

2. Коновалов А.Ю., Плиско В.Е. О гиперарифметической реализуемости // Матем. заметки. 2015. **98**, № 5. 725–746.
3. Коновалов А.Ю. Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 1. 52–56.
4. Плиско В.Е. Абсолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. **47**, № 2. 315–334.

Поступила в редакцию
11.07.2018

УДК 517.938.5

СЛОЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ БИЛЬЯРДНОЙ КНИЖКИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ СЛУЧАЙ ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

В. В. Ведюшкина¹

Вычислен инвариант интересного случая интегрируемой бильярдной книжки и показано, что на некоторой изоэнергетической поверхности такая книжка моделирует динамику системы Горячева–Чаплыгина.

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярд, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга.

The Fomenko-Zieshang invariant of an interesting case of an integrable billiard book is calculated and it is shown that such a book models the dynamics of Goryachev–Chaplygin integrable case on a certain isoenergy surface.

Key words: integrable system, billiard, Liouville equivalence, Fomenko–Zieschang invariant.

Пусть дана замкнутая выпуклая кусочно-гладкая кривая на плоскости (при этом все углы в точках излома равны $\pi/2$). Бильярд описывает движение материальной точки внутри компактной области Ω , ограниченной этой кривой, а на границе определено естественное абсолютно упругое отражение (угол падения равен углу отражения), тогда в точках излома границы движение продолжается по непрерывности (в угле после удара точка продолжает движение в противоположном направлении по тому же отрезку, по которому попала в угол).

Интегрируемость бильярда в эллипсе была замечена Дж. Д. Биркгофом [1]. Оказалось, что для любой фиксированной траектории-ломаной ее звенья лежат на прямых, касательных к некоторой квадрике (эллипсу или гиперболу), софокусной с граничным эллипсом. Таким образом, помимо длины вектора скорости (который сохраняется при абсолютно упругих отражениях на границе) вдоль траекторий сохраняется параметр софокусной квадрики, т.е. система обладает двумя независимыми интегралами. В книге В. В. Козлова, Д. В. Трещева [2] замечено, что интегрируемость бильярда сохранится, если перейти к плоским областям, которые ограничены дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства и на границе которых нет точек излома с углами $\frac{3\pi}{2}$. В этом случае все углы в точках излома равны $\frac{\pi}{2}$, поскольку известно, что софокусные квадрики всегда пересекаются под прямыми углами.

Определение. Пусть (M^4, ω, H, f) и $(\tilde{M}^4, \tilde{\omega}, \tilde{H}, \tilde{f})$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M^4 и \tilde{M}^4 . Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q^3 = (x \in M^4 | H(x) = c)$ и $\tilde{Q}^3 = (x \in \tilde{M}^4 | \tilde{H}(x) = \tilde{c})$, снабженные слоениями Лиувилля. Интегрируемые системы $v = \text{sgrad } H$ и $\tilde{v} = \text{sgrad } \tilde{H}$ называются (кусочно-гладко) *лиувиллево эквивалентными*, если существует послыйный (кусочно-гладкий) диффеоморфизм $Q^3 \rightarrow \tilde{Q}^3$, сохраняющий ориентацию 3-многообразий Q^3 и \tilde{Q}^3 и ориентацию всех критических окружностей.

¹ Ведюшкина Виктория Викторовна — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: arinir@yandex.ru.

Vedyushkina Viktoria Viktorovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Application.

Лиувиллева эквивалентность в общем случае означает, что для сравниваемых систем совпадают замыкания интегральных траекторий (решений системы) на всюду плотном множестве.

