

3. *Fujiwara K., Ando Y., Maekawa Z.* Noise control by barriers. Part 2: Noise reduction by an absorptive barrier // *Appl. Acoustics*. 1977. **10**. 167–179.
4. *Meixner J.* Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Schirmen // *Ann. Phys.* 1949. **6**. 2–9.
5. *Pierce A.D.* Acoustics. An introduction to its physical principles and applications. N.Y.: McGraw-Hill, 1981.
6. *Morse M., Ingard K.U.* Linear Acoustic Theory: Encyclopedia of Physics / Ed. by S. Flugge. Vol. XI/1. Acoustics I. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
7. *Peters A.S., Stoker J.J.* A uniqueness theorem and a new solution for Sommerfeld's and other diffraction problems // *Communs Pure and Appl. Math.* 1954. **7**, N 3. 565–585.
8. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics. N.Y.: Pergamon Press, 1959 (*Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973).
9. *Исраилов М.Ш.* Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях // *Изв. РАН. Механ. твердого тела*. 2013. **3**. 121–134.
10. *Исраилов М.Ш.* Дифракция плоских звуковых волн на “твердо-мягкой” полуплоскости // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2018. № 4. 34–40.
11. *Hohenwarter D.* Railway noise propagation models // *J. Sound and Vibr.* 1990. **141**, N 3. 17–41.
12. *Исраилов М.Ш., Акчаматова Л.Р., Абдуллаев А.М.* Исследование гашения шума барьерами с различающимися звукопоглощающими свойствами сторон // *Изв. Чечен. гос ун-та*. 2017. **3**. 21–28.

Поступила в редакцию
16.05.2018

УДК 532.591, 531.5.031

ДИНАМИКА САНЕЙ ЧАПЛЫГИНА НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

А. Ю. Шамин¹

В работе получены уравнения движения саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости с трением. Представлена геометрическая интерпретация безотрывного движения; доказано, что движение саней прекращается за конечное время; отмечены некоторые свойства движения.

Ключевые слова: сани Чаплыгина, сухое трение.

The equations of motion of the Chaplygin sleigh on a horizontal plane with friction are obtained in this paper. A geometric interpretation of the continuous motion is presented; it is proved that the movement of the sleigh stops in a finite time.

Key words: Chaplygin sleigh, dry friction.

1. Введение. Исследования динамики механических систем с трением представляют большой интерес для науки и техники, поскольку при проектировании различного рода механизмов идеализированные модели не всегда корректно описывают динамику системы и не могут отразить все важные эффекты. Механические системы с трением рассматривались в работах [1, 2], в частности динамика саней Чаплыгина в неголономной постановке с вязким трением изучалась в [3, 4]. В постановке без трения задача исследовалась С.А. Чаплыгиным в работе [5, т. 1, с. 15–25].

В настоящей работе рассматриваются сани Чаплыгина с сухим трением в неголономной постановке. Предложен качественный анализ движения саней: получены оценки времени движения, рассмотрены условия безотрывности.

2. Постановка задачи. Рассматривается механическая система, называемая санями Чаплыгина, представляющая собой треногу, опирающуюся на шероховатую неподвижную горизонтальную плоскость *Oxy* в точках *A, B, C*, где треугольник $\triangle ABC$ — равносторонний со стороной $AB = a$.

¹ Шамин Александр Юрьевич — асп. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: Shamin_ay@mail.ru.

Shamin Alexander Yur'evich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Ножки саней AA' , BB' , CC' перпендикулярны плоскости Oxy , длина ножек одинакова и равна h , конец ножки CC' снабжен полукруглым лезвием (коньком).

Центр масс S находится на высоте h над плоскостью, в центре треугольника $\Delta A'B'C'$. Введем подвижный репер $De_1e_2e_3$ так, что $\mathbf{DS} = he_z$, $\mathbf{e}_1 \parallel DC$, \mathbf{e}_2 лежит в плоскости Oxy , $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z — вектор восходящей вертикали.

Движение саней стеснено голономными связями

$$(\mathbf{v}_A, \mathbf{e}_z) = (\mathbf{v}_B, \mathbf{e}_z) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C$ — скорости точек A, B, C , и неголономной связью

$$(\mathbf{v}_C, \mathbf{e}_2) = 0 \tag{2}$$

(конек может скользить только вдоль направления \mathbf{e}_1).

