УДК 510.25; 510.64

ОБОБЩЕННАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ И ПРИНЦИП МАРКОВА

А. Ю. Коновалов[1]

Определяются различные варианты понятия V-реализуемости для формул языка логики предикатов, основанные на использовании функций из множества V для интерпретации импликации и квантора всеобщности. Устанавливается, что принцип Маркова слабо V-реализуем, не является равномерно V-реализуемым и V-реализуем равномерно в области M, если множество $M \subseteq \mathbb{N}$ является V-перечислимым.

Ключевые слова: конструктивная семантика, реализуемость, абсолютная реализуемость, обобщенная реализуемость, принцип Маркова.

Various variants of the notion of the V-realizability for predicate formulas are defined, where indices of functions in the set V are used for interpreting the implication and the universal quantifier. It is proved that Markov's principle is weakly V-realizable, not uniformly V-realizable, and uniformly V-realizable in any V-enumerable domain $M \subseteq \mathbb{N}$.

Key words: constructive semantics, realizability, absolute realizability, generalized realizability, Markov's principle.

1. Принцип конструктивного подбора, или *принцип Маркова*, выражаемый предикатной формулой

$$\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)) \to (\neg\neg\exists x\,P(x) \to \exists x\,P(x)), \qquad \text{(MP)}$$

является одним из основных законов конструктивной логики, отличающим ее от интуиционистской логики. В контексте рекурсивной реализуемости принцип Маркова означает, что формула (MP) реализуема, если областью возможных значений переменной x является множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$. Возможность варьирования предметной области полностью исследована в работе [1]: доказано, что формула (MP) реализуема в некоторой области M тогда и только тогда, когда множество M рекурсивно-перечислимо.

В работах [2, 3] определены обобщения понятия рекурсивной реализуемости, в которых вместо индексов частично рекурсивных функций в качестве реализаций используются индексы частичных функций из более широких классов. Представляет интерес исследование вопроса о корректности принципа Маркова относительно различных вариантов обобщенной реализуемости.

2. Пусть V — некоторое счетное множество частичных функций натурального аргумента. Элементы множества V назовем V-функциями. Будем считать, что для каждого натурального числа n имеется нумерация всех n-местных V-функций, а именно определено множество индексов $\mathsf{I}_n^V \subseteq \mathbb{N}$ вместе с отображением, которое каждому натуральному числу $z \in \mathsf{I}_n^V$ ставит в соответствие n-местную V-функцию $\varphi_z^{V,n}$, и при этом всякая n-местная V-функция есть $\varphi_z^{V,n}$ для некоторого $z \in \mathsf{I}_n^V$. Будем говорить, что натуральное число z является *V-индексом* n-местной V-функции φ, если $z \in \mathsf{I}_n^V$ и $\varphi = \varphi_z^{V,n}$. При записи выражений вида $\varphi_z^{V,n}(t_1, \dots, t_n)$ обычно будем опускать верхний индекс n. Будем считать, что множество V вместе с вышеописанной нумерацией обладает следующими свойствами:

C1) множество V содержит все частично рекурсивные функции;

C2) если ψ есть n-местная V-функция, s — перестановка на множестве $\{1, \dots, n\}$, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \dots, x_n) \simeq \psi(x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)}),$$

является V-функцией;

[1]*Коновалов Александр Юрьевич* — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр. лаб. математических проблем искусственного интеллекта каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: konoval@yopmail.com.

Konovalov Aleksandr Yur'evich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Laboratory of Mathematical Problem of Artificial Intelligence.

C3) если ψ есть n-местная V-функция, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n),$$

является V-функцией;

C4) если ψ есть $(n+m)$-местная V-функция, $a_1, \ldots, a_m$ — натуральные числа, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m),$$

является V-функцией;

C5) если ψ есть $(n+1)$-местная V-функция, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu x\,[\psi(x_1, \ldots, x_n, x) = 0],$$

является V-функцией (μ — оператор минимизации);

C6) если ψ есть m-местная V-функция, $\psi_1, \ldots, \psi_m$ суть n-местные V-функции, то функция ψ', определенная условным равенством

$$\psi'(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

является V-функцией.

