Краткие сообщения

УДК 515.122.4, 515.123

СОХРАНЕНИЕ ФАКТОРИЗУЕМОСТИ G-ПРОСТРАНСТВ ЭКВИВАРИАНТНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Е. В. Мартьянов[1]

В работе доказывается $\mathbb{R}$-факторизуемость G-пространства, которое является эквивариантным образом $\mathbb{R}$-факторизуемого G-пространства с d-открыто действующей ω-узкой P-группой. Показано, что $\mathbb{R}$-факторизуемость, m-факторизуемость и M-факторизуемость G-пространств сохраняются d-открытыми эквивариантными отображениями. Также доказано, что $\mathbb{R}$-факторизуемость топологических групп сохраняется d-открытыми гомоморфизмами.

Ключевые слова: топологическая группа, G-пространство, факторизуемость, равномерность, d-открытое действие.

In this paper we prove the $\mathbb{R}$-factorizability of an equivariant image of an $\mathbb{R}$-factorizable G-space with a d-open action of an ω-narrow P-group. It is shown that the $\mathbb{R}$-factorizability, m-factorizability, and M-factorizability of G-spaces hold in the case of d-open equivariant images. It is proved that the $\mathbb{R}$-factorizability of topological groups holds under d-open homomorphisms.

Key words: topological group, G-space, factorizability, uniformity, d-open action.

1. Введение. В работе [1] был поставлен вопрос (проблема 5.1): пусть $\pi\colon G \to H$ — непрерывный гомоморфизм $\mathbb{R}$-факторизуемой группы G на группу H, будет ли группа H $\mathbb{R}$-факторизуемой? Существуют два подхода к исследованию данной проблемы. Первый подход предполагает наложение дополнительных условий на топологическую группу. Так, из следствия 8.6.20 работы [2] имеем, что непрерывный гомоморфный образ $\mathbb{R}$-факторизуемой P-группы является $\mathbb{R}$-факторизуемой топологической группой. Второй подход заключается в наложении дополнительных условий на непрерывный гомоморфизм. Так, по теореме 5.19 работы [1] $\mathbb{R}$-факторизуемость топологических групп сохраняется открытыми гомоморфизмами. В [3] введено понятие $\mathbb{R}$-факторизуемого G-пространства (определение 1), естественным образом распространяющее $\mathbb{R}$-факторизуемость с топологических групп на G-пространства. В [4] дана характеризация $\mathbb{R}$-факторизуемых G-пространств для случая d-открытого действия: G-пространство с ω-узкой группой является $\mathbb{R}$-факторизуемым тогда и только тогда, когда оно обладает свойством ω-U (теорема 2). Также в работе [4] введены понятия m-факторизуемости и M-факторизуемости G-пространств (определение 3), обобщающие аналогичные понятия для топологических групп. Поэтому естественным образом возникает вопрос о сохранении $\mathbb{R}$-факторизуемости, m-факторизуемости и M-факторизуемости G-пространств эквивариантными отображениями.

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1, 2. Теорема 1 обобщает упомянутое следствие 8.6.20 [2] для случая d-открытого действия ω-узкой P-группы. Теорема 2 показывает, что $\mathbb{R}$-факторизуемость, m-факторизуемость и M-факторизуемость G-пространств сохраняются d-открытыми эквивариантными отображениями (обе компоненты эквивариантного отображения являются d-открытыми отображениями). Как следствие $\mathbb{R}$-факторизуемость топологических групп сохраняется d-открытыми гомоморфизмами (следствие 2). В работе [5] введено понятие G-факторпространства (определение 2), обобщающее понятия равномерного факторпространства и топологической факторгруппы. Следствие 1 настоящей работы обобщает теорему 5.19 [1]: если G-пространство с d-открыто действующей ω-узкой (ω-уравновешенной) группой является $\mathbb{R}$-факторизуемым (соответственно m-факторизуемым, M-факторизуемым), то его G-факторпространство также является $\mathbb{R}$-факторизуемым (соответственно m-факторизуемым, M-факторизуемым).

Необходимые определения и обозначения, касающиеся G-пространств, можно найти в работах [3, 6]. С понятием G-тихоновости и эквиравномерности можно ознакомиться в работе [7], где доказано, что наличие эквиравномерности для G-пространства (G, X, α) эквивалентно его G-тихоновости.

[1] *Мартьянов Евгений Вячеславович* — асп. каф. общей топологии и геометрии мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: binom00@yandex.ru.

Martyanov Evgeny Vyacheslavovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of General Topology and Geometry.

