

Определим компоненты тензора напряжений при различных сочетаниях материалов. Для однородного цилиндра в соответствии с (22) имеем $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0$, $\sigma_{zz} = 596.8$. Они отмечены сплошными линиями на рис. 1–3 соответственно. Допустим теперь, что внутренний цилиндр выполнен из материала М1, а внешний — из М2. Учитывая решение (21) и используя нужные выражения из наборов (16) и (17), находим зависимости σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} , в таком же порядке представленные штрихпунктирными линиями на рис. 1–3. Точно так же, считая внутренний цилиндр выполненным из материала М2, а внешний — из М1, получим зависимости σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} , в той же последовательности приведенные пунктирными линиями на рис. 1–3. Аналогичным образом на рис. 4 представлены зависимости радиального перемещения $u(r)$ от радиуса. Видно, что они, как и радиальные напряжения $\sigma_{rr}(r)$, во всех случаях непрерывны на стыке слоев.

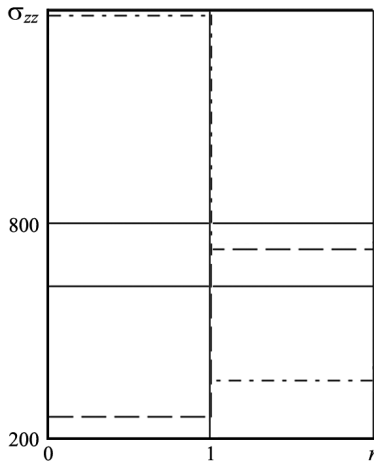


Рис. 3

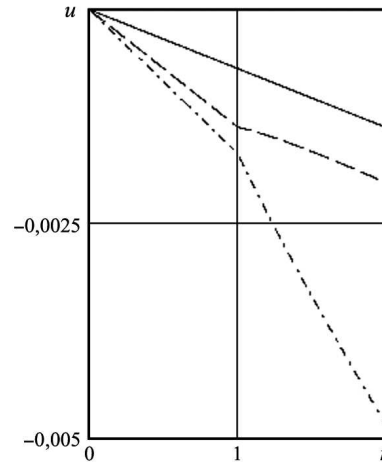


Рис. 4

Таким образом, в работе предложен и на конкретном примере двухслойного стержня реализован метод решения задач об осевом нагружении составных круглых цилиндрических тел, легко распространяемый на многослойные конструкции такого вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988.
2. Шарафутдинов Г.З. Применение функций комплексного переменного к некоторым пространственным задачам теории упругости // Прикл. матем. и механ. 2000. **64**, вып. 4. 659–669.
3. Шарафутдинов Г.З. Некоторые плоские задачи теории упругости. М.: Научный мир, 2014.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
25.04.2018

УДК 539.3:534.1

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
НА ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ИМПЕДАНСНЫХ
КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ НА ОДНОЙ ИЗ ЕЕ СТОРОН
И ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗВУКОВЫМ БАРЬЕРАМ**

М. Ш. Исраилов¹

Предложен метод и получены простые аналитические решения задач дифракции акустических волн на полуплоскости, на одной из сторон которой задано импедансное краевое условие, а на другой — условие Неймана или Дирихле. Показано, что свойства полученных решений имеют существенное значение для оптимального проектирования звуковых барьеров с абсорбирующими стенками.

¹ Исраилов Мухади Шахидович — доктор физ.-мат. наук, проф., гл. науч. сотр. Комплексного НИИ РАН, г. Грозный, e-mail: israiler@hotmail.com.

Israilov Mukhady Shakhidovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chief Researcher of the Complex Research Institute of Russian Academy of Sciences (Grozny).

Ключевые слова: акустические волны, дифракция, импедансные краевые условия, звуковые барьеры.

A method is proposed and the simple analytical solutions are obtained for the diffraction problems of acoustic waves on a half-plane with the impedance boundary condition on its one surface and the Neumann or Dirichlet condition on the opposite surface. It is shown that the properties of these solutions are essential for the optimal design of barriers with sound-absorbing walls.