Кроме этого потребуем эффективного выполнения свойств C2–C6: а именно будем считать, что существует такая V-функция (своя для каждого из свойств C2–C6), которая по V-индексу функции ψ (V-индексам функций $\psi, \psi_1, \ldots, \psi_m$) находит некоторый V-индекс функции ψ'.

Отметим, что свойствами C1–C6 обладает множество всех частично рекурсивных функций с подходящей нумерацией. В работах [2, 3] приводятся такие нумерации всех арифметических и всех гиперарифметических функций, что свойствами C1–C6 обладают соответствующие классы функций.

3. Предикатные формулы строятся обычным образом из атомов $P(v_1, \ldots, v_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, а $v_1, \ldots, v_n$ — предметные переменные, при помощи логических констант $\top$, $\bot$, связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\forall$, $\exists$.

Пусть M — непустое подмножество натурального ряда. Следуя [4], n-местным обобщенным предикатом на множестве M будем называть всякую функцию типа $M^n \to 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A валентности n ставит в соответствие n-местный обобщенный предикат на множестве M. В этом случае отображение f будем называть M-оценкой формулы A. Временно введем в язык логики предикатов константы для обозначения элементов множества M. Формулы с этими константами будем называть предикатными формулами расширенного языка.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x, y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x, y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t)$, $\mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Для натурального числа e, замкнутой предикатной формулы A расширенного языка и M-оценки f формулы A определим отношение $e\, \mathbf{r}_f^V\, A$ (число e V-реализует формулу A при оценке f):

1) неверно $e\, \mathbf{r}_f^V\, \bot$;

2) верно $e\, \mathbf{r}_f^V\, \top$;

3) $e\, \mathbf{r}_f^V\, P(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1, \ldots, a_n)$, если P есть n-местная предикатная переменная;

4) $e\, \mathbf{r}_f^V\, (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\, \mathbf{r}_f^V\, \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\, \mathbf{r}_f^V\, \Psi$;

5) $e\, \mathbf{r}_f^V\, (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\, \mathbf{r}_f^V\, \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\, \mathbf{r}_f^V\, \Psi)$;

6) $e\, \mathbf{r}_f^V\, (\Phi \to \Psi) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}_1^V$ и для всех натуральных чисел s имеет место

$$s\, \mathbf{r}_f^V\, \Phi \Longrightarrow \text{определено } \varphi_e^V(s) \text{ и } \varphi_e^V(s)\, \mathbf{r}_f^V\, \Psi;$$

7) $e\, \mathbf{r}_f^V\, \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e \in M$ и $\mathsf{p}_2 e\, \mathbf{r}_f^V\, \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;

8) $e\, \mathbf{r}_f^V\, \forall x\, \Phi(x) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}_1^V$ и для всех $a \in M$ определено $\varphi_e^V(a)$ и имеет место $\varphi_e^V(a)\, \mathbf{r}_f^V\, \Phi(a)$.

Есть несколько способов определить V-реализуемость замкнутых предикатных формул на основании отношения $e\,\mathbf{r}_f^V\ A$:

замкнутую предикатную формулу A назовем *слабо V-реализуемой* (обозначение: $\mathbf{r}^V\ A$), если для любого непустого множества $M \subseteq \mathbb{N}$ и произвольной M-оценки f найдется такое натуральное число e, что $e\,\mathbf{r}_f^V\ A$;

замкнутую предикатную формулу A назовем *V-реализуемой равномерно в области M* (обозначение: $\mathbf{ur}_M^V\ A$), если найдется такое натуральное число e, что для любой M-оценки f имеет место $e\,\mathbf{r}_f^V\ A$;

замкнутую предикатную формулу A назовем *равномерно V-реализуемой* (обозначение: $\mathbf{ur}^V\ A$), если найдется такое натуральное число e, что для любого непустого множества $M \subseteq \mathbb{N}$ и произвольной M-оценки f имеет место $e\,\mathbf{r}_f^V\ A$.