На сани действует сила тяжести $\mathbf{P} = -Mg\mathbf{e}_z$, где M — масса саней. Шероховатость горизонтальной плоскости моделируется силами сухого трения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i &= -kN_i \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}, \quad \mathbf{v}_i \neq 0; \\ \mathbf{F}_i &= 0, \quad \mathbf{v}_i = 0, \quad i \in \{A, B, C\}, \end{aligned} \tag{3}$$

где N_i — нормальные реакции плоскости, k — коэффициент трения. Сани считаются сбалансированными: один из собственных векторов тензора инерции J_S коллинеарен \mathbf{e}_3 с соответствующим моментом инерции J .

3. Уравнения движения. Для вывода уравнений движения воспользуемся общими теоремами динамики. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ угловую скорость саней и через \mathbf{v}_S скорость центра масс. Неголономная связь (2) реализуется реакцией $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d(M\mathbf{v}_S)}{dt} &= \sum_{i \in \{A, B, C\}} (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i) + \mathbf{R} + \mathbf{P}, \\ \frac{d(J_S\boldsymbol{\omega})}{dt} &= \sum_{i \in \{A, B, C\}} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S) \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{N}_i)] + [(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_S) \times \mathbf{R}]. \end{aligned} \tag{4}$$

Найдем скорости $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \left(v + \frac{\omega a}{2}\right)\mathbf{e}_1 - \left(\omega a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v}_B &= \left(v - \frac{\omega a}{2}\right)\mathbf{e}_1 - \left(\omega a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v}_C &= v\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Тогда силы трения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= -\frac{kN_A}{2v_A} [(2v + w)\mathbf{e}_1 - w\sqrt{3}\mathbf{e}_2], \\ \mathbf{F}_B &= -\frac{kN_B}{2v_B} [(2v - w)\mathbf{e}_1 - w\sqrt{3}\mathbf{e}_2], \\ \mathbf{F}_C &= -\frac{kN_C}{v_C} v\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Здесь $v_A = \sqrt{v^2 + vw + w^2}$, $v_B = \sqrt{v^2 - vw + w^2}$, $v_C = |v|$, $w = a\omega$.

Учитывая $\mathbf{v}_S = v\mathbf{e}_1 - w\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{e}_2$ и вводя обозначения $\mu = \frac{J}{a^2}$, выпишем уравнения (4) в явном виде:

$$M \left(\dot{v} + w^2 \frac{\sqrt{3}}{3a} \right) = -k \left[v \left(\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B} + \frac{N_C}{v_C} \right) + \frac{w}{2} \left(\frac{N_A}{v_A} - \frac{N_B}{v_B} \right) \right], \tag{5}$$

$$\left(\mu + \frac{M}{3}\right)\dot{w} - M\frac{\sqrt{3}}{3a}vw = -kw\left(\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B}\right) - \frac{kv}{2}\left(\frac{N_A}{v_A} - \frac{N_B}{v_B}\right), \quad (6)$$

$$N_A + N_B + N_C = Mg, \quad (7)$$

$$R = \frac{kw\sqrt{3}}{2}\left(\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B}\right)\frac{M-3\mu}{M+3\mu} + \frac{kv\sqrt{3}}{2}\left(\frac{N_A}{v_A} - \frac{N_B}{v_B}\right)\frac{M}{M+3\mu} + \frac{3M\mu vw}{(M+3\mu)a}, \quad (8)$$

$$a(N_B - N_A) + hk\sqrt{3}w\left(\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B}\right) + Rh = 0, \quad (9)$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{6}(N_A + N_B - 2N_C) + hk\left[v\left(\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B} + \frac{N_C}{v_C}\right) + \frac{w}{2}\left(\frac{N_A}{v_A} - \frac{N_B}{v_B}\right)\right] = 0. \quad (10)$$

4. Условие безотрывного движения. Определение реакций. Так как голономная связь (1) односторонняя, то для ее реализации необходимо, чтобы выполнялись условия

$$N_i \geq 0, \quad i \in \{A, B, C\}. \quad (11)$$

Лемма 1. Для того чтобы в системе (1)–(4) было выполнено условие безотрывности (11), необходимо и достаточно, чтобы центр масс проецировался в треугольник $\triangle KLM$, полученный из $\triangle ABC$ соответствующими сдвигами вершин.