Key words: acoustic waves, diffraction, impedance boundary conditions, sound barriers.

1. Вводные замечания. Из-за отсутствия удобных для численного анализа решений задач дифракции на полуплоскости при импедансных краевых условиях в расчетах звуковых барьеров со стенками из звукопоглощающих материалов использовались сильно упрощенные способы оценки рассеянных волн. Так, полусумма решений для краевых условий, соответствующих акустически твердым и акустически мягким сторонам полуплоскости (когда заданы соответственно условия Неймана и Дирихле), принималась за решение задачи дифракции для барьера с “идеально поглощающими” стенками [1, 2] на том основании, что эта полусумма дает нулевую отраженную волну от плоской стенки. Такого же рода “приближение” к решению задачи с импедансными краевыми условиями строится и в работе [3] исходя из решения задачи дифракции на полуплоскости с идеально отражающими сторонами. Авторы утверждают, что обнаружили близость предлагаемого ими приближения к опытным данным для некоторых частных значений параметров задачи. Однако в обоих вариантах построения приближенного решения импедансные краевые условия ни на одной из сторон полуплоскости не удовлетворяются и поэтому вопрос о точности и даже пригодности этих построений для оценки эффекта импедансной границы остается открытым. Анализ показывает, что во многих ситуациях, связанных с использованием на практике звуковых барьеров, достаточно иметь решения задач дифракции, в которых только одна из сторон полуплоскости (освещенная или теневая) является импедансной. В настоящей работе предложен метод и даны в замкнутом аналитическом виде решения этого класса задач дифракции. Найденные решения, в отличие от решений для краевых условий Дирихле и Неймана, содержат добавочную волну, которая может быть названа краевой волной. В приложениях к звуковым барьерам показано, что построенные решения позволяют оценить влияние абсорбирующего слоя (коэффициента поглощения) на характеристики гашения звука.

2. Решение задачи дифракции акустической волны на полуплоскости с импедансными краевыми условиями на одной из ее сторон. Рассматривается задача дифракции звуковых волн на полуплоскости со смешанными краевыми условиями, когда на одной из ее сторон задано импедансное краевое условие, а на другой — условие Неймана или Дирихле. Физически такие краевые условия означают, что первая сторона полуплоскости покрыта звукопоглощающим материалом (абсорбентом), а вторая сторона или полностью отражает звук, или является акустически “мягкой” с равным на ней нулю давлением. В случае движений с гармоническим законом изменения по времени t с частотой ω названная задача сводится в линейном приближении к следующей краевой задаче относительно избыточного давления $p = Pe^{i\omega t}$, возникающего в жидкости или газе в дополнение к давлению в состоянии покоя. Пусть на вставленную в среду полуплоскость, описываемую в декартовой системе координат соотношениями $y = 0, x > 0, -\infty < z < \infty$, набегают плоская волна с амплитудой A :

$$p^i = P^i(x, y) \exp(-i\omega t), \quad P^i = A \exp\{-ikr \cos(\theta - \theta_0)\}, \quad (1)$$

плоскость одинаковой фазы которой параллельна ребру барьера и образует угол θ_0 с плоскостью барьера. Тогда движение в среде является плоским и давление P , зависящее только от координат (x, y) (или (r, θ) , если введены полярные координаты), удовлетворяет уравнению Гельмгольца и предельным условиям:

$$\Delta P + k^2 P = 0; \quad (2)$$

$$(a) \frac{\partial P}{r \partial \theta} + ik\eta P = 0 \text{ при } \theta = 0 \text{ и } (b) \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \text{ при } \theta = 2\pi; \quad (3)$$

$$P = \text{const} + O(r^\alpha), \quad \alpha > 0, \text{ при } r \rightarrow 0; \quad (4)$$

$$r^{1/2} \left(\frac{\partial P^d}{\partial r} - ikr P^d \right) = o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В уравнении (2) Δ есть оператор Лапласа, k — волновое число, связанное с частотой ω и скоростью звука в газе c соотношением $k = \omega/c$, а P^d — дифрагированная часть поля давления P , т.е. та его часть, которая получается вычитанием из P полей давления в падающей и отраженной волнах.