Многообразие Q^3 расслоено на торы и особые слои (оно представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев по граничным торам). Рассмотрим базу слоения Лиувилля на Q^3 . Это — одномерный граф W , называемый графом Кронрода–Риба функции $f|_{Q^3}$. Структура слоения в малой окрестности особого слоя, отвечающего вершине графа, описывается комбинаторным объектом, называемым атомом. Граф, для каждой вершины которого указан соответствующий атом, называется инвариантом (грубой молекулой) Фоменко. В вершинах W расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля. Для полного описания слоения необходимо выбрать допустимые базисы на граничных торах атомов (см. [3]) и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Из матриц склейки вычисляются числовые метки r , ε и n , которые, будучи поставленными на молекуле W , полностью определяют слоение Лиувилля с точностью до посллойной эквивалентности и не зависят от выбора допустимых базисов на граничных торах. Получающийся граф с метками называется меченой молекулой W^* , т.е. инвариантом Фоменко–Цишанга (см. [4]).

Фиксируем на плоскости семейство софокусных квадрик соотношением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq a. \tag{1}$$

Здесь $\infty \geq a \geq b > 0$ — пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик); λ — параметр, определяющий квадрику. В дальнейших рассуждениях квадрики предполагаются софокусными, причем $\infty > a > b$.

Фиксируем в этом семействе два эллипса e_2 и e_1 и гиперболу h . Предположим, что эллипс e_2 лежит внутри эллипса e_1 . Рассмотрим три бильярда, ограниченные софокусными эллипсами и гиперболами: бильярд A_1 , ограниченный дугой эллипса e_2 и выпуклой по отношению к области дугой гиперболы h , и два экземпляра бильярда A_0 , ограниченные этой же дугой гиперболы h и двумя дугами эллипсов e_2 и e_1 . Здесь использованы обозначения бильярдов из работ автора [5, 6]. Склеим эти три бильярда в комплекс вдоль дуги эллипса e_2 . Занумеруем бильярды так, как указано на рис. 1, а. На ребре склейки, соответствующем эллипсу e_1 , поставим перестановку (1, 3), а на ребре, соответствующем эллипсу e_2 , — перестановку (1, 2, 3). На получившемся комплексе $\mathbb{B}(2A_0, A_1)$ можно рассмотреть систему бильярдной книжки. Траектория прямолинейно движется внутри бильярдов, при попадании на границу отражается по классическому закону отражения, а при попадании на ребро склейки не только отражается, но и меняет лист согласно перестановке на данном ребре. Отметим, что так как бильярды A_0 и A_1 интегрируемы, то полученная бильярдная книжка интегрируема с тем же интегралом. Подробное построение конструкции бильярдной книжки выполнено В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой в работе [7].

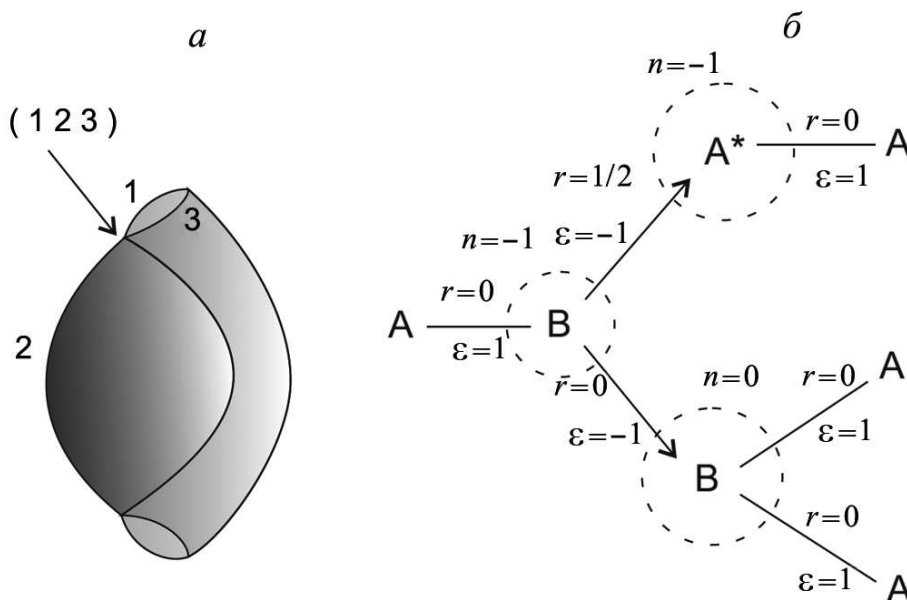


Рис. 1. Бильярдная книжка $\mathbb{B}(2A_0, A_1)$ (а) и соответствующий ей инвариант Фоменко–Цишанга (б)