В работе [8] установлено, что всякое G-пространство с d-открытым действием является G-тихоновским. Равномерные структуры вводятся через семейства покрытий. Необходимые сведения о равномерностях можно найти в [9].

Через $\mathfrak{A} \bigwedge \mathfrak{A}'$ обозначается точная нижняя грань псевдоравномерностей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$. Мощность множества X будем обозначать $|X|$. Под $w(X)$ (соответственно $w(\mathfrak{A})$) понимаем вес пространства X (соответственно вес псевдоравномерности $\mathfrak{A}$). Плотность пространства X обозначается через $d(X)$, а характер — через $\chi(X)$. Сведения о топологических группах можно почерпнуть из [2]. Для топологической группы G через $N_G(e)$ обозначается семейство открытых окрестностей ее единицы. Все пространства предполагаются тихоновскими, отображения — непрерывными. Под окрестностью понимается открытая окрестность. Отображения равномерных пространств равномерно непрерывны.

2. Сохранение факторизуемости эквивариантными отображениями. В настоящей работе рассматриваются G-пространства с d-открытым действием. В [10] показано, что при d-открытом действии фазовое пространство X G-пространства (G, X, α) является прямой суммой компонент действия (открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых является замыканием орбиты произвольной точки). Всякое G-пространство с d-открытым действием является G-тихоновским (см. доказательство теоремы 3 [8] и предложение 4 [10]). Одна компонента действия сохраняется произвольными эквивариантными отображениями (π, f), где π и f — сюръекции. Всюду далее будем считать, что фазовое пространство имеет одну компоненту действия, т.е. $X = \mathrm{cl}(Gx)$.

Прежде чем приступить к исследованию факторизуемости G-пространств, напомним некоторые понятия и определения. Если $\theta\colon G \to G/N$ — естественный гомоморфизм G на G/N, то псевдоравномерность $\mathfrak{A}'_N$ на множестве X имеет базу, состоящую из покрытий $\varkappa_{\theta^{-1}(O)} = \{\theta^{-1}(O)x | x \in X\}$, $O \in N_{G/N}(e)$. Пусть $\mathfrak{A}_X^{\max}$ — максимальная эквиравномерность на X, тогда псевдоравномерность $(\mathfrak{A}_X^{\max} \bigwedge \mathfrak{A}'_N)$ будем обозначать $\mathfrak{A}_N^{\max}$.

Определение 1 [3]. G-пространство (G, X, α) называется $\mathbb{R}$-*факторизуемым*, если для любой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ существуют эквивариантное отображение $(\pi, k)\colon (G, X, \alpha) \to (K, Y, \beta)$ в сепарабельное метризуемое G-пространство и непрерывная функция $l\colon Y \to \mathbb{R}$, такие, что $f = l \circ k$.

Определение 2 [5]. G-пространство $(G/N, X/\mathfrak{A}_N^{\max}, \beta)$ называется *G-факторпространством* G-тихоновского пространства (G, X, α), а эквивариантное отображение

$$(\theta, h)\colon (G, X, \alpha) \to (G/N, X/\mathfrak{A}_N^{\max}, \beta)$$

— *G-факторотображением*, где h — равномерное факторотображение.

Лемма 1. *Пусть (G, X, α) — G-пространство с* d*-открытым действием. Тогда для любого его G-факторпространства $(G/N, X/\mathfrak{A}_N^{\max}, \beta)$ верны неравенства*

$$w(\mathfrak{A}_N^{\max}) \leqslant \chi(G/N), d(X/\mathfrak{A}_N^{\max}) \leqslant d(G/N).$$

В частности, $(G/N, X/\mathfrak{A}_N^{\max}, \beta)$ — сепарабельное метризуемое G-пространство тогда и только тогда, когда G/N — сепарабельная метризуемая группа.

Доказательство. Неравенство $w(\mathfrak{A}_N^{\max}) \leqslant \chi(G/N)$ следует из теоремы 4 [5] (базу $\mathfrak{A}_N^{\max}$ составляют покрытия вида $\gamma_{\theta^{-1}(V)} = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\theta^{-1}(V)x)) | x \in X\}$, $V \in \mathfrak{B}_{G/N}$, где $\mathfrak{B}_{G/N}$ — база единицы группы G/N, такая, что $|\mathfrak{B}_{G/N}| = \chi(G/N)$). Неравенство $d(X/\mathfrak{A}_N^{\max}) \leqslant d(G/N)$ следует из леммы 2.15 [3] и того факта, что G-факторотображение (θ, h) сохраняет одну компоненту действия (θ, h — сюръективные отображения). В частности, если G/N является сепарабельной метризуемой группой, то метризуемость равномерного факторпространства $X/\mathfrak{A}_N^{\max}$ следует из предложения 1 [11] и теоремы 8.1.21 [12], а сепарабельность — из неравенства $d(X/\mathfrak{A}_N^{\max}) \leqslant d(G/N)$.□

