УДК 519.716.32

КОНТИНУАЛЬНОСТЬ МНОЖЕСТВА ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ P_{k+1}, КОТОРЫЕ МОЖНО ГОМОМОРФНО ОТОБРАЗИТЬ НА P_k

Л. Ю. Девяткин[1]

Доказывается, что частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_k^{k+1}$ всех замкнутых классов $(k+1)$-значной логики, которые можно гомоморфно отобразить на k-значную логику, имеет мощность континуума.

Ключевые слова: многозначная логика, замкнутый класс, гомоморфизм, порождающая система.

We prove that the partially ordered set $\mathcal{L}_k^{k+1}$ of all closed classes of $(k+1)$-valued logic which can be homomorphically mapped onto k-valued logic has the cardinality of continuum.

Key words: many-valued logic, closed class, homomorphism, generating set.

Необходимые определения базовых понятий можно найти в [1]. Нотационные конвенции соответствуют [2]. В работе [1] показано, что частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_k^l$ замкнутых классов P_l, которые можно гомоморфно отобразить на P_k, континуально при $l \geqslant k+2$ и по меньшей мере счетно при $l \geqslant k+1$. В настоящем сообщении демонстрируется континуальность $\mathcal{L}_k^l$ при $l \geqslant k+1$. В свете уже имеющихся результатов для этого достаточно показать континуальность $\mathcal{L}_k^l$ при $l = k+1$.

Определение гомоморфного отображения систем функций заимствуем из [3, § 8]. Пусть F и G — системы функций. Обозначим через $\{x_\alpha\}$ (соответственно $\{y_\alpha\}$) множество символов всех независимых переменных, встречающихся у функций системы F (соответственно G). Система F функций f ***гомоморфно отображена*** в систему G функций g, если каждому символу x_α взаимно однозначно соответствует символ y_α и каждой функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$ отвечает одна и только одна функция $g(y_1, \ldots, y_n) \in G$, зависящая от соответствующих аргументов, и при этом выполнены условия: 1) если функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$ отвечает функция $g(y_1, \ldots, y_n) \in G$ и $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in F$, то функции $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ соответствует функция $g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in G$; 2) если функциям $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}), \ldots, f_n(x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n})$ соответствуют функции $g(y_1, \ldots, y_n)$, $g_1(y_{1,1}, \ldots, y_{1,m_1}), \ldots, g_n(y_{n,1}, \ldots, y_{n,m_n})$, где $f \in F$, а f_i либо есть x_i, либо принадлежит F; $g \in G$, а g_i либо есть y_i, либо принадлежит G, и если $f(f_1, \ldots, f_n) \in F$, то функции $f(f_1, \ldots, f_n)$ соответствует принадлежащая системе G функция $g(g_1, \ldots, g_n)$.

Пусть G — порождающая система замкнутого класса $[G] \subseteq P_k$. Определим систему функций $H \subseteq P_{k+1}$. Каждой функции $g_i(x_1, \ldots, x_n) \in G$ соответствует функция $h_i(x_1, \ldots, x_n) \in H$, отвечающая двум условиям: 1) если $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$, то $h(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n)$; 2) если $a_i = k$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то $h(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, k-1, \ldots, a_n)$. Никакие иные функции не входят в H. Так как функции из H сохраняют множество E_k, систему H можно гомоморфно отобразить на G [3, § 8]. Следовательно, $[H]$ является гомоморфным прообразом $[G]$ в P_{k+1}.

Теперь проведем построение, опирающееся на известный результат из [4], чтобы получить континуальное множество замкнутых надклассов $[H]$, каждый из которых можно гомоморфно отобразить в P_k. Для каждого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ определим функцию $f_n \in P_{k+1}^n$:

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} k, \text{ если } \exists i : (x_i = k-1 \wedge \forall j \neq i : x_j = k); \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Далее, определим отношение φ_n:

$$\varphi_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \in E_{k+1}^n | (\exists i : a_i = k-1 \wedge \forall j \neq i : a_j = k) \vee (\exists i : a_i = 0) \vee (\forall i : a_i \in E_k \setminus \{0\})\}.$$

Обратим внимание: если $(a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$, то $f_n(a_1, \ldots, a_n) \in E_k$. Таким образом, систему $H \cup \{f_i | i \geqslant 3\}$ можно гомоморфно отобразить в P_k.

[1] *Девяткин Леонид Юрьевич* — канд. филос. наук, ст. науч. сотр. сектора логики Ин-та философии РАН, e-mail: deviatkin@iph.ras.ru.