Условия “на ребре”, означающие отсутствие посторонних источников энергии в угловой точке или на ребре, при любых краевых условиях можно вывести, окружив ребро цилиндрической поверхностью малого радиуса ε и потребовав отсутствия потока энергии в область через эту поверхность при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получаемые при этом условия для стационарной задачи в предположении разложимости решения уравнения Гельмгольца вблизи ребра в степенной ряд по радиусу принимают форму (4).

Замечание. Й. Мейкснер [4] получил порядок особенностей компонент векторов электрического и магнитного полей в вершине клина при дифракции электромагнитных волн путем разложения этих компонент в степенные ряды по радиусу в окрестности угловой точки (не решая задачу во всей области). Иногда в формулировке условий на ребре указывают точный порядок особенности α , вычисленный по этому методу (и называют их “условиями Мейкснера”). Однако записать условие на ребре в форме (4) без указания точного значения α достаточно для обеспечения единственности решения, более того, при некоторых краевых условиях (в частности, импедансных) нахождение α до полного решения задачи затруднительно или даже невыполнимо.

Единственность решения внешней задачи для уравнения Гельмгольца при соблюдении условия излучения Зоммерфельда (5) (или его трехмерного аналога в пространственной задаче) в случаях, когда на границе или ее части заданы импедансные краевые условия, установлена, например, в [5]. Единственность имеет место, если в точках границы акустический импеданс $Z = (-\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_s) \geq 0$ (\mathbf{V} — скорость частиц среды (жидкости или газа), а \mathbf{n}_s — единичная нормаль к границе, направленная в область, занятую средой). Физически условие $Z > 0$ означает, что при положительном избыточном давлении ($P > 0$) нормальная скорость частиц среды $V_n \equiv \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_s < 0$ и жидкость или газ проникает в поры границы (поглощающая граница). Легко видеть (см., например, [6]), что входящий в импедансное краевое условие (3а) безразмерный параметр η связан с акустическим импедансом Z равенством $\eta = \rho \cdot c/Z$ (ρ — плотность среды), поэтому условие поглощающей границы эквивалентно требованию $\eta > 0$.

В случае областей с простирающимися до бесконечности границами падающая и отраженные от таких границ волны не обязаны удовлетворять условию излучения, на что было обращено внимание в работе [7]. В соответствии с этим если представить P в виде суммы давлений в падающей (P^i), отраженной (P^r) и дифрагированной (P^d) волнах, то только последнее слагаемое обязано удовлетворять условию излучения, что и записано в (5).

Примем, что в уравнении (1) падающей волны $0 \leq \theta_0 < \pi$. Это означает, что “освещенной” падающей волной стороной барьера является сторона $\theta = 0$, на которой согласно (3) выполнены импедансные краевые условия. Поскольку отраженная волна от плоской импедансной границы легко определяется, то для суммы давлений в падающей и отраженной волнах $P_0 = P^i + P^r$ (называемой “решением геометрической оптики”) имеем

$$P_0/A = \begin{cases} \exp[-ikr \cos(\theta - \theta_0)] + \frac{\sin \theta_0 - \eta}{\sin \theta_0 + \eta} \exp[-ikr \cos(\theta + \theta_0)], & 0 < \theta < \pi - \theta_0; \\ \exp[-ikr \cos(\theta - \theta_0)], & \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0; \\ 0, & \pi + \theta_0 < \theta < 2\pi. \end{cases} \quad (6)$$

Решение геометрической оптики (6) имеет разрывы на линиях $\theta = \pi \mp \theta_0$ (как обычно, под разрывом функции в точке понимается величина $[f(x)]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$):

$$[P_0/A]_{\pi+\theta_0} = -e^{ikr}, \quad [P_0/A]_{\pi-\theta_0} = -R(\theta_0) e^{ikr}, \quad R(\theta_0) \equiv \frac{\sin \theta_0 - \eta}{\sin \theta_0 + \eta}. \quad (7)$$

