УДК 510.649

О ТОЧНЫХ ЛОГИКАХ СВИДЕТЕЛЬСТВ

В. Н. Крупский[1]

Свойство точности моделей логики свидетельств играет существенную роль при формальном анализе эпистемических сценариев типа примера “Премьер-министр” (Prime Minister Example) Б. Рассела. Вопрос об аксиоматизации этого свойства средствами логики свидетельств оставался открытым. Мы предлагаем полные аксиоматики для класса всех точных базисных моделей, а также для класса всех точных моделей в случае расширенного языка с дополнительной операцией $+$ (объединение свидетельств).

Ключевые слова: эпистемическая логика, логика свидетельств, базисная модель логики свидетельств, свойство точности, полнота.

The sharpness property of justification models is essential for formal analysis of epistemic scenarios like Russell's Prime Minister Example. The problem to axiomatize this property in the the propositional justification language was left opened. We propose the solution and provide complete axiomatizations for classes of all sharp basic justification models and of all justification models that are sharp with respect to two operations: application and plus.

Key words: epistemic logic, justification logic, basic justification model, sharpness, completeness.

Определение базисной модели логики свидетельств предложено С.Н. Артемовым [1] в качестве одной из двух компонент развиваемого им подхода к моделированию эпистемических сценариев типа примера “Премьер-министр” (Prime Minister Example) Б. Рассела [2], в которых центральная роль отводится анализу аргументации, т.е. причин, по которым рассматриваемые суждения объявляются заслуживающими доверия, верными или представляющими знание агента. Вторая компонента моделирует различие между просто осмысленными и порождающими знание свидетельствами. Мы рассматриваем только первую компоненту.

Язык базисной модели имеет два параметра — счетное множество атомарных высказываний P и счетное множество атомарных свидетельств (обоснований, подтверждений) J. Термы (составные свидетельства) и формулы определяются грамматикой:

$$Tm ::= J \mid Tm \cdot Tm, \qquad Fm ::= \bot \mid P \mid Fm \to Fm \mid Tm : Fm.$$

Формула $t\colon F$ интерпретируется высказыванием “t свидетельствует в пользу F”, а операция аппликации $\cdot$ отражает принятый (в модели) способ извлечения следствий. Сама модель задается интерпретирующим отображением $*\colon Fm \to \{0,1\}$, $*\colon Tm \to 2^{Fm}$, подчиненным условиям:

$$\bot^* = 0, \qquad (F \to G)^* = 1 \Leftrightarrow (F^* = 0 \text{ или } G^* = 1), \qquad (t{:}F)^* = 1 \Leftrightarrow F \in t^*, \qquad s^* \rhd t^* \subseteq (s\cdot t)^*, \quad (1)$$

где $S \rhd T = \{G \mid F \to G \in S \text{ и } F \in T$ для некоторой формулы $F\}$. Последнее условие означает, что принятый в модели способ извлечения следствий согласован с правилом *Modus ponens*. Оно эквивалентно требованию истинности аксиом аппликации

$$s{:}(F \to G) \to (t{:}F \to [s{\cdot}t]{:}G). \qquad (2)$$

Базисная модель называется *точной* [1, 3], если $s^* \rhd t^* = (s\cdot t)^*$, т.е. принятый способ извлечения следствий есть в точности применение правила *Modus ponens*. В этом случае формула вида $[s\cdot t]{:}F$ допускает более детальное прочтение: “F следует из утверждений, верифицированных свидетельствами s и t соответственно”. В общем случае такое прочтение некорректно.

Класс всех базисных моделей имеет полную аксиоматизацию посредством логики J^-, представляющей собой расширение классической логики высказываний схемой аксиом аппликации (2)

[1] *Крупский Владимир Николаевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математической логики и теории алгоритмов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: krupski@lpcs.math.msu.su.

Krupskii Vladimir Nikolaevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms.

(см. [1]). Вопрос об аксиоматизации в языке логики свидетельств класса всех точных моделей оставался открытым. Мы показываем, что логика J^- полна уже в классе всех точных базисных моделей, и предлагаем полную аксиоматику для свойства точности в случае расширенного языка с дополнительной операцией $+$ (объединение свидетельств).