Опишем поведение траекторий системы. Пусть параметры эллипсов e_1 и e_2 равны λ_1 и λ_2 соответственно, а параметр гиперболы h равен λ_3 . Отметим, что в этом случае $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. При

значениях интеграла $\Lambda < \lambda_1$ движения системы не происходит. При $\Lambda = \lambda_1$ существует только одна криволинейная траектория системы, описывающая движение по дуге эллипса e_1 . Такая траектория гомеоморфна окружности. При $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$ траектории системы лежат на торе. Далее, при $\Lambda = \lambda_2$ происходит перестройка. Отметим, что на данном уровне интеграла траектории на невыпуклом ребре склейки не определены. Тем не менее можно рассмотреть поверхность уровня интеграла. Как будет показано ниже, она гомеоморфна особому слою атома В. При $\lambda_2 < \Lambda < b$ траектории разбиваются на два класса. Первый тип траекторий характеризуется движением по бильярду A_0 с номером 3 в направлении к эллипсу e_2 . Такие траектории после склейки на ребре e_2 переходят на бильярд A_0 с номером 1. При этом они уже направлены от эллипса e_2 . После отражения от эллипса e_1 они снова оказываются на листе с номером 3 и по-прежнему направлены к эллипсу e_2 . Другой тип траекторий на бильярде A_0 с номером 3 направлен от эллипса e_2 . Такие траектории неизбежно отражаются от эллипса e_1 и после отражения окажутся на листе под номером 1. После отражения от эллипса e_2 они с бильярда под номером 1 согласно перестановке переходят на бильярд A_1 под номером 2. После неизбежного отражения от ребра e_2 такие траектории опять переходят на лист A_0 под номером 3 и по-прежнему направлены от ребра e_2 . При $\Lambda = b$ выделяются две особые траектории, лежащие на фокальной прямой. При дальнейшем увеличении $\Lambda < \lambda_3$ траектории касаются гиперболы с соответствующим параметром. Для того чтобы получить область, которую траектории заметают на бильярде, необходимо из бильярдов удалить внутренность гиперболы с параметром Λ . Здесь под внутренностью гиперболы понимается область, ограниченная гиперболой и содержащая фокусы. В результате траектории первого типа разбиваются на два подтипа. Так как траектории первого типа были расположены только на цилиндре, склеенном из двух бильярдов A_0 , то после вырезания внутренности гиперболы такой цилиндр разбивается на два. Траектории же второго типа по-прежнему лежат на односвязной поверхности уровня. При $\Lambda = \lambda_3$ на бильярде есть всего три криволинейные траектории, лежащие на гиперболе h .

Утверждение. *Инвариант Фоменко–Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля бильярдной книжки $\mathbb{W}(2A_0, A_1)$, изображен на рис. 1, б.*

Доказательство. Пусть $\pi : Q^3 \rightarrow \mathbb{W}(2A_0, A_1)$ — каноническая проекция изоэнергетической поверхности на бильярдный стол, определенная формулой $\pi(x, v) = x$, где x — точка бильярдного стола, v — вектор скорости.