4. Исследуем свойства формулы (MP) в контексте введенных понятий.

Теорема 1. *Формула* (MP) *является слабо V-реализуемой.*

Доказательство. Пусть $\varnothing \neq M \subseteq \mathbb{N}$ и f — некоторая M-оценка. Рассмотрим два случая.

1) Пусть для всех $a \in M$ имеет место $f(P)(a) = \varnothing$. Тогда для всех натуральных чисел e неверно, что $e\ \mathbf{r}_f^V\ \exists x\, P(x)$. Следовательно, для всех натуральных чисел e неверно, что $e\ \mathbf{r}_f^V\ \neg\neg\exists x\, P(x)$. Получаем, что для любого натурального числа $c \in \mathsf{I}_1^V$ имеет место $c\,\mathbf{r}_f^V\ (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x))$.

2) Предположим теперь, что существуют натуральные числа e и $a \in M$, для которых выполняется соотношение $e \in f(P)(a)$. Тогда имеет место $e\,\mathbf{r}_f^V\ P(a)$. Следовательно, справедливо $\mathsf{c}(a, e)\ \mathbf{r}_f^V\ \exists x\, P(x)$. Из свойства C1 следует, что найдется натуральное число c, для которого выполняется условное равенство $\varphi_c^V(x) \simeq \mathsf{c}(a, e)$. Нетрудно видеть, что имеет место $c\,\mathbf{r}_f^V\ (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x))$.

Таким образом, в обоих случаях для некоторого натурального числа c выполняется соотношение $c\ \mathbf{r}_f^V\ (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x))$. Из свойства C1 следует, что найдется натуральное число e, для которого выполняется условное равенство $\varphi_e^V(x) \simeq c$. Получаем $e\ \mathbf{r}_f^V\ (\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)) \to (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x)))$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Формула* (MP) *не является равномерно V-реализуемой.*

Доказательство. Предположим противное: существует такое натуральное число c, что для любого непустого множества $M \subseteq \mathbb{N}$ и произвольной M-оценки f имеет место

$$c\,\mathbf{r}_f^V\ (\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)) \to (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x))). \tag{1}$$

Зафиксируем натуральное число m и положим $M \rightleftharpoons \{m\}$. Определим M-оценку f: $f(P)(m) \rightleftharpoons \{0\}$. Для всех $m' \in M$ имеет место $0\,\mathbf{r}_f^V\ P(m')$, следовательно, $\mathsf{c}(0,0)\ \mathbf{r}_f^V\ (P(m') \vee \neg P(m'))$. Из свойства C1 получаем, что для некоторого $a \in \mathsf{I}_1^V$ выполняется условное равенство $\varphi_a^V(x) \simeq \mathsf{c}(0,0)$. Таким образом, имеет место

$$a\,\mathbf{r}_f^V\ \forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)). \tag{2}$$

Из (1), (2) следует, что определено значение $\varphi_c^V(a)$ и верно

$$\varphi_c^V(a)\,\mathbf{r}_f^V\ (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x)). \tag{3}$$

Отметим, что для всех натуральных чисел e имеет место

$$e\,\mathbf{r}_f^V\ \exists x\, P(x) \Longleftrightarrow e = \mathsf{c}(m, 0). \tag{4}$$

Фиксируем $b \in \mathsf{I}_1^V$. Из (4) следует $b\ \mathbf{r}_f^V\ \neg\neg\exists x\, P(x)$. Согласно (3) значение $\varphi_{\varphi_c^V(a)}^V(b)$ определено и имеет место

$$\varphi_{\varphi_c^V(a)}^V(b)\,\mathbf{r}_f^V\ \exists x\, P(x). \tag{5}$$

Из (4), (5) получаем

$$\mathsf{p}_1\varphi_{\varphi_c^V(a)}^V(b) = m. \tag{6}$$

В силу того что выбор числа m произволен, равенство (6) справедливо для любого m. Однако левая часть равенства (6) не зависит от m. Получили противоречие. Теорема доказана.