Точность в базисных моделях. Полнота логики J^- в классе всех точных базисных моделей вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Каждую базисную модель* $*$ *можно преобразовать в точную базисную модель* $\circ$ *с сохранением истинностного значения заданной формулы* F*, т.е.* $F^* = F^\circ$.

Доказательство. Пусть формула F фиксирована. Сначала преобразуем модель $*$ в другую модель $*_0$, такую, что $F^* = F^{*_0}$ и существует бесконечное множество атомарных высказываний $V \subseteq P$, каждое из которых не встречается ни в одной из формул $G \in t^{*_0}$, $t \in Tm$.

Множество атомарных высказываний, встречающихся в формуле F, конечно. Разобьем его дополнение на два непересекающихся бесконечных множества $V, V' \subseteq P$ и фиксируем биекцию α множества $V \cup V'$ на V'. Для каждой формулы G пусть $\alpha(G)$ означает результат замены в ней всех атомарных высказываний $p \in V \cup V'$ на $\alpha(p)$. Положим $*_0(p) = p^*$ для $p \in P$ и $*_0(t) = \{\alpha(G) \mid G \in t^*\}$ для $t \in Tm$, а также продолжим отображение $*_0$ на все формулы в соответствии с условиями (1), последнее из которых выполняется автоматически ввиду сохранения правила *Modus ponens* при подстановке. Имеем $\alpha(F) = F$. Оба отображения $*$ и $*_0$ оценивают одинаково все атомарные подформулы формулы F, а также все подформулы вида $t{:}G$, поэтому $F^* = F^{*_0}$. Атомарные высказывания, принадлежащие бесконечному множеству V, исключены подстановкой α из всех формул $G \in t^{*_0}$, $t \in Tm$. Тем самым отображение $*_0$ задает искомую модель.

Каждой формуле $G \in Fm$ сопоставим некоторое атомарное высказывание $v_G \in V$ так, чтобы выполнялось условие инъективности: $v_G \neq v_H$ при $G \neq H$. Определим последовательность отображений $*_i \colon Tm \to 2^{Fm}$, $i = 0, 1, \ldots$, следующей конструкцией:

> $*_0$ было определено выше. Пусть $*_i$ также определено. Сначала положим $*_{i+1} := *_i$. Затем для каждых $s, t \in Tm$, $G \in *_i(s \cdot t)$ добавим формулы $(v_{[s\cdot t]:G} \to G)$ и $v_{[s\cdot t]:G}$ в множества $*_{i+1}(s)$ и $*_{i+1}(t)$ соответственно. Результат есть $*_{i+1}$.

Лемма 1. *Для всех* $s, t \in Tm$, $i = 0, 1, \ldots$, *имеют место включения:* $*_i(s) \rhd *_i(t) \subseteq *_i(s \cdot t) \subseteq *_{i+1}(s) \rhd *_{i+1}(t)$.

Доказательство. Второе включение обеспечивается конструкцией. Докажем первое. Для $i = 0$ оно установлено выше. Пусть $i > 0$, $(X \to Y) \in *_i(s)$ и $X \in *_i(t)$.

Если X не содержит атомарных высказываний, принадлежащих множеству V, то $(X \to Y) \in *_0(s)$ и $X \in *_0(t)$, а потому $Y \in *_0(s \cdot t) \subseteq *_i(s \cdot t)$. Иначе X имеет один из двух видов: $v_{[s'\cdot t]:G}$ для некоторого $G \in *_{i-1}(s' \cdot t)$ или $(v_{[s\cdot t']:G} \to G)$ для некоторого $G \in *_{i-1}(s \cdot t')$.

В первом случае s' совпадает с s, так как конструкция не добавляет к $*_j(s)$ формулы вида $v_{[s'\cdot t]:G} \to Y$ при $s' \neq s$. Тогда $G \in *_{i-1}(s \cdot t)$ и единственная формула вида $(v_{[s\cdot t]:G} \to Y) \in *_i(s)$ есть $(v_{[s\cdot t]:G} \to G)$. Отсюда $Y = G \in *_{i-1}(s \cdot t) \subseteq *_i(s \cdot t)$. Второй случай невозможен, так как конструкция никогда не добавляет формулы вида $((v_{[s\cdot t']:G} \to G) \to Y)$. Лемма доказана.