Доказательство. Спроецируем первое уравнение системы (4) на \mathbf{e}_j , $j = 2, 3$:

$$M(v\omega - \dot{\omega}l) = R - \sum_i N_i k(\mathbf{t}_i, \mathbf{e}_2), \quad \sum_i N_i = P. \quad (12)$$

Второе уравнение (4) спроецируем на \mathbf{e}_j , $j = 1, 2, 3$:

$$\sum_i N_i(\mathbf{r}_i \times (\mathbf{e}_3 - k\mathbf{t}_i), \mathbf{e}_j) + hR(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j) = 0, \quad j = 1, 2; \quad (13)$$

$$J\dot{\omega} = \sum_i ([\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i], \mathbf{e}_3) + \sum_i ([\mathbf{r}_C \times R\mathbf{e}_2], \mathbf{e}_3).$$

Здесь введены обозначения: $l = DA$, $\mathbf{t}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}$, $\boldsymbol{\rho}_A = \mathbf{SA}$, $\boldsymbol{\rho}_B = \mathbf{SB}$, $\boldsymbol{\rho}_C = \mathbf{SC}$. Из второго уравнения (13) и первого уравнения (12) исключаем $\dot{\omega}$ и находим R :

$$R = \frac{Mv\omega}{C} - \frac{Mkl}{JC} \sum_i ([\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{e}_3], N_i \mathbf{t}_i) + \frac{k}{C} \sum_i N_i(\mathbf{e}_2, \mathbf{t}_i), \quad C = \frac{Ml^2 + J}{J}. \quad (14)$$

Первое уравнение (13) при $j = 2$ принимает вид

$$\sum_i N_i(\boldsymbol{\rho}_i - hkt_i, \mathbf{e}_1) = 0,$$

а второе уравнение (13) при $j = 1$ с учетом (14) — вид

$$\sum_i N_i(\boldsymbol{\rho}_i - Alt_i + \frac{B(v, \omega)}{P} \mathbf{e}_2 - A([\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{e}_3], \mathbf{t}_i) \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0,$$

где $A = \frac{Mkh}{Ml^2 + J}$, $B(v, \omega) = \frac{JMv\omega h}{Ml^2 + J}$.

Найдем $\boldsymbol{\delta}_i = \alpha_i \mathbf{e}_1 + \beta_i \mathbf{e}_2$, удовлетворяющие следующей системе:

$$(\boldsymbol{\rho}_i - hkt_i, \mathbf{e}_1) = (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{e}_1),$$

$$\boldsymbol{\rho}_i - Alt_i + \frac{B(v, \omega)}{P} \mathbf{e}_2 - A([\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{e}_3], \mathbf{t}_i) \mathbf{e}_2 = (\boldsymbol{\rho}_i + \boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{e}_2).$$

Разрешая ее относительно δ_i , получим

$$\delta_i = -hk(\mathbf{t}_i, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{Jhv\omega}{(Ml^2 + J)g} - \frac{Mlkh}{Ml^2 + J}(\mathbf{t}_i, l\mathbf{e}_2 + [\boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{e}_3]) \right) \mathbf{e}_2 = 0.$$

Тогда уравнения (12), (13) примут вид

$$\sum_i N_i(\boldsymbol{\rho}_i + \delta_i) = 0, \quad \sum_i N_i = P.$$

Эти условия согласно [1] равносильны тому, что центр масс проецируется в $\triangle KLM$, полученный из $\triangle ABC$ сдвигами вершин на δ_i , причем N_i находятся единственным образом. \square

Из уравнений (7)–(10) можно выразить реакции связей N_A, N_B, N_C . Получим систему относительно N_A, N_B :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc} a - \frac{\sqrt{3}kh(3(M+\mu)w+Mv)}{2v_A(M+3\mu)} & -(a + \frac{\sqrt{3}kh(3(M+\mu)w-Mv)}{2v_B(M+3\mu)}) \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} + hk \left(\frac{2v+w}{2v_A} - \text{sign}(v) \right) & \frac{a\sqrt{3}}{2} + hk \left(\frac{2v-w}{2v_B} - \text{sign}(v) \right) \end{array} \right) \begin{pmatrix} N_A \\ N_B \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{3M\mu vhw}{a(M+3\mu)} \\ P \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - kh \cdot \text{sign}(v) \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Положим