Рассмотрим в Q^3 поверхность уровня $\Lambda = \lambda_2$. Обозначим ее через P_B . Рассмотрим дугу эллипса e_2 . Фиксируем на ней точку. Такая точка, будучи оснащена касательным вектором скорости, лежит на P_B . Таких векторов скорости во внутренних точках дуги ровно два, а на границе — один, так как они должны быть отождествлены по закону отражения. Получаем, что прообраз $\pi^{-1}(e_2)$ всех точек дуги эллипса e_2 на P_B гомеоморфен окружности. Возьмем точку (x_0, v_0) этой окружности. Через точку x_0 дуги эллипса e_2 проведем дугу гиперболы из нашего софокусного семейства. Такая дуга пересечет цилиндр, склеенный из двух бильярдов A_0 , по окружности s . Рассмотрим прообраз точки $x \in s$, $x \neq x_0$, в P_B . Таких точек ровно четыре, так как через точку x проходят ровно две касательные к эллипсу e_2 . При этом при приближении точки x к точке x_0 четыре касательных вектора переходят в два. Следовательно, прообразом окружности s в поверхности P_B являются две восьмерки: нам необходимо отождествить две пары окружностей по двум точкам (образы которых — это точка x_0). На границе склейка восьмерок происходит одинаково, что приводит к тому, что поверхность P_B гомеоморфна особому слою атома В.

При увеличении параметра Λ каждая восьмерка распадается на две окружности: точки эллипса e_2 могут быть оснащены четырьмя векторами скорости. В результате бифуркация на уровне интеграла $\Lambda = \lambda_2$ описывается 3-атомом В. Дальнейшие бифуркации полностью аналогичны бифуркациям топологических бильярдов (доказательство см., например, в работах автора [5, 6]). Кратко поясним схему доказательства. Рассмотрим заполнение бильярда дугами l софокусных эллипсов. Оказывается, что множество точек (x, v) , таких, что $\pi(x, v) \in l$, $\Lambda(x, v) \in [b - \delta, b + \delta]$, гомеоморфно несвязному объединению двух экземпляров двумерного атома В. Для дуг гипербол, лежащих в объединении бильярдов A_0 , один экземпляр соответствует траекториям первого типа, а второй — второго. В результате торы, соответствующие траекториям первого типа, перестраиваются через атом В. Торы, соответствующие траекториям второго типа, перестраиваются через атом A^* . Это связано с тем, что вырожденному эллипсу — отрезку фокальной прямой — соответствует не двумерный атом В, а сложный комплекс. Однако если мы рассмотрим объединение близких к нему эллипсов, то в многообразии Q^3 эти точки будут описывать так называемую “перекрутку” (см. подробнее [5]), приводящую к образованию атома A^* .

Опишем вычисление меток. Напомним, что согласно правилам, указанным в книге [3], на граничных торах атомов выбираются циклы по правилам, соответствующим данным атомам. Напом-

ним эти правила для атомов A , B и A^* , фигурирующих в нашей молекуле. В качестве циклов λ на торах, соответствующих атомам A , выбираются циклы, стягивающиеся в данном полнотории в точку. В качестве циклов λ на граничных торах седловых атомов выбираются слои расслоения Зейфферта. Такие циклы должны переходить в циклы, гомологичные особой окружности, в том случае, если седловой атом не имеет звездочек, и наматываться на нее дважды в том случае, если звездочки есть. При этом циклы λ выбираются однозначно, а в случае седлового атома на таком цикле задана естественная ориентация потоком гамильтонова векторного поля. Проще говоря, ориентация на таких циклах должна совпадать с ориентацией критической траектории, которой эти циклы гомологичны. Дополняющие их циклы μ уже не определены однозначно. При этом на граничном торе атома A можно фиксировать ориентацию μ тем же потоком векторного поля. В случае седлового атома B циклы μ на различных торах граничных атомов должны выбираться согласованно, а именно они должны быть связаны условием существования трансверсального сечения к критической окружности, т.е. лежать на граничных окружностях двумерного атома B . В случае атома A^* циклы $\hat{\mu}$, лежащие на граничных окружностях трансверсального сечения — атома B , не подходят, поскольку один из них пересекает цикл λ дважды. На другом торе при этом таких циклов два. В качестве настоящих циклов μ на таком торе выбирается один из них, а на торе, где $\hat{\mu}$ пересекает λ дважды, выбирается цикл $\mu = \frac{\lambda + \hat{\mu}}{2}$. Далее фиксируем направление роста дополнительного интеграла и ориентацию Q^3 — это позволяет фиксировать ориентацию дополнительных циклов μ на седловых атомах и цикла λ на атоме A . В этом случае матрицы перехода на торах от одного базиса к другому — матрицы склейки — имеют определитель -1 . Однако при подсчете можно поступить так: фиксировать ориентацию цикла λ на каком-то атоме A , что зафиксирует ориентацию Q^3 . А дальше выбирать ориентации циклов таким образом, чтобы определители матриц склейки равнялись -1 . При этом циклы μ и $\hat{\mu}$ должны задавать единую ориентацию 2-атома B — трансверсального сечения 3-атома B и 3-атома A^* .