Пусть
$$\circ(p) = *_0(p),\ (p \in P), \qquad \circ(t) = \bigcup_i *_i(t),\ t \in Tm. \tag{3}$$

Продолжим отображение $\circ$ на все формулы согласно (1).

Следствие 1. *Отображение* $\circ$ *является точной базисной моделью.*

Остается проверить, что $F^\circ = F^{*_0}$. Для каждой подформулы вида $t{:}G$ формулы F ее часть G не содержит атомарных высказываний из множества V, поэтому формула G не могла появиться в $\circ(t)$ в результате добавления в одно из множеств $*_{i+1}(t)$. Это означает, что $(t{:}G)^\circ = (t{:}G)^{*_0}$. Но на атомарных подформулах отображения $\circ$ и $*_0$ также совпадают, поэтому $F^\circ = F^{*_0} = F^*$. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Логика* J^- *полна относительно класса всех точных базисных моделей.*

Точность при наличии операции $+$. В большинстве логик свидетельств используется расширенный язык с дополнительной операцией $+$ на термах, подчиненной аксиомам
$$s{:}F \vee t{:}F \to [s+t]{:}F. \tag{4}$$

Терм $s+t$ отражает выбранный (в модели) способ объединения двух свидетельств в единое целое, при котором не происходит потери информации: все, что обосновано слагаемыми, также обосновано и их суммой. Наличие этой операции оказывается существенным для установления связи между логикой свидетельств и модальной логикой, являющейся ее забывающей проекцией (см. [4, 5], теоремы о реализации).

Минимальная логика такого рода есть J (см. [6]) — расширение логики J^- схемой аксиом (4). В определениие моделей для логики J добавляется дополнительное условие $s^* \cup t^* \subseteq (s+t)^*$, а определение точности (относительно двух операций; ниже используется именно это определение) расширяется требованием точности относительно операции $+$, т.е. условием $s^* \cup t^* = (s+t)^*$.

На множестве всех термов определим отношение $\sim$ как наименьшее отношение конгруэнтности, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{gathered}(s+t)+u \sim s+(t+u), \qquad s+t \sim t+s, \qquad t+t \sim t,\\ (s_1+s_2)\cdot t \sim s_1 \cdot t + s_2 \cdot t, \qquad s \cdot (t_1+t_2) \sim s \cdot t_1 + s \cdot t_2.\end{gathered} \tag{5}$$

С точностью до него каждый терм s имеет нормальную форму $s \sim t_1 + \ldots + t_n$, где слагаемые t_i не содержат $+$ и не повторяются. Нормальная форма терма единственна с точностью до перестановки слагаемых.

Условимся писать $s \succeq t$, если все слагаемые из нормальной формы терма t присутствуют в нормальной форме терма s. Это частичный порядок.

Лемма 2. *Пусть $*$ — точная модель, $s, t \in Tm$. Тогда $s \sim t$ влечет $s^* = t^*$ и $s \succeq t$ влечет $s^* \supseteq t^*$.*

Доказательство. Достаточно установить, что $s^* = t^*$, когда $s \sim t$ есть одно из соотношений (5). Первая строка соответствует известным свойствам операции $\cup$. Тождества из второй строки отражают дистрибутивность $\rhd$ относительно $\cup$, которая является непосредственным следствием определения $\rhd$. Тем самым отношение $s^* = t^*$ на множестве всех термов является конгруэнтностью, для которой выполнены соотношения (5). Отношение $\sim$ включено в него как наименьшая конгруэнтность такого рода.

Второе утверждение следует из первого. Лемма доказана.

Пусть $\mathsf{J}_\#$ означает расширение логики J следующими схемами аксиом:

$$[s+t]{:}F \to s{:}F \vee t{:}F, \qquad t{:}F \leftrightarrow t'{:}F, \text{ где } t' \text{ — нормальная форма терма } t.$$

Теорема 2. *Логика $\mathsf{J}_\#$ корректна и полна в классе всех точных моделей логики J.*

Доказательство. Корректность логики $\mathsf{J}_\#$ следует из леммы 2 и определения точной модели.