В силу указанных свойств функции P_0 исходная задача сводится к нахождению дифрагированной волны P^d , которая: (а) должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (2) (вне малых окрестностей линий разрыва) и предельным условиям (3)–(5); (б) должна компенсировать скачки функции P_0 на линиях $\theta = \pi \pm \theta_0$, т.е. иметь на этих линиях разрывы, равные разрывам (7) с противоположным знаком. Следующая очевидная лемма приводит к простому методу нахождения дифракционного поля P^d .

Лемма (об отражении волны от импедансной границы). *Решение задачи об отражении плоской волны от плоской импедансной границы есть линейная комбинация решений задач отражения той же волны при краевых условиях Неймана и Дирихле.*

Действительно, решение задачи отражения плоской волны от импедансной границы дается первой строчкой формулы (6), а решения задач отражения при краевых условиях Неймана и Дирихле — той же формулой, если положить в ней коэффициент отражения $R(\theta_0)$ равным $+1$ и -1 соответственно. Тогда легко убедиться, что коэффициенты в указанной в лемме линейной комбинации есть m и $1 - m$, где $m = \sin \theta_0 / (\sin \theta_0 + \eta)$.

Следуя подсказке, вытекающей из леммы, рассмотрим линейную комбинацию

$$P_3^d(r, \theta) = mP_1^d(r, \theta) + (1 - m)P_2^d(r, \theta) = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_0 + \eta} P_1^d(r, \theta) + \frac{\eta}{\sin \theta_0 + \eta} P_2^d(r, \theta) \quad (8)$$

решений следующих задач дифракции. За P_1^d принимается решение задачи дифракции плоской волны (1) на полуплоскости при однородных краевых условиях Неймана (3b) на обеих ее сторонах (точнее, “дифракционная” часть этого решения, когда из полного решения выделена “геометрическая” часть, подобная (6)). Названное решение, полученное А. Зоммерфельдом, приведено во многих руководствах по дифракции и оптике (например, в [8]) и может быть записано в виде (здесь и далее полагаем $A = 1$; множитель A может быть восстановлен в окончательном решении):

$$P_1^d = -B \left\{ e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)} \text{sign}(w_-) F(|w_-|) + e^{-ikr \cos(\theta + \theta_0)} \text{sign}(w_+) F(|w_+|) \right\}, \quad B \equiv e^{-i\pi/4} / \sqrt{\pi}, \quad (9)$$

где $F(z) = \int_z^\infty \exp(i\mu^2) d\mu$ есть функция (интеграл) Френеля и введены обозначения

$$w_{\mp} \equiv \sqrt{2kr} \cos^{1/2}(\theta \mp \theta_0).$$

В качестве P_2^d в (8) выбирается решение аналогичной задачи дифракции волны (1) на полуплоскости при “разнотипных” краевых условиях на ее сторонах, а именно когда на стороне $\theta = 0$ принимается условие Дирихле, а на стороне $\theta = 2\pi$ — условие Неймана.

В работах [9, 10] предложен метод решения и даны простые асимптотические решения таких задач. Полученные решения справедливы в дальней зоне $kr = (2\pi r) / \Lambda \gg 1$, т.е. на расстояниях от ребра полуплоскости, значительно превышающих длину Λ падающей волны, а этого, как правило, достаточно в приложениях к звуковым барьерам. Пользуясь этими результатами, запишем P_2^d для дальней зоны в несколько упрощенной форме:

$$P_2^d = -B\sqrt{2} \left\{ e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)} \text{sign}(w_-) F(|w_-|) \cos[(\theta - \theta_0) / 4] - e^{-ikr \cos(\theta + \theta_0)} \text{sign}(w_+) F(|w_+|) \cos[(\theta + \theta_0) / 4] \right\}. \quad (10)$$

Здесь константа B и аргументы w_{\pm} принимают те же значения, что и в формуле (9).