$$f(v, w) = \frac{\sqrt{3}(3(M+\mu)w+Mv)}{2(M+3\mu)\sqrt{v^2+vw+w^2}}, \quad q(v, w) = \left(\frac{2v+w}{2\sqrt{v^2+vw+w^2}} - \text{sign}(v) \right),$$

$$r = r(v, w) = \frac{3M\mu vhw}{a(M+3\mu)}$$

и обозначим $f_+ = f(v, w)$, $f_- = f(-v, w)$, $q_+ = q(v, w)$, $q_- = q(v, -w)$. Тогда будем иметь

$$N_A = \frac{\frac{Pa^2\sqrt{3}}{3} + r\frac{a\sqrt{3}}{2} + hk(rq_- - Pa \cdot \text{sign}(v) + P\frac{a\sqrt{3}}{3}f_-) - h^2k^2(Pf_- \cdot \text{sign}(v))}{a^2\sqrt{3} + hk \left(a(q_+ + q_-) + \frac{a\sqrt{3}}{2}(f_- - f_+) \right) + h^2k^2(f_-q_+ - q_-f_+)},$$

$$N_B = \frac{\frac{Pa^2\sqrt{3}}{3} - r\frac{a\sqrt{3}}{2} + hk(-rq_+ - Pa \cdot \text{sign}(v) - P\frac{a\sqrt{3}}{3}f_+) + h^2k^2(Pf_+ \cdot \text{sign}(v))}{a^2\sqrt{3} + hk \left(a(q_+ + q_-) + \frac{a\sqrt{3}}{2}(f_- - f_+) \right) + h^2k^2(f_-q_+ - q_-f_+)},$$

$$N_C = \frac{\frac{Pa^2\sqrt{3}}{3} + hk \left(Pa(q_+ + q_-) + r(q_+ - q_-) + 2Pa \cdot \text{sign}(v) + \frac{Pa\sqrt{3}}{6}(f_- - f_+) \right)}{a^2\sqrt{3} + hk \left(a(q_+ + q_-) + \frac{a\sqrt{3}}{2}(f_- - f_+) \right) + h^2k^2(f_-q_+ - q_-f_+)} +$$

$$+ \frac{h^2k^2P(f_-q_+ - q_-f_+ + (f_- - f_+)\text{sign}(v))}{a^2\sqrt{3} + hk \left(a(q_+ + q_-) + \frac{a\sqrt{3}}{2}(f_- - f_+) \right) + h^2k^2(f_-q_+ - q_-f_+)}.$$

Найденные нормальные реакции зависят от v, w , поэтому для выполнения условий безотрывности необходимо, чтобы на v и w были наложены соответствующие ограничения. На рис. 1 представлены примеры допустимых областей в пространстве (v, w) .

5. Исследование времени движения саней. Умножив (5) на v и (6) на w и сложив их, получим

$$\frac{dT(v, w)}{dt} = -kv^2 \left[\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B} + \frac{N_C}{v_C} \right] - kvw \frac{N_A}{v_A} - \frac{kw^2}{2} \left[\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B} \right],$$

где $T(v, w) = \frac{Mv^2}{2} + (\mu + \frac{M}{3})w^2$. Далее,

$$\frac{dT(v, w)}{dt} \leq -kP \left(\left[\frac{v^2}{v_A} + \frac{v^2}{v_B} + \frac{v^2}{v_C} \right] - \frac{vw}{v_A} - \frac{1}{2} \left[\frac{w^2}{v_A} + \frac{w^2}{v_B} \right] \right),$$

откуда следует

$$\frac{dT(v, w)}{dt} \leq -F(v, w),$$

где $F(v, w)$ — однородная функция 1-й степени.