Devyatkin Leonid Yur'evich — Candidate of Philosophical Sciences, Senior Researcher, RAS Institute of Philosophy, Department of Logic.

Теперь покажем, что для всех $j \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ имеет место $f_j \notin [H \cup \{f_i | i \geqslant 3\} \setminus \{f_j\}]$. Достаточно доказать следующие три утверждения: (1) $\forall n \geqslant 3$ имеет место $f_n \notin \mathrm{Pol}_{k+1}\varphi_n$; (2) $\forall m \neq n$ имеет место $f_m \in \mathrm{Pol}_{k+1}\varphi_n$; (3) $\forall n \geqslant 3$ имеет место $H \subseteq \mathrm{Pol}_{k+1}\varphi_n$ (см. [2, § 2.6]). Утверждение (1) вытекает из следующего факта:

$$f_n \begin{pmatrix} k-1 & k & k \cdots & k \\ k & k-1 & k \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ k & k & k \cdots & k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix}.$$

Докажем утверждение (2). Пусть $m \neq n$, $m,n \geqslant 3$, и $\mathfrak{A}$ — матрица $n \times m$ со столбцами $a_1, \ldots, a_m \in \varphi_n$, где $a_i = (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Если $a_{i,j} \in E_{k-1}$ для неких i, j, где $j \in \{1, \ldots, m\}$, то $f_m(a_{i,1}, \ldots, a_{i,m}) = 0$. По определению φ_n имеем $f_m(\mathfrak{A}) \in \varphi_n$. Теперь допустим, что $a_1, \ldots, a_m \in \{k-1, k\}^n$. Случай 1: $m < n$. Найдется строка матрицы $\mathfrak{A}$, которая состоит из символов k или содержит более одного символа $k-1$, поэтому $f_m(\mathfrak{A}) \in \varphi_n$. Случай 2: $m > n$. Тогда хотя бы одна строка матрицы $\mathfrak{A}$ содержит символ $k-1$ по меньшей мере дважды. Снова получаем, что $f_m(\mathfrak{A}) \in \varphi_n$.

Утверждение (3) вытекает из того факта, что область значений $h \in H$ ограничена E_k.

Теорема. *Частично упорядоченное множество $\mathcal{L}_k^{k+1}$ всех замкнутых классов $(k+1)$-значной логики, которые можно гомоморфно отобразить на k-значную логику, имеет мощность континуума.*

Доказательство. Выше мы показали, что $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ имеет место $f_j \notin [H \cup \{f_i | i \geqslant 3\} \setminus \{f_j\}]$. Поэтому мощность семейства замкнутых классов, которые включают $[H]$ и включаются в $[H \cup \{f_i | i \geqslant 3\}]$, равна континууму. Полагая $[G] = P_k$, получаем, что множество гомоморфных прообразов P_k в P_{k+1} имеет такую же мощность.

В [5] дается описание всех минимальных классов $\mathcal{L}_2^3$. В [6] показано, что три таких класса имеют в точности счетное число замкнутых надклассов в $\mathcal{L}_2^3$. Наше построение позволяет дополнить этот результат. Пусть множество H состоит из единственной бинарной функции, которая отвечает одной из следующих таблиц:

h_1	0	1	2
0	1	0	1
1	0	0	0
2	1	0	1

h_2	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

Континуальность множества надклассов h_2 в $\mathcal{L}_2^3$ непосредственно вытекает из построений, приведенных выше, при $k = 2$. Аналогичный результат для h_1 нетрудно получить, заменив условие 2 в определении H на следующее: если $a_i = k$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то $h(a_1, \ldots, a_i, \ldots a_n) = g(a_1, \ldots, 0, \ldots a_n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макаров А.В.* О гомоморфизмах функциональных систем многозначных логик // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. М.: Наука, 1992. 5–29.
2. *Lau D.* Function algebras on finite sets: Basic course on many-valued logic and clone theory. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer, 2006.
3. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1958. **51**. 5–142.
4. *Янов Ю.И., Мучник А.А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. 1959. **127**, № 1. 44–46.
5. *Макаров А.В.* Описание всех минимальных замкнутых классов в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_2^3$ всех замкнутых классов трехзначной логики, которые можно гомоморфно отобразить на двузначную логику // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2015. № 1. 65–66.
6. *Макаров А.В., Макаров В.В.* Счетность числа замкнутых надклассов некоторых минимальных классов в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_2^3$ всех замкнутых классов трехзначной логики, которые можно гомоморфно отобразить на двузначную логику // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 1. 62–64.

Поступила в редакцию
20.02.2019