Докажем полноту. Пусть $\mathsf{J}_\# \nvdash F$. Построим точную модель логики $\mathsf{J}_\#$, которая опровергает формулу F.

Сначала мы используем стандартную технику канонических моделей для построения модели логики $\mathsf{J}_\#$, в которой формула F ложна. Как и любая модель логики $\mathsf{J}_\#$, она будет точной относительно операции $+$. Точность относительно операции $\cdot$ будет обеспечена дальнейшими преобразованиями модели.

Под непротиворечивостью множества формул ниже понимается невозможность вывести из него $\perp$ средствами логики $\mathsf{J}_\#$. Множество $\{\neg F\}$ непротиворечиво, поэтому существует максимальное непротиворечивое множество Γ, для которого $\neg F \in \Gamma$. Определим отображение $* : P^0 \to \{0, 1\}$, $* \colon Tm^0 \to 2^{Fm^0}$ следующим образом:

$$*(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \Gamma,\ (p \in P), \qquad *(t) = \{G \mid t{:}G \in \Gamma\},\ t \in Tm.$$

Продолжим его на все формулы в соответствии с (1). Следующая лемма стандартна.

Лемма 3. *Условия $*(G) = 1$ и $G \in \Gamma$ эквивалентны для всех формул $G \in Fm$.*

Следствие 3. *Отображение $*$ является моделью логики $\mathsf{J}_\#$ и $F^* = 0$.*

Доказательство. Оба утверждения вытекают из леммы 3, так как Γ содержит все аксиомы логики $\mathsf{J}_\#$, замкнуто относительно применения правила *Modus ponens* и не содержит формулы F. Лемма доказана.

Следующий шаг повторяет начальный фрагмент доказательства теоремы 1. Мы преобразуем $*$ в модель $*_0$ логики $\mathsf{J}_\#$, такую, что $F^{*_0} = F^* = 0$, а также существует бесконечное множество атомарных высказываний $V \subseteq P$, каждое из которых не встречается ни в одной из формул $G \in t^{*_0}$, $t \in Tm$. Остается преобразовать $*_0$ в точную контрмодель для F, т.е. обеспечить точность относительно операции $\cdot$.

Далее мы модифицируем конструкцию из доказательства теоремы 1. С каждой формулой $G \in Fm$ мы также ассоциируем атомарное высказывание $v_G \in V$, отличное от всех других ассоциированных высказываний v_H при $H \neq G$, и определяем последовательность отображений $*_i\colon Tm \to 2^{Fm}$, $i = 0, 1, \ldots$, посредством следующей конструкции:

> $*_0$ было определено выше. Пусть $*_i$ также определено. Сначала положим $*_{i+1} := *_i$. Затем для каждых термов $s, t \in Tm$, не содержащих $+$, и для каждой формулы $G \in *_i(s \cdot t)$ проделаем следующее: добавим формулу $(v_{[s\cdot t]:G} \to G)$ во все множества $*_{i+1}(s')$ при $s' \succeq s$ и добавим формулу $v_{[s\cdot t]:G}$ во все множества $*_{i+1}(t')$ при $t' \succeq t$. Результат есть $*_{i+1}$.

Лемма 4. *Для всех* $s, t \in Tm$, $i = 0, 1, \ldots$, *имеет место* $*_i(s + t) = *_i(s) \cup *_i(t)$.

Доказательство. Утверждение справедливо для $i = 0$, так как $*_0$ является моделью логики $\mathsf{J}_\#$. Пусть $i > 0$. Если формула G не содержит подформул, принадлежащих V, или не содержится ни в одном из множеств $*_i(t)$, $t \in Tm$, то $G \in *_i(s{+}t) \Leftrightarrow G \in *_0(s{+}t) \Leftrightarrow G \in *_0(s) \cup *_0(t) \Leftrightarrow G \in *_i(s) \cup *_i(t)$. В противном случае G была добавлена на некотором шаге $j + 1 \leqslant i$.