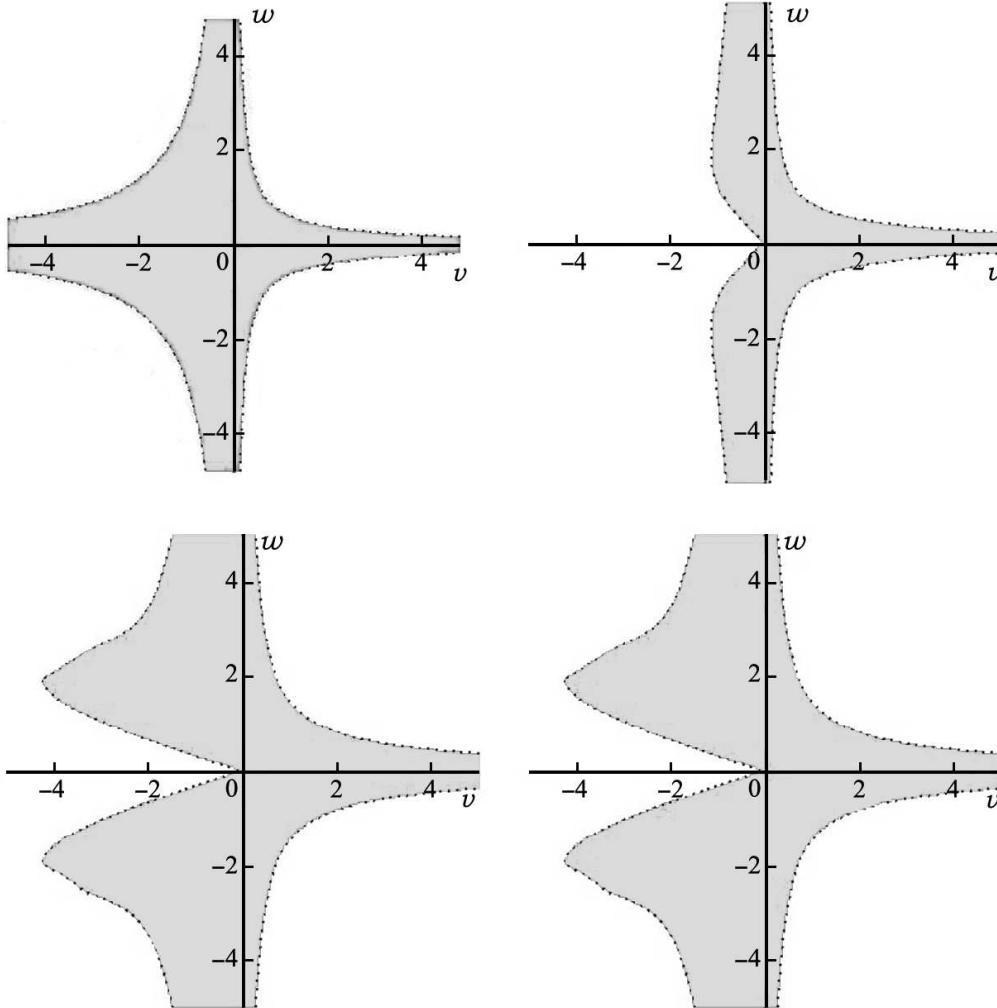


Рис. 1. Допустимые области в пространстве (v, w)

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Если $F(x, y), G(x, y)$ — однородные функции 1-й степени, причем $F \in C(\mathbb{R}^2)$, $G \in C(\mathbb{R}^2)$, $F(x, y)$ и $G(x, y)$ положительны при всех $(x, y) \neq (0, 0)$, то существует число $c > 0$, такое, что $F(x, y) \geq cG(x, y)$ для любых точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Рассмотрим множество $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, положим $c = \sup_M \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$. Существование c вытекает из непрерывности функции $H(x, y) = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$ на компакте M . Очевидно, что $CF(x, y) \geq G(x, y)$ на M , но тогда неравенство справедливо и для всех (x, y) .

Действительно, для любых точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ найдется точка $(x_0, y_0) \in M$ и существует такая константа t , что выполняется соотношение $(x, y) = t(x_0, y_0)$, но в силу однородности F и G

$$F(x, y) = tF(x_0, y_0) \geq ctG(x_0, y_0) = cG(x, y). \quad \square$$

Легко видеть, что \sqrt{T} — однородная функция 1-й степени, тогда по лемме 2 будем иметь оценку $\dot{T} \leq -F(x, y) \leq c\sqrt{T}$.

Проинтегрировав это неравенство, получим, что существует момент времени t_* , начиная с которого $T \equiv 0$ при $t \geq t_*$.

Таким образом, доказано, что движение саней прекратится за конечное время.

6. Исследование инвариантности множеств $\omega = 0$ и $v = 0$. Продолжим изучение свойств системы, исследуя вопрос об инвариантности множеств точек $\omega = 0$ и $v = 0$ фазовой плоскости.

