис. 2. Форма границы воронки выброса  $ECF$ : а — для  $\alpha = 1/12$ ,  $\beta = 1/4$  при значениях  $\pi k = 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,65$  (кривые 1–5 соответственно); б — для  $\pi k = 0,25$ ,  $\beta = 0$  при значениях  $\alpha = -1/2; -1/4; 0; 1/4; 1/2$  (кривые 1–5 соответственно)

Для нахождения значений  $l_1^*$  и  $l_2^*$  используем следующие соображения. Очевидно, что форма линии тока  $CE$  и распределение скоростей в области  $ACEBA$  в предельном случае  $k = \frac{lv_0}{\varphi_0} \rightarrow k_m$

будут такими же, как для соответствующего предельного течения для заряда длины  $2l_1^*$  в случае  $\alpha = \beta$ . Для такой симметричной задачи с теми же значениями  $\varphi_0$  и  $v_0$  предельное значение параметра  $k$  есть  $k_{1m} = \frac{l_1^* v_0}{\varphi_0} = \frac{1}{\pi(1 + \beta)}$ . Таким образом,

$$l_1^* = \frac{k_{1m}}{k_m} l = \frac{2(1 + \alpha)}{2 + \alpha + \beta}, \quad l_2^* = \frac{2(1 + \beta)}{2 + \alpha + \beta} l.$$

При  $k > k_m$  решения, соответствующего рассматриваемой схеме, не существует. В этом случае границей воронки являются дуги окружностей с центрами в точках  $E$  и  $F$  и радиусами  $l_1 < l_1^*$  и  $l_2 < l_2^*$ . Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют найти  $l_1 = \frac{l}{\pi(\beta + 1)k}$ ,  $l_2 = \frac{l}{\pi(\alpha + 1)k}$ . При  $k > k_m$  выброс грунта произойдет только на краях заряда и его участок  $x \in [l_1 - l, l - l_2]$  сработает впустую [5, 9].

На рис. 2, б представлены найденные расчетом формы границ воронки при  $k = \frac{0,25}{\pi}$ ,  $\beta = 0$  и различных  $\alpha \in [-1/2, 1/2]$ . Пунктирные линии соответствуют участку  $AC$  линии тока. Расчеты показывают, что увеличение значения  $\alpha$  приводит к росту размеров ограниченной линией тока  $ACE$  левой части воронки выброса.

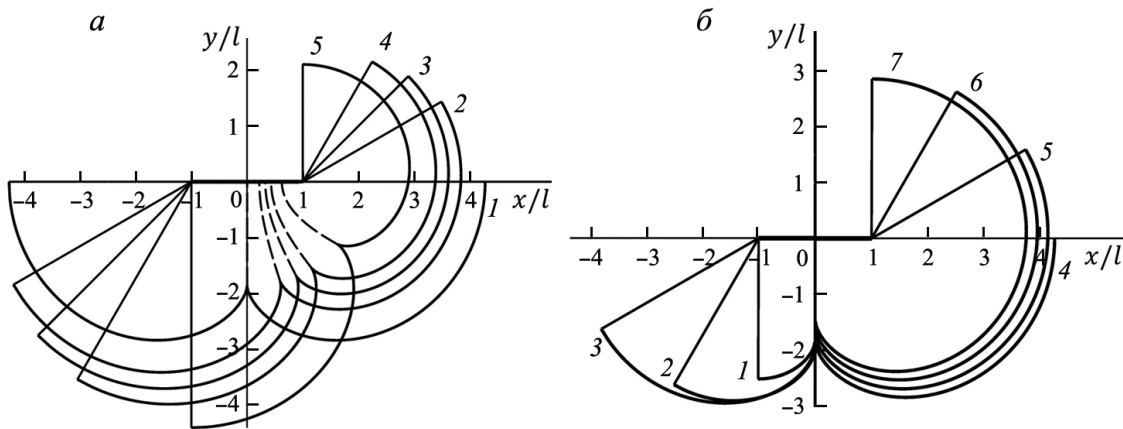


Рис. 3. Форма границ воронки выброса при  $\pi k = 0,2$ : а — для  $\beta = -\alpha$  при значениях  $\alpha = 0; 1/6; 1/4; 1/3; 1/2$  (кривые 1–5 соответственно); б — для  $\beta = \alpha$  при значениях  $\alpha = -1/2; -1/6; -1/3$  (кривые 1–3) и  $\alpha = 0; 1/6; 1/3; 1/2$  (кривые 4–7)

На рис. 3, а приведены рассчитанные границы воронки при  $k = \frac{0,2}{\pi}$ ,  $\beta = -\alpha$  и нескольких значениях  $\alpha$ . При  $\beta = \alpha$  воронка обладает симметрией относительно плоскости  $x = 0$ . Результаты расчетов для этого случая представлены на рис. 3, б: линии 1–3 соответствуют участкам  $CE$  границы воронки для отрицательных значений углов, линии 4–7 — участкам  $CF$  для  $\beta = \alpha \geq 0$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М.А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973.
3. Кузнецов В.М. Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука, 1977.
4. Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Краевые задачи теории взрыва. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986.
5. Кузнецов В.М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта // Прикл. матем. и техн. физ. 1960. № 3. 152–156.
6. Ильинский Н.Б., Поташев А.В., Рубиновский А.В., Фищенко П.А. Решение некоторых задач теории взрыва в импульсно-гидродинамической постановке // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 14. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 98–109.
7. Кузнецов В.М., Поляк Э.Б., Шер Е.Н. О гидродинамическом взаимодействии шнуровых зарядов ВВ// Прикл. матем. и техн. физ. 1975. № 5. 93–101.

8. Поляк Э.Б., Шер Е.Н. О форме воронки выброса при взрыве шнурового заряда в двухслойной среде // Прикл. матем. и техн. физ. 1973. № 2. 143–146.
9. Кузнецов В.М., Поляк Э.Б. Импульсно-гидродинамические схемы расчета взрыва на выброс шнуровых зарядов ВВ // Физ.-техн. пробл. разработки полезных ископаемых. 1973. № 4. 32–39.
9. Толоконников С.Л. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта шнурового заряда клиновидной формы // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2018. № 6. 82–85.
10. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию  
27.02.2019