Теорема 1. *Пусть (π, f) — эквивариантное отображение G-пространства (G, X, α) на G-пространство (K, Y, β), где G и K — ω-узкие P-группы, α и β —* d*-открытые действия. Тогда если (G, X, α) $\mathbb{R}$-факторизуемо, то и (K, Y, β) $\mathbb{R}$-факторизуемо.*

Доказательство. Пусть (G, X, α) — $\mathbb{R}$-факторизуемое G-пространство с d-открытым действием ω-узкой P-группы. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию h на Y, тогда функция $h \circ f$ непрерывна на X. Существуют эквивариантное отображение $(\tau, k)\colon (G, X, \alpha) \to (H, Z, \gamma)$ на сепарабельное метризуемое G-пространство и непрерывная функция l на Z, причем $h \circ f = l \circ k$. Сепарабельная метризуемая группа H имеет счетный псевдохарактер. Из доказательства леммы 4.4.2 [2] следует, что группа G/N является счетной и дискретной, где N — ядро гомоморфизма τ.

Пусть $\mathrm{cl}(\pi(N)) = M$, по предложению 1 [5] существует G-факторотображение $(\zeta, q)\colon (K, Y, \beta) \to (K/M, Y/\mathfrak{A}_M^{\max}, \beta')$. В силу теоремы 4 [5] действие β' d-открыто. Зафиксируем произвольный элемент $y = f(x) \in Y = f(X)$. Для любого $n \in N$ имеем $(h \circ \beta_y)(\pi(n)) = h(\pi(n)f(x)) = h(f(nx)) =$

$l(k(nx)) = l(\tau(n)k(x)) = l(k(x)) = h(f(x)) = (h \circ \beta_y)(e)$. Следовательно, ограничение функции $h \circ \beta_y$ на множестве $\pi(N)$ является постоянной функцией. В силу непрерывности функции $h \circ \beta_y$ имеем $(h \circ \beta_y)(M) = (h \circ \beta_y)(e)$ для любого $y \in Y$. Так как $N \subseteq \mathfrak{Ker}(\zeta \circ \pi)$, то существует непрерывный эпиморфизм $\pi'\colon G/N \to K/M$ и верно равенство $\zeta \circ \pi = \pi' \circ \eta$, где η — естественный гомоморфизм G на факторгруппу G/N. Группа K/M является P-группой как факторгруппа P-группы K (лемма 4.4.1 [2]). Счетность группы K/M следует из счетности группы G/N. Следовательно, счетная P-группа K/M является дискретной, а значит, и сепарабельной метризуемой группой. По лемме 1 G-пространство $(K/M, Y/\mathfrak{A}_M^{\max}, \beta')$ сепарабельное метризуемое.

Рассмотрим открытое в Y множество $W_{\varepsilon/2} = h^{-1}(O_{\varepsilon/2}(h(y)))$. Так как действие β непрерывно, то существует окрестность $V \in N_K(e)$, такая, что $Vy \subseteq W_{\varepsilon/2}$. По доказанному выше ($h(My) = h(y)$ для любого $y \in Y$) получаем $VMy \subseteq W_{\varepsilon/2}$ (M — нормальный делитель), значит, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(VMy)) \subseteq \mathrm{cl}(W_{\varepsilon/2}) \subseteq W_\varepsilon$. Из доказательства леммы 3 [13] следует, что для окрестности $V \in N_K(e)$ найдется окрестность $O \in N_K(e)$ и выполняется включение $\mathrm{St}(y, \gamma_{OM}) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(VMy))$ для всех $y \in Y$. Таким образом, h является непрерывной функцией на пространстве $(Y, \tau_{\mathfrak{A}_M^{\max}})$, где $\tau_{\mathfrak{A}_M^{\max}}$ — топология, индуцированная псевдоравномерностью $\mathfrak{A}_M^{\max}$. По лемме 3 [14] существует непрерывная функция $h'\colon Y/\mathfrak{A}_M^{\max} \to \mathbb{R}$, такая, что $h = h' \circ q$.$\square$