В силу свойств функции Френеля легко убеждаемся, что решения (9), (10) имеют на линиях $\theta = \pi \pm \theta_0$ разрывы

$$\left[P_1^d \right]_{\pi + \theta_0} = e^{ikr}, \quad \left[P_1^d \right]_{\pi - \theta_0} = e^{ikr}, \quad \left[P_2^d \right]_{\pi + \theta_0} = e^{ikr}, \quad \left[P_2^d \right]_{\pi - \theta_0} = -e^{ikr}.$$

Следовательно, функция P_3^d , определенная равенством (8), имеет на линиях $\theta = \pi \pm \theta_0$ разрывы, равные по величине и противоположные по знаку разрывам (7) геометрической части искомого решения. Тем самым P_3^d удовлетворяет требованию п. (b), сформулированному выше.

Кроме того, будучи линейной комбинацией решений двух задач дифракции на полуплоскости, функция P_3^d удовлетворяет уравнению Гельмгольца (вне малых окрестностей особых линий $\theta = \pi \pm \theta_0$), условию на ребре (4), условию излучения (5) и однородному краевому условию Неймана (3b), поскольку этим условиям удовлетворяет каждая из функций P_1^d и P_2^d в линейной комбинации. Выполнение перечисленных условий можно проверить и непосредственно, используя выражения (9), (10).

Таким образом, все требования п. (a) выполнены, за исключением требования о выполнении импедансного краевого условия (3a) на стороне $\theta = 0$. Для выяснения этого вопроса вычислим граничный оператор (3a) от P_3^d , используя тот факт, что P_1^d и P_2^d удовлетворяют краевым условиям $(\partial P_1^d / \partial \theta) \Big|_{\theta=0} = 0$ и $(P_2^d) \Big|_{\theta=0} = 0$. Поскольку для решения P_2^d имеется в удобном виде равномерная асимптотика (10), справедливая при $kr \gg 1$, разумно при вычислении граничного оператора

удержать только главный член разложения для больших kr (а членами более высокого порядка малости пренебречь), что будет означать удовлетворение импедансному краевому условию на больших в сравнении с длиной волны расстояниях. Выполняя сказанное при помощи известного асимптотического представления функции Френеля $F(w) \sim i \exp(iw^2)/(2w)$ (см., например, [8]), имеем

$$D(P_3^d) \equiv \left(r^{-1} \partial P_3^d / \partial \theta + ik\eta P_3^d \right) \Big|_{\theta=0} = B \sqrt{2kr} e^{ikr} \eta (\sin \theta_0 + \eta)^{-1} \sin(\theta_0/2). \quad (11)$$

Чтобы уничтожить правую часть в (11) и получить решение, удовлетворяющее импедансному условию на стороне $\theta = 0$, необходимо к P_3^d добавить новую волну, которую обозначим через P_S . Эта волна должна удовлетворять условию Неймана при $\theta = 2\pi$ и быть отличной от нуля на границе $\theta = 0$. Значит, P_S есть волна типа (9), в которой только следует положить $\theta_0 = 0$ (неопределенный для этой функции угол θ_0 не должен присутствовать в ее аргументе). Но тогда оба члена в (9) одинаковы, что позволяет разыскивать дополнительную волну в виде

$$P_S = L e^{-ikr \cos \theta} F\left(\sqrt{2kr} |\cos(\theta/2)|\right), \quad (12)$$

где L есть константа, подлежащая определению. Здесь в сравнении с членами формулы (9) опущен множитель $\text{sign}(w) = \text{sign}[\cos(\theta/2)]$, чтобы исключить появление разрыва на линии $\theta = \pi$. Легко проверить непосредственно, что функция P_S удовлетворяет уравнению Гельмгольца, условию на ребре, краевому условию Неймана (3b), а также условию излучения (5) везде, кроме луча $\theta = \pi$, на котором она ведет себя как плоская волна, уходящая на бесконечность.