Допустим, что формула G была добавлена в множество $*_{j+1}(s + t)$. Тогда G была также добавлена во все множества вида $*_{j+1}(u')$, $u' \succeq u$, где u — некоторый терм, который не содержит $+$ и удовлетворяет условию $(s{+}t) \succeq u$. Но тогда $s \succeq u$ или $t \succeq u$, поэтому $G \in *_{j+1}(s) \cup *_{j+1}(t) \subseteq *_i(s) \cup *_i(t)$.

Допустим, что формула G была добавлена в множество $*_{j+1}(s)$. Тогда $G \in *_{j+1}(s{+}t) \subseteq *_i(s{+}t)$, так как $(s + t) \succeq s$. Случай $G \in *_{j+1}(t)$ разбирается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $t_1 + \ldots + t_n$ *есть нормальная форма терма* $t \in Tm$, *то*

$$*_i(t) = *_i(t_1) \cup \ldots \cup *_i(t_n), \qquad i = 0, 1, \ldots\ .$$

Доказательство. Равенство справедливо при $i = 0$, так как $*_0$ является моделью логики $\mathsf{J}_\#$. Пусть $i > j \geqslant 0$. Конструкция добавляет некоторую формулу в множество $*_{j+1}(t)$ тогда и только тогда, когда она добавляет ее же в одно из множеств $*_{j+1}(t_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому равенство справедливо для всех i. Лемма доказана.

Следствие 4. *Пусть* $s, t \in Tm$, $i = 0, 1, \ldots$. *Тогда* $s \sim t$ *влечет* $*_i(s) = *_i(t)$ *и* $s \succeq t$ *влечет* $*_i(s) \supseteq *_i(t)$.

Лемма 6. *Для всех* $s, t \in Tm$, $i = 0, 1, \ldots$, *имеют место включения*

$$*_i(s) \rhd *_i(t) \subseteq *_i(s \cdot t) \subseteq *_{i+1}(s) \rhd *_{i+1}(t).$$

Доказательство. Первое включение доказывается аналогично лемме 1. В случае $i = 0$ оно следует из того, что $*_0$ является моделью $\mathsf{J}_\#$. Пусть $i > 0$, $(X \to Y) \in *_i(s)$ и $X \in *_i(t)$.

Если X не содержит подформул, принадлежащих V, то $(X \to Y) \in *_0(s)$ и $X \in *_0(t)$, поэтому $Y \in *_0(s \cdot t) \subseteq *_i(s \cdot t)$. Иначе X имеет один из двух видов: $v_{[s'\cdot t']:G}$, где $G \in *_{i-1}(s' \cdot t')$ и $t \succeq t'$, или $(v_{[s'\cdot t']:G} \to G)$, где $G \in *_{i-1}(s' \cdot t')$ и $s \succeq s'$.

В первом случае $s \succeq s'$ и $Y = G$, так как конструкция не добавляет формулы вида $v_{[u\cdot v]:G} \to Y$ в $*_j(s)$, когда $s \not\succeq u$ или $Y \neq G$. Отсюда $s \cdot t \succeq s' \cdot t'$ и $Y = G \in *_{i-1}(s \cdot t) \subseteq *_i(s \cdot t)$ по следствию 4. Второй случай невозможен, так как конструкция никогда не добавляет формул вида $((v_{[s'\cdot t']:G} \to G) \to Y)$.

Докажем второе включение. Пусть $G \in *_i(s \cdot t)$. Рассмотрим произведение нормальных форм

$$s \cdot t \sim (s_1 + \ldots + s_m) \cdot (t_1 + \ldots + t_n) \sim \sum_{k,l} s_k \cdot t_l.$$