Замечание. Из доказательства теоремы 1 следует, что G-факторпространство $(K/M, Y/\mathfrak{A}_M^{\max}, \beta')$ является естественным действием счетной дискретной группы на своем факторпространстве (действие β' открытое и транзитивное). В силу дискретности пространства $Y/\mathfrak{A}_M^{\max}$ для существования и непрерывности функции h' достаточно доказать равенство $h(My) = h(y)$, $y \in Y$. В самом деле, так как действие β' открытое, то базу псевдоравномерности $\mathfrak{A}_M^{\max}$ составляют покрытия вида $\varkappa_{OM} = \{OMy | y \in Y\}$, $O \in N_K(e)$ (теорема 4 [5]). В этом случае произвольная точка $[y] \in Y/\mathfrak{A}_M^{\max}$ имеет вид $[y] = \bigcap\{\mathrm{St}(y, \varkappa_{OM}) | O \in N_K(e)\} = \bigcap\{OMy | O \in N_K(e)\}$ (см. доказательство теоремы 2 работы [4]). Из дискретности группы K/M следует $M \in N_K(e)$, а значит, верно равенство $[y] = My$, $y \in Y$.

Лемма 2. *Образ ω-уравновешенной группы при* d*-открытом гомоморфизме является ω-уравновешенной группой.*

Доказательство. Рассмотрим d-открытый гомоморфизм π ω-уравновешенной группы G на группу K. Возьмем произвольную окрестность $W \in N_K(e)$, тогда существует окрестность $O \in N_K(e)$, такая, что $\mathrm{cl}(O) \subseteq W$. По определению ω-уравновешенной группы для окрестности $\pi^{-1}(O) \in N_G(e)$ существует счетное семейство A_G окрестностей единицы, такое, что для $x \in \pi^{-1}(y)$, $y \in K$ найдется окрестность $V \in A_G$, удовлетворяющая условию $xVx^{-1} \subseteq \pi^{-1}(O)$. Положим $A_K = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi(V))) | V \in A_G\}$. Покажем, что A_K — искомая счетная система окрестностей единицы в K для $W \in N_K(e)$. Очевидно, A_K — счетное семейство и $A_K \subseteq N_K(e)$, так как гомоморфизм π d-открыт.

Из последовательности равенств и включений

$$y(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi(V))))y^{-1} \subseteq y(\mathrm{cl}(\pi(V)))y^{-1} = \mathrm{cl}(y\pi(V)y^{-1}) = \mathrm{cl}(\pi(xVx^{-1})) \subseteq \mathrm{cl}(O) \subseteq W$$

получаем требуемое. $\square$

Теорема 2. *Пусть (π, f) — эквивариантное отображение m-факторизуемого (соответственно $\mathbb{R}$-факторизуемого, M-факторизуемого) G-пространства (G, X, α) на G-пространство (K, Y, β), причем π, f —* d*-открытые отображения, α —* d*-открытое действие, G — ω-узкая (ω-уравновешенная) группа. Тогда (K, Y, β) — m-факторизуемое (соответственно $\mathbb{R}$-факторизуемое, M-факторизуемое) G-пространство.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая m-факторизуемости (M-факторизуемости), случай $\mathbb{R}$-факторизуемости доказывается аналогично. Пусть $(\pi, f)\colon (G, X, \alpha) \to (K, Y, \beta)$ — указанное в формулировке эквивариантное отображение. Так как $K = \pi(G)$ и G — ω-узкая (ω-уравновешенная) группа, то по предложению 3.4.2 [2] (лемме 2) K является ω-узкой (ω-уравновешенной) группой. Нетрудно доказать, что действие β d-открыто (по аналогии с доказательством предложения 2 [13]). Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $h\colon Y \to M$, где M — метрическое пространство. Из теоремы 4 [4] следует, что существует счетное семейство $A_{h \circ f} = \{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ окрестностей единицы группы G, такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $y = f(x) \in Y$ найдется U_n и выполняется соотношение $(h \circ f)(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U_n x))) \subseteq O_{\varepsilon/2}(h(y))$.

По условию гомоморфизм $\pi\colon G \to K$ является d-открытым, значит, $e \in \pi(U_n) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi(U_n)))$. Рассмотрим счетное семейство $A_h = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi(U_n))) | n \in \mathbb{N}\} \subset N_K(e)$. В силу непрерывности отображения $\beta_y = \beta(-, y)\colon K \to Y$ имеем $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi(U_n)))y \subseteq \mathrm{cl}(\pi(U_n))y \subseteq \mathrm{cl}(\pi(U_n)y)$. С учетом d-открытости α получаем

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi(U_n)))y)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi(U_n)y)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(U_n x))) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U_n x))))).$$

Из непрерывности h следует соотношение

$$h(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\pi(U_n)))y))) \subseteq h(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U_n x)))))) \subseteq$$

$$\subseteq \mathrm{cl}((h \circ f)(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U_n x)))) \subseteq O_\varepsilon(h(y)).$$