С учетом (12) получаем, что условие $D(P_3^d + P_S) = 0$ выполнено, если

$$L = 4B (\sin \theta_0 + \eta)^{-1} \sin \theta_0. \quad (13)$$

Таким образом, полное решение задачи (1)–(5) складывается из геометрической части (6) и дифрагированной волны $P^d/A = P_3^d + P_S$. В последней сумме волна P_3^d определена соотношениями (8)–(10), а P_S — соотношениями (12), (13).

Изложенный метод применим и в случае, когда на теневой стороне полуплоскости задано условие Дирихле. Тогда волна P_S должна разыскиваться в виде решения (10).

3. Приложения к звуковым барьерам. Для исследования эффекта импедансных краевых условий рассмотрим численный пример с барьером, защищающим объекты (например, жилые дома) от шума высокоскоростной железной дороги. Пик интенсивности звука, возникающего от качения колес железнодорожного состава по рельсу, достигается для колебаний с частотой ≈ 1600 Гц [11]. Эти колебания имеют длину волны ≈ 21 см при скорости звука в воздухе 330 м/с. Высота защищающего от звука барьера-стены (как правило, $\sim 1.5 \div 4$ м) и расстояние до ближайших жилых домов (от $5 \div 10$ м и более) значительно превышают названную длину волны. Поэтому при исследовании затухания звука достаточно учесть только рассеянную на ребре барьера волну, определяемую дифракцией на полуплоскости, и ограничиться асимптотическим решением этой задачи для дальней зоны. Сказанное оправдывает анализ звуковых барьеров на основе полученных в п. 2 результатов.

Поскольку защищаемый от шума объект находится в теневой области барьера, то полное давление в этой области совпадает с давлением в дифрагированной волне и дается найденной в п. 2 суммой $P = P_3^d + P_S$, когда стенка барьера (полуплоскости) со стороны источника звука является частично поглощающей звук (задано импедансное краевое условие), а противоположная сторона — идеально отражающей (задано условие Неймана). Решение P сильно упрощается, если функции Френеля, входящие в выражения для P_3^d , заменить их асимптотиками для больших значений аргумента [8], и записывается в виде

$$P/A = - \left(2\sqrt{2\pi kr} \right)^{-1} e^{ikr+i\pi/4} \times \frac{1}{\sin \theta_0 + \eta} \left\{ \frac{\sin \theta_0 + \eta \sqrt{2} \sin[(\phi + \theta_0)/4]}{\cos[(\phi + \theta_0)/2]} + \frac{\sin \theta_0 - \eta \sqrt{2} \sin[(\phi - \theta_0)/4]}{\cos[(\phi - \theta_0)/2]} + \frac{4 \sin(\theta_0/2)}{\cos(\phi/2)} \right\}. \quad (14)$$

Здесь давление P выражено через угол $\phi = 2\pi - \theta$, отсчитываемый от теневой стороны полуплоскости. Видно, что формула (14) (называемая неравномерной асимптотикой) не может быть применена в малых окрестностях особых линий $\phi = \pi \pm \theta_0$ и $\phi = \pi$, где необходимо пользоваться исходным выражением P , содержащим функции Френеля.

На рис. 1, 2 приведены графики изменения соответственно относительной амплитуды давления $|P|/A$ и величины ΔL , характеризующей изменение уровня звука, в теневой области в зависимости от угла ϕ на расстоянии $r = 25\Lambda$ ($kr = 50\pi$) в случае падения плоской волны на полуплоскость под углом $\theta_0 = 30^\circ$.