Подмножество натурального ряда M назовем *V-перечислимым*, если множество M есть область значений некоторой всюду определенной одноместной V-функции.

Теорема 3. *Пусть множество M непусто и V-перечислимо. Тогда формула* (MP) *является V-реализуемой равномерно в области M.*

Доказательство. Пусть ε — одноместная всюду определенная V-функция, для которой множество M есть область ее значений. Из свойств C5, C6 следует, что найдется такая V-функция h, что для всех $d \in \mathsf{I}_1^V$ значение $h(d)$ определено, верно $h(d) \in \mathsf{I}_0^V$ и имеет место

$$\varphi_{h(d)}^V \simeq \varepsilon(\mu n\,[\mathsf{p}_1\varphi_d^V(\varepsilon(n)) = 0]). \tag{7}$$

Из свойств C3, C6 получаем, что найдется такая V-функция g, что для всех $d \in \mathsf{I}_1^V$ значение $g(d)$ определено, верно $g(d) \in \mathsf{I}_1^V$ и для всех x имеет место

$$\varphi_{g(d)}^V(x) \simeq \mathsf{c}(\varphi_{h(d)}^V, \mathsf{p}_2\varphi_d^V(\varphi_{h(d)}^V)). \tag{8}$$

Пусть f — некоторая M-оценка, d — такое натуральное число, что справедливо

$$d\ \mathbf{r}_f^V\ \forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)). \tag{9}$$

Тогда для всех $a \in M$ определено $\varphi_d^V(a)$ и выполняется соотношение $\mathsf{p}_1\varphi_d^V(a) = 0$, если и только если верно $e\ \mathbf{r}_f^V\ P(a)$ для некоторого натурального числа e. Следовательно, для всех натуральных чисел n определено $\varphi_d^V(\varepsilon(n))$ и имеет место

$$\mathsf{p}_1\varphi_d^V(\varepsilon(n)) = 0 \Longleftrightarrow \exists e\,[e\ \mathbf{r}_f^V\ P(\varepsilon(n))]. \tag{10}$$

Пусть c — такое натуральное число, что верно

$$c\ \mathbf{r}_f^V\ \neg\neg\exists x\, P(x). \tag{11}$$

Тогда найдутся такие натуральные числа e и $a \in M$, что имеет место $e\ \mathbf{r}_f^V\ P(a)$. Следовательно, верно $e\ \mathbf{r}_f^V\ P(\varepsilon(n))$ для некоторых натуральных чисел e, n. Таким образом, из (10) получаем, что определено $\mu n\,[\mathsf{p}_1\varphi_d^V(\varepsilon(n)) = 0]$. Значит, определено $\varepsilon(\mu n\,[\mathsf{p}_1\varphi_d^V(\varepsilon(n)) = 0])$. Из (7) получаем

$$\varphi_{h(d)}^V = \varepsilon(\mu n\,[\mathsf{p}_1\varphi_d^V(\varepsilon(n)) = 0]).$$

В силу того что имеет место $\mathsf{p}_1\varphi_d^V(\varphi_{h(d)}^V) = 0$, из (9) следует

$$\mathsf{p}_2\varphi_d^V(\varphi_{h(d)}^V)\ \mathbf{r}_f^V\ P(\varphi_{h(d)}^V). \tag{12}$$

Из (12) получаем

$$\mathsf{c}(\varphi_{h(d)}^V, \mathsf{p}_2\varphi_d^V(\varphi_{h(d)}^V))\ \mathbf{r}_f^V\ \exists x\, P(x). \tag{13}$$

На основании (8), (13) заключаем, что верно

$$\varphi_{g(d)}^V(c)\ \mathbf{r}_f^V\ \exists x\, P(x). \tag{14}$$

Получаем, что для всех натуральных чисел c если выполняется (11), то имеет место (14). Таким образом,

$$g(d)\ \mathbf{r}_f^V\ (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x)). \tag{15}$$

Значит, для всех натуральных чисел d если выполняется (9), то верно (15). Таким образом, имеет место

$$e\ \mathbf{r}_f^V\ (\forall x\,(P(x) \vee \neg P(x)) \to (\neg\neg\exists x\, P(x) \to \exists x\, P(x))),$$

где e — некоторый V-индекс функции g. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заславский И.Д., Цейтин Г.С.* К вопросу об обобщениях принципа конструктивного подбора // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1964. **72**. 344–347.