Таким образом, G-пространство (K, Y, β) удовлетворяет сильному свойству ω-U. По теореме 4 [4] G-пространство (K, Y, β) m-факторизуемо (M-факторизуемо). □

Следствие 1. *Пусть (G, X, α) — G-пространство с* d*-открытым действием ω-узкой (ω-уравновешенной) группы. Тогда если G-пространство (G, X, α) m-факторизуемо (соответственно $\mathbb{R}$-факторизуемо, M-факторизуемо), то и G-факторпространство $(G/N, X/\mathfrak{A}_N^{\max}, \beta)$ m-факторизуемо (соответственно $\mathbb{R}$-факторизуемо, M-факторизуемо).*

Доказательство. Заметим, что естественный гомоморфизм $\pi\colon G \to G/N$ является открытым, а значит, и d-открытым. По теореме 4 [5] β — d-открытое действие. Нетрудно доказать, что равномерное факторотображение $h\colon X \to X/\mathfrak{A}_N^{\max}$ является d-открытым (см. доказательство предложения 2 [13]). Таким образом, $(\pi, h)\colon (G, X, \alpha) \to (G/N, X/\mathfrak{A}_N^{\max}, \beta)$ — эквивариантное отображение G-пространства (G, X, α) на G-факторпространство $(G/N, X/\mathfrak{A}_N^{\max}, \beta)$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 2. □

Следствие 2. *Образ $\mathbb{R}$-факторизуемой топологической группы при* d*-открытом гомоморфизме $\mathbb{R}$-факторизуем.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon G \to H$ — d-открытый гомоморфизм $\mathbb{R}$-факторизуемой группы G на группу H. Топологические группы G и H действуют на себя левыми сдвигами α_G и α_H соответственно. Эти действия открыты и транзитивны. Из примера 3.3 [3] следует $\mathbb{R}$-факторизуемость G-пространства (G, G, α_G). По предложению 8.1.3 [2] G — ω-узкая группа. Очевидно, что (π, π) — эквивариантное отображение G-пространства (G, G, α_G) на G-пространство (H, H, α_H). По теореме 2 G-пространство (H, H, α_H) является $\mathbb{R}$-факторизуемым, а из примера 3.3 [3] следует, что H — $\mathbb{R}$-факторизуемая топологическая группа. □

Автор выражает благодарность профессору К. Л. Козлову за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15–01–05369.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tkachenko M.G.* Introduction to topological groups // Topol. and its Appl. 1998. **86**, N 3. 179–231.
2. *Arhangel'skii A.V., Tkachenko M.G.* Topological groups and related structures. Paris: Atlantis Press, 2008.
3. *Kozlov K.L.* $\mathbb{R}$-factorizable G-spaces // Topol. and its Appl. 2017. **227**, N 3. 146–164.
4. *Мартьянов Е.В.* Характеризация $\mathbb{R}$-факторизуемых G-пространств // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 2. 7–12.
5. *Мартьянов Е.В.* Эквиравномерные факторпространства // Матем. заметки. 2018. **104**, № 6. 872–894.
6. *Vries J.De.* Topological transformation groups 1. A categorical approach. Amsterdam: Mathematisch centrum, 1975.
7. *Megrelishvili M.G.* Compactification and factorization in the category of G-spaces // Categorical Topology and its Relation to Analysis, Algebra and Combinatorics / Ed. by J. Adamek, S. MacLane. Singapore: World Scientifics, 1989. 220–237.
8. *Козлов К.Л., Чатырко В.А.* О бикомпактных G-расширениях // Матем. заметки. 2005. **78**, № 5. 695–709.
9. *Isbell J.R.* Uniform Spaces // Math. Surveys. Vol. 12. American Mathematical Society. Providence, RI, 1964.
10. *Chatyrko V.A., Kozlov K.L.* The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions // Proc. Ninth Prague Topological Symposium (Prague, Czech Republic, 2001). Toronto: Topol. Atlas, 2002. 15–21.
11. *Kulpa W.* Factorization and inverse expansion theorems for uniformities // Colloq. Math. 1970. **21**, N 2. 217–227.
12. *Энгелькинг Р.* Общая топология / Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
13. *Козлов К.Л., Чатырко В.А.* Топологические группы преобразований и компакты Дугунджи // Матем. сб. 2010. **201**, № 1. 103–128.
14. *Мартьянов Е.В.* $\mathbb{R}$-факторизуемость G-пространств в категории **G-Tych** // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. **83**, № 2. 126–141.

Поступила в редакцию
23.05.2018