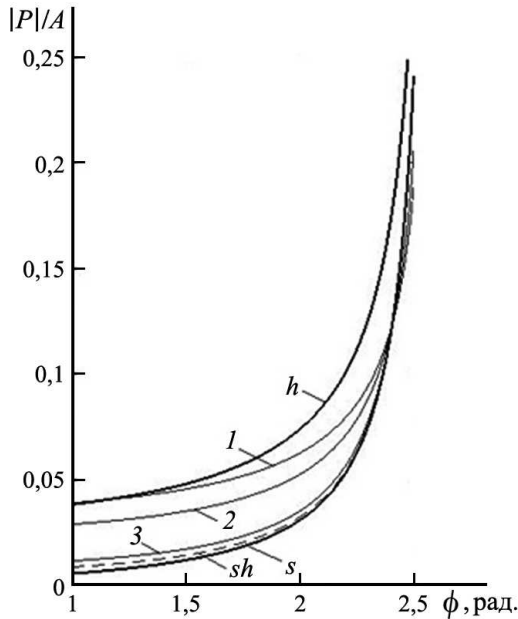


Рис. 1

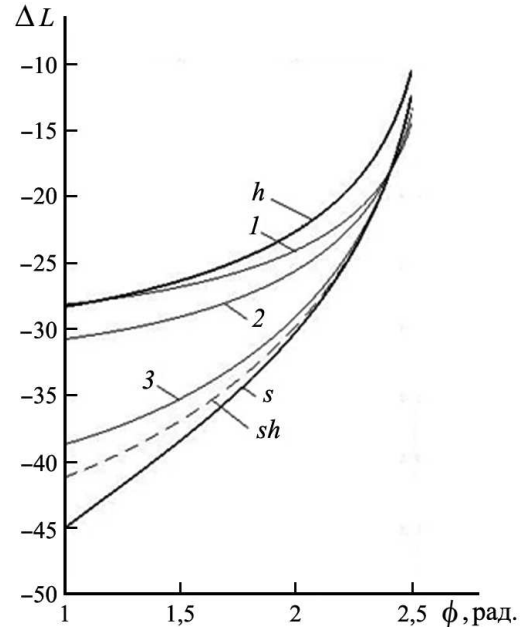


Рис. 2

Уровень интенсивности звука (или уровень шума) есть характеристика звукового поля, численно равная величине $L = 10 \lg (P/P_r)^2 = 20 \lg (|P|/P_r)$ дБ, где P_r есть отсчетное давление. За P_r в воздухе принимается давление звука с частотой 10^3 Гц на пороге слышимости, равное $2 \cdot 10^{-5}$ Па. В плоской волне с амплитудой A при отсутствии барьера уровень шума в любой точке пространства равен $L_0 = 20 \lg (A/P_r)$. Изменение уровня шума (гашение звука) в любой точке теневой области из-за присутствия барьера определяется величиной $\Delta L = L - L_0 = 20 \lg |P|$, не зависящей от A/P_r .

Полужирные кривые на рис. 1, 2 относятся к полуплоскости, обе стороны которой являются акустически твердыми (кривые h) или акустически мягкими (кривые s). Пунктирные кривые sh относятся к полуплоскости, освещенная сторона которой является акустически мягкой, а теневая сторона — акустически твердой. Кривые 1, 2, 3, построенные на основе решения (14) для случаев $\eta = 0.5; 1; 10$ соответственно, демонстрируют влияние на рассматриваемые величины коэффициента поглощения импедансной границы. Амплитуда отраженной волны от импедансной стенки принимает промежуточное значение между амплитудами волн, отраженных от акустически твердой и акустически мягкой стенок. Аналогично кривые амплитуд дифрагированных волн (рис. 1) и кривые затухания (рис. 2), соответствующие решению для полуплоскости с одной импедансной границей, расположены между кривыми h и sh везде, за исключением малого интервала вблизи особой линии $\phi_0 = 2\pi - \theta_0 \approx 2.6$ рад. Возможно, такое поведение объясняется большой погрешностью неравномерной асимптотики при приближении к особой линии, в окрестности которой для вычисления решения P должно быть вместо (14) использовано точное выражение.