Лемма 3. *Множество $\omega = 0$ инвариантно.*

Доказательство. Пусть $\omega(t_0) = 0$. Тогда $v_A = v_B = v_C = v$ и из (9) с учетом (8) следует

$$(N_B - N_A) \left(a + \frac{Mkh\sqrt{3}}{2(3\mu + M)} \right) = 0,$$

откуда будем иметь $N_B = N_A$. В то же время из (6) получим

$$\left(\mu + \frac{M}{3} \right) \dot{w} = -\frac{k}{2} (N_A - N_B),$$

следовательно, $\dot{w} = 0$. Тогда $w(t) = 0$ для любого $t > t_0$. \square

Проинтегрируем уравнения движения на инвариантном множестве $w = 0$. Выше было показано, что $N_A = N_B$, $v_A = v_B = v_C = v$. Тогда из (5) и (7) следует

$$\dot{v} = -kg \cdot \text{sign}(v).$$

Интегрируя это уравнение и учитывая уравнение (10), получаем

$$|v(t)| = |v_0| - kgt;$$

$$N_A = N_B = \frac{P}{3} - \frac{hkP}{a\sqrt{3}} \text{sign}(v); \quad N_C = \frac{P}{3} + \frac{2hkP}{a\sqrt{3}} \text{sign}(v);$$

$$hk \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \text{если } v > 0;$$

$$hk \leq \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad \text{если } v < 0.$$

Скорость саней с течением времени линейно падает до нуля, при этом нормальные реакции в точках контакта зависят от направления движения: при движении саней в положительном направлении ($v > 0$) нормальная реакция в коньке C превосходит реакции в точках A и B , которые оказываются равными. При движении в отрицательном направлении ситуация меняется: $N_A = N_B > N_C$.

Лемма 4. *Множество $v = 0$ неинвариантно.*

Доказательство. Пусть существует момент времени t_0 , такой, что $v(t_0) = 0$ и $\omega(t_0) \neq 0$. Тогда $v_A = v_B = |a\omega| = |w|$, $v_C = 0$. Уравнение (5) примет вид

$$M\dot{v} = -Mw^2 \frac{\sqrt{3}}{3a} - \frac{k}{2} (N_A - N_B) \cdot \text{sign}(\omega). \tag{15}$$

Из (9) с учетом (8) будем иметь

$$a(N_B - N_A) \cdot \text{sign}(\omega) + \frac{3\sqrt{3}hk(M + \mu)}{2(3\mu + M)} (N_A + N_B) = 0. \tag{16}$$

Используя (10) и (7), получаем

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} (N_A + N_B) - \frac{hk}{2} (N_B - N_A) \cdot \text{sign}(\omega) = \frac{mga\sqrt{3}}{3}. \tag{17}$$

Из системы (16), (17) находим

$$(N_B - N_A) \cdot \text{sign}(\omega) = -\frac{2a\sqrt{3}Phk(\mu + M)}{2(M + 3\mu)a^2 + 3(M + \mu)h^2k^2}.$$

Подставляя в (15) последнее равенство, заключаем, что

$$\dot{v} = -w^2 \frac{\sqrt{3}}{3a} - \frac{a\sqrt{3}ghk^2(\mu + M)}{2(M + 3\mu)a^2 + 3(M + \mu)h^2k^2}.$$

Таким образом, из того, что в момент времени t_0 выполнено $\dot{v}(t_0) < 0$, следует, что существует $\delta > 0$, такое, что для любого $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ функция $v(t)$ отрицательна. \square

Следствие. Множество $v_S = 0$ инвариантно.

Доказательство. Опираясь на леммы 3 и 4 и тот факт, что $\mathbf{v}_S = v\mathbf{e}_1 - w\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{e}_2$, получаем утверждение следствия. \square

Из лемм следует, что если скорость конька равна нулю в какой-то момент времени, а угловая скорость не нуль, то в последующие близкие моменты времени скорость конька не равна нулю, более того, доказано, что существует промежуток времени, когда конек движется в обратную сторону. Фазовый портрет для верхней полуплоскости в пространстве (v, w) , на которой сплошной линией изображен пример фазовой траектории, и траектория конька показаны на рис. 2 а, б. На рис. 3 а, б представлены графики функций $v(t), w(t)$ соответственно.