2. *Коновалов А.Ю., Плиско В.Е.* О гиперарифметической реализуемости // Матем. заметки. 2015. **98**, № 5. 725–746.

3. *Коновалов А.Ю.* Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 1. 52–56.

4. *Плиско В.Е.* Абсолютная реализуемость предикатных формул // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. **47**, № 2. 315–334.

Поступила в редакцию
11.07.2018

УДК 517.938.5

СЛОЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ БИЛЬЯРДНОЙ КНИЖКИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ СЛУЧАЙ ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

В. В. Ведюшкина[1]

Вычислен инвариант интересного случая интегрируемой бильярдной книжки и показано, что на некоторой изоэнергетической поверхности такая книжка моделирует динамику системы Горячева–Чаплыгина.

Ключевые слова: интегрируемая система, бильярд, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга.

The Fomenko-Zieshang invariant of an interesting case of an integrable billiard book is calculated and it is shown that such a book models the dynamics of Goryachev–Chaplygin integrable case on a certain isoenergy surface.

Key words: integrable system, billiard, Liouville equivalence, Fomenko–Zieschang invariant.

Пусть дана замкнутая выпуклая кусочно-гладкая кривая на плоскости (при этом все углы в точках излома равны $\pi/2$). Бильярд описывает движение материальной точки внутри компактной области Ω, ограниченной этой кривой, а на границе определено естественное абсолютно упругое отражение (угол падения равен углу отражения), тогда в точках излома границы движение продолжается по непрерывности (в угле после удара точка продолжает движение в противоположном направлении по тому же отрезку, по которому попала в угол).

Интегрируемость бильярда в эллипсе была замечена Дж. Д. Биркгофом [1]. Оказалось, что для любой фиксированной траектории-ломаной ее звенья лежат на прямых, касательных к некоторой квадрике (эллипсу или гиперболе), софокусной с граничным эллипсом. Таким образом, помимо длины вектора скорости (который сохраняется при абсолютно упругих отражениях на границе) вдоль траекторий сохраняется параметр софокусной квадрики, т.е. система обладает двумя независимыми интегралами. В книге В. В. Козлова, Д. В. Трещева [2] замечено, что интегрируемость бильярда сохранится, если перейти к плоским областям, которые ограничены дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства и на границе которых нет точек излома с углами $\frac{3\pi}{2}$. В этом случае все углы в точках излома равны $\frac{\pi}{2}$, поскольку известно, что софокусные квадрики всегда пересекаются под прямыми углами.

Определение. Пусть (M^4, ω, H, f) и $(\tilde{M}^4, \tilde{\omega}, \tilde{H}, \tilde{f})$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M^4 и $\tilde{M}^4$. Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q^3 = (x \in M^4 | H(x) = c)$ и $\tilde{Q}^3 = (x \in \tilde{M}^4 | \tilde{H}(x) = \tilde{c})$, снабженные слоениями Лиувилля. Интегрируемые системы $v = sgrad\, H$ и $\tilde{v} = sgrad\, \tilde{H}$ называются (*кусочно-гладко*) *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный (кусочно-гладкий) диффеоморфизм $Q^3 \to \tilde{Q}^3$, сохраняющий ориентацию 3-многообразий Q^3 и $\tilde{Q}^3$ и ориентацию всех критических окружностей.

---

[1] *Ведюшкина Виктория Викторовна* — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: arinir@yandex.ru.

Vedyushkina Viktoria Viktorovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Application.