В работе [12] показано, что в ситуации, когда защищаемый от шума объект находится от барьера на значительно большем расстоянии, чем источник звука, решение задачи дифракции слабо зависит от типа краевого условия на теневой стороне барьера. Этот эффект подтверждается и результатами, представленными на рис. 1 и 2 (кривые sh и s близки друг к другу), что освобождает в таких ситуациях от рассмотрения задачи с импедансными условиями на обеих сторонах полуплоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00066).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Butler G.F. A note on improving the attenuation given by a noise barrier // J. Sound and Vibr. 1974. **32**, N 3. 367–369.
2. Rawlins A.D. The solution of a mixed boundary value problem in the theory of diffraction by a semi-infinite plane // Proc. Roy. Soc. London. 1975. **A346**, N 1647. 469–484.

3. *Fujiwara K., Ando Y., Maekawa Z.* Noise control by barriers. Part 2: Noise reduction by an absorptive barrier // *Appl. Acoustics*. 1977. **10**. 167–179.
4. *Meixner J.* Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Schirmen // *Ann. Phys.* 1949. **6**. 2–9.
5. *Pierce A.D.* Acoustics. An introduction to its physical principles and applications. N.Y.: McGraw-Hill, 1981.
6. *Morse M., Ingard K.U.* Linear Acoustic Theory: Encyclopedia of Physics / Ed. by S. Flugge. Vol. XI/1. Acoustics I. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
7. *Peters A.S., Stoker J.J.* A uniqueness theorem and a new solution for Sommerfeld's and other diffraction problems // *Communs Pure and Appl. Math.* 1954. **7**, N 3. 565–585.
8. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics. N.Y.: Pergamon Press, 1959 (*Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973).
9. *Исраилов М.Ш.* Дифракция акустических и упругих волн на полуплоскости при разнотипных граничных условиях // *Изв. РАН. Механ. твердого тела*. 2013. **3**. 121–134.
10. *Исраилов М.Ш.* Дифракция плоских звуковых волн на “твердо-мягкой” полуплоскости // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.* 2018. № 4. 34–40.
11. *Hohenwarter D.* Railway noise propagation models // *J. Sound and Vibr.* 1990. **141**, N 3. 17–41.
12. *Исраилов М.Ш., Акчаматова Л.Р., Абдуллаев А.М.* Исследование гашения шума барьерами с различающимися звукопоглощающими свойствами сторон // *Изв. Чечен. гос ун-та*. 2017. **3**. 21–28.

Поступила в редакцию
16.05.2018

УДК 532.591, 531.5.031

ДИНАМИКА САНЕЙ ЧАПЛЫГИНА НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

А. Ю. Шамин¹

В работе получены уравнения движения саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости с трением. Представлена геометрическая интерпретация безотрывного движения; доказано, что движение саней прекращается за конечное время; отмечены некоторые свойства движения.

Ключевые слова: сани Чаплыгина, сухое трение.

The equations of motion of the Chaplygin sleigh on a horizontal plane with friction are obtained in this paper. A geometric interpretation of the continuous motion is presented; it is proved that the movement of the sleigh stops in a finite time.

Key words: Chaplygin sleigh, dry friction.

1. Введение. Исследования динамики механических систем с трением представляют большой интерес для науки и техники, поскольку при проектировании различного рода механизмов идеализированные модели не всегда корректно описывают динамику системы и не могут отразить все важные эффекты. Механические системы с трением рассматривались в работах [1, 2], в частности динамика саней Чаплыгина в неголономной постановке с вязким трением изучалась в [3, 4]. В постановке без трения задача исследовалась С.А. Чаплыгиным в работе [5, т. 1, с. 15–25].

В настоящей работе рассматриваются сани Чаплыгина с сухим трением в неголономной постановке. Предложен качественный анализ движения саней: получены оценки времени движения, рассмотрены условия безотрывности.

2. Постановка задачи. Рассматривается механическая система, называемая санями Чаплыгина, представляющая собой треногу, опирающуюся на шероховатую неподвижную горизонтальную плоскость *Oxy* в точках *A*, *B*, *C*, где треугольник $\triangle ABC$ — равносторонний со стороной $AB = a$.

¹ Шамин Александр Юрьевич — асп. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: Shamin_ay@mail.ru.

Shamin Alexander Yur'evich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.