Проекция циклов на бильярдный стол изображены на рис. 2 (пунктиром обозначены дуги квадрик, которых касаются траектории или их продолжения). Поясним, что циклы μ на торах, соответствующих атому B , описывающему перестройку на уровне $\Lambda = \lambda_2$, выбраны как точки окружности s (см. выше построение бифуркации). Циклы μ и $\hat{\mu}$ на торах оставшихся седловых атомов выбраны как точки некоторого эллипса l . Выше было упомянуто, что такие точки задают граничные окружности некоторого двумерного атома B — трансверсального сечения к критической окружности (проекция которой лежит на фокальной прямой).

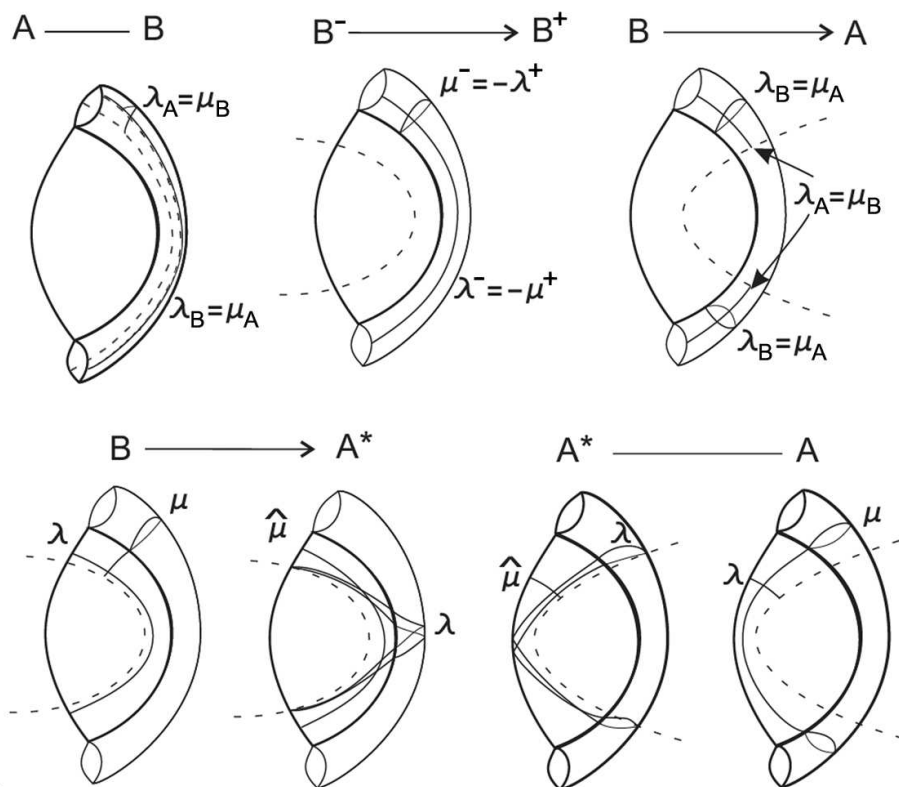


Рис. 2. Проекция на бильярдную книжку базисных циклов граничных торов атомов

Отметим, что при любом выборе ориентации на торе при $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$ и на торах, расположенных между атомами В и А при $b < \Lambda < \lambda_3$, соответствующих траекториям первого типа (на цилиндре из двух A_0), ориентации циклов λ_B и μ_A обязаны совпадать. Тогда получим, что $\lambda_B = \mu_A$, $\mu_B = \lambda_A$, а матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, на ребрах молекулы, соответствующих этим торам, получаем $r = 0$, $\varepsilon = 1$. Вклада в метку n такие матрицы склейки по определению не дают.