По следствию 4 имеем $G \in *_i(s_k \cdot t_l)$ для некоторых k, l. Но $s \succeq s_k$, $t \succeq t_l$ и терм $s_k \cdot t_l$ не содержит $+$. Согласно конструкции $(v_{[s_k\cdot t_l]:G} \to G) \in *_{i+1}(s)$ и $v_{[s_k\cdot t_l]:G} \in *_{i+1}(t)$, откуда $G \in *_{i+1}(s) \rhd *_{i+1}(t)$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Определим отображение $\circ\colon P \to \{0, 1\}$, $\circ\colon Tm \to 2^{Fm}$ равенствами (3) и продолжим его на все формулы в соответствии с (1). По леммам 4 и 6 отображение $\circ$ является точной моделью. Но $\circ(G) = *_0(G)$ для всех формул G, которые не содержат подформул, принадлежащих множеству V. Поэтому $F^\circ = F^{*_0} = 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artemov S.* Justification awareness models // Logical foundations of computer science: Int. Symp. LFCS 2018 / Ed. by S. Artemov, A. Nerode. Lect. Notes Comput. Sci. Vol. 10703. Cham: Springer, 2018. 22–36.

3. *Krupski V.N.* On the sharpness and the single-conclusion property of basic justification models // Logical foundations of computer science: Int. Symp. LFCS 2018 / Ed. by S. Artemov, A. Nerode. Lect. Notes Comput. Sci. Vol. 10703. Cham: Springer, 2018. 211–220.
4. *Artemov S.* Explicit provability and constructive semantics // Bull. Symbol. Log. 2001. **7**, N 1. 1–36.
5. *Fitting M.* Modal logics, justification logics, and realization // Ann. Pure and Appl. Log. 2016. **167**. 615–648.
6. *Artemov S.* The logic of justification // Rev. Symbol. Log. 2008. **1**, N 4. 477–513.

Поступила в редакцию
27.02.2019

УДК 532.5.031

К ЗАДАЧЕ О ВЗРЫВЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ШНУРОВОГО ЗАРЯДА

С. Л. Толоконников[1]

В твердожидкостной импульсной постановке исследована задача о взрыве на поверхности грунта шнурового заряда в случае, когда примыкающие к заряду прямолинейные участки свободной поверхности грунта наклонены к плоскости заряда под некоторыми углами. Построено точное решение задачи, проведен параметрический анализ. Представлены расчеты формы воронки выброса для различных значений определяющих параметров задачи.

Ключевые слова: взрыв, воронка выброса, идеальная несжимаемая жидкость, импульсная постановка.

The problem of an explosion of a line charge on the surface of the ground is investigated within the solid-liquid formulation of the pulse-hydrodynamic model. The free rectilinear parts of the ground that are adjacent to the line charge are supposed to be inclined to the plane of the charge at certain angles. The exact solution to the problem is constructed. A parametric analysis is performed. The calculated profiles of the explosion crater are presented for some governing parameters of the problem.

Key words: explosion, ejection crater, ideal incompressible fluid, pulse-hydrodynamic model.

Одной из известных математических моделей взрыва в грунте является предложенная академиком М.А. Лаврентьевым твердожидкостная модель [1], в которой грунт полагается идеальной несжимаемой жидкостью, а воздействие взрыва описывается заданным импульсом давления продуктов взрыва на среду. Считается также, что в области, где возникает движение грунта при взрыве, скорость больше некоторого критического значения v_0. При этом границей воронки выброса, отделяющей вовлеченный в движение грунт от твердого, является поверхность с постоянным значением модуля скорости, равным v_0. В случае, когда заряд является шнуровым и имеет значительную протяженность, задача может быть рассмотрена как плоская. В такой постановке имеется математическая аналогия с задачами о стационарных струйных и кавитационных плоскопараллельных течениях идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии сил тяжести и поверхностного натяжения, что позволяет при решении задач о взрыве использовать эффективные методы теории струй, в частности метод особых точек С.А. Чаплыгина.

Решения ряда задач о взрыве в грунте поверхностных или заглубленных шнуровых зарядов получены, например, в [2–9].

В настоящей работе рассматривается задача о взрыве на поверхности грунта плоского шнурового заряда шириной $2l$ в случае, когда примыкающие к заряду прямолинейные участки свободной поверхности грунта наклонены к плоскости заряда под некоторыми углами $\pi\alpha$, $\pi\beta$. Решение задачи для $\alpha = \beta = 0$ получено в [5].

---

[1] *Толоконников Сергей Львович* — доктор физ.-мат. наук, доцент каф. гидромеханики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: tolsl@mech.math.msu.su.

Tolokonnikov Sergey Lvovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Hydromechanics.