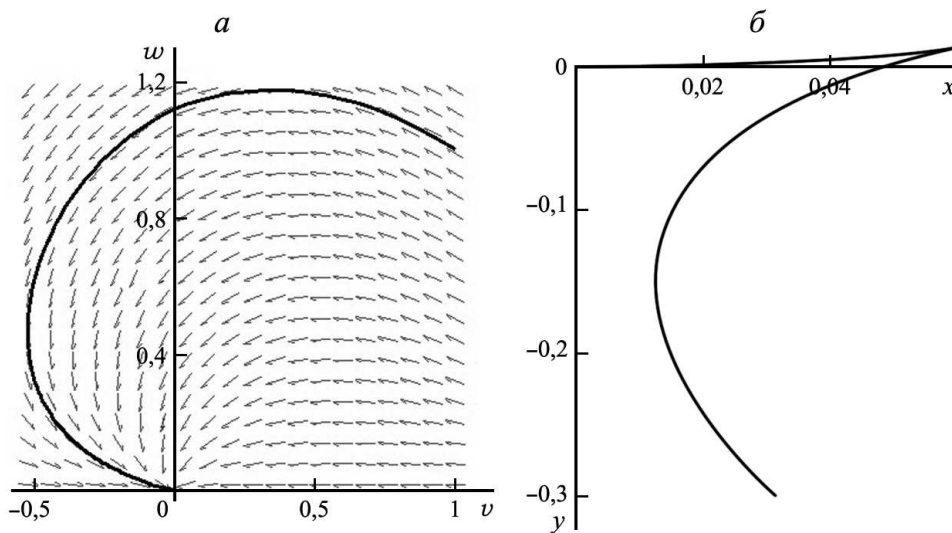


Рис. 2. Фазовый портрет системы в пространстве (v, w) и фазовая траектория (а), траектория конька (б)

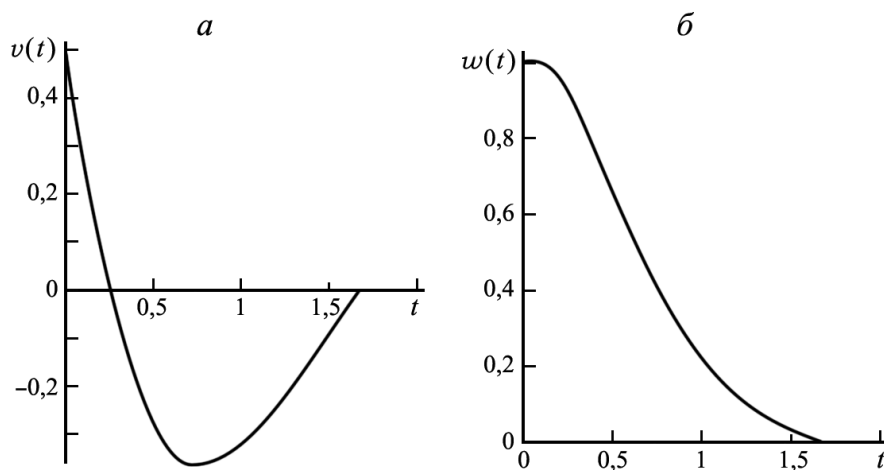


Рис. 3. Численное решение: а — график функции $v(t)$, б — функции $w(t)$

7. Заключение. В работе построена математическая модель движения саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости с сухим трением; описана геометрическая интерпретация условий, необходимых для безотрывного движения; получены области в пространстве (v, w) , для точек которых выполнено условие неотрицательности нормальных реакций.

Доказаны инвариантность множества $w = 0$ и неинвариантность множества $v = 0$, изображены фазовые портреты системы и численные решения при определенных начальных условиях. Также показано, что сани останавливаются за конечное время от начала движения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М.; Ижевск: НИЦ “РХД”; ИКИ, 2011.
2. *Ишханян М.В., Карпетян А.В.* Динамика однородного шара на горизонтальной плоскости с трением скольжения, вращения и качения // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2010. № 2. 3–14.
3. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.
4. *Saratheodory C.* Der Schlitten // Z. angew. Math. und Mech. 1933. **13**. 71–76.
5. *Чаплыгин С.А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.

Поступила в редакцию
25.07.2018