На торе между атомами В при $\lambda_2 < \Lambda < b$, соответствующем траекториям первого типа (на цилиндре из двух A_0), выберем ориентации циклов μ так, чтобы выполнялись соотношения $\lambda_+ = -\mu_-$, $\mu_+ = \lambda_-$. Матрица склейки примет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вышеприведенное соотношение полностью фиксирует ориентацию Q^3 . В этом случае на ребрах между седловыми атомами ориентации циклов μ_- , расположенных на граничных торах атома В, совпадают. Отсюда получаем, что между атомами В и A^* при $\lambda_2 < \Lambda < b$ на торе, соответствующем траекториям второго типа (расположенным на цилиндре из двух A_0 и на A_1), имеем $\lambda_+ = \lambda_- - 2\mu_-$, $\mu_+ = \pm\lambda_-$. Так как ориентация μ_- фиксирована, то необходимо выбрать ориентацию $\hat{\mu}$ так, чтобы определитель матрицы склейки был равен -1 . В результате получаем, что $\mu_+ = \frac{\lambda_+ + \hat{\mu}}{2} = \frac{\lambda_- - 2\mu_- + \hat{\mu}}{2} = \frac{\lambda_- - 2\mu_- \pm \lambda_-}{2} = -\mu_-$. В последнем равенстве использован тот факт, что если выбрано $\hat{\mu} = \lambda_-$, то определитель матрицы склейки равен 1. В итоге получаем $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Между атомами A^* и А при $b < \Lambda < \lambda_3$ на торе, соответствующем траекториям второго типа (расположенным на цилиндре из двух A_0 и на A_1), имеем $\lambda_+ = \lambda_- + \mu_-$, $\mu_+ = \hat{\mu} = \lambda_-$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из матриц склейки метки теперь восстанавливаются полностью. \square

Следствие. *Интегрируемая система Горячева–Чаплыгина–Сретенского [1], дополнительный интеграл которой имеет степень 3, кусочно-гладко лиувиллево эквивалентна в зоне энергии 6 (см. обозначения книги [1]) интегрируемой бильярдной книжке $\mathbb{B}(2A_0, A_1)$, дополнительный интеграл которой имеет степень 2.*

Доказательство. Доказательство сразу следует из сравнения меченых молекул и теоремы Фоменко–Цишанга (см. [4]): слоения Лиувилля двух интегрируемых систем лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их инварианты Фоменко–Цишанга (меченые молекулы) совпадают. \square

В работе [8] указан более полный список случаев понижения степени дополнительного интеграла гамильтоновой системы с помощью бильярдов. Более того, показано, что интегралы больших степеней сводятся к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу — параметру квадратики.

Автор приносит благодарность А. Т. Фоменко за множество ценных замечаний и внимание к работе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01303) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
2. Козлов В. В., Трещев Д. В. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
3. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.
4. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, № 3. 546–575.
5. Фокичева В. В. Топологическая классификация бильярдов в локально-плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадратики // Матем. сб. 2015. **206**, № 10. 127–176.
6. Ведюшкина В. В. Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов // Матем. сб. 2019. **210**, № 3. 17–74.
7. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. **209**, № 12. 17–56.
8. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В. Понижение степени интегралов гамильтоновых систем с помощью бильярдов // Докл. РАН. 2019. **486**, № 2. 151–155.

Поступила в редакцию